DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LABORATOIRE II

Directives: *Cette séance de laboratoire vous permettra d'observer, à l'aide du logiciel* MATLAB, *les conséquences pratiques reliées à l'utilisation d'un système de représentation binaire et de l'arithmétique flottante.*

1. **Précision machine**
   Dans cet exercice on travaillera en format long avec exposant. Pour cela, tapez: `format long e`.
   (a) Quelle est la valeur de *eps*, constante définie sous MATLAB comme la distance entre 1 et le nombre flottant le plus proche?
   (b) Vérifier que $eps = |3(\frac{4}{3} - 1) - 1|$.
   (c) Quelles sont les valeurs de $1 + \frac{eps}{4}$, $1 + \frac{eps}{2}$, $1 + \frac{3 \times eps}{4}$, $1 + eps$? Que remarque-t-on?
   indice: Comparer les valeurs obtenues à $x = 1$ en utilisant l'opérateur «==».
   (d) L'algorithme ci-dessous, décrit à la page 17 du livre de référence permet de calculer la précision machine.

   Algorithme:
   1. Initialisation: $epsm = 1$
   2. Itérations: tant et aussi longtemps que $1 + epsm > 1$:
      effectuer: $epsm = \frac{epsm}{2}$
   3. On a divisé une fois de trop: $epsm = 2 \times epsm$
   4. On a trouvé la précision machine: $\epsilon = epsm$

   Écrire un script MATLAB qui permettra d'évaluer la précision machine à l'aide de cet l'algorithme.

Les effets de l'arithmétique flottante

2. On désire estimer $e \simeq 2,71828$ à l'aide de la relation

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

   (a) Écrire une fonction MATLAB dont le seul argument en entrée sera n et qui calculera l'expression $(1 + \frac{1}{n})^n$.

(b) En utilisant la fonction developpée en (a), calculer $(1+\frac{1}{n})^n$ et représenter graphiquement, sur deux graphes distincts, la différence $\big((1+\frac{1}{n})^n - e\big)$:

- en partant de $n = 10^5$ jusqu'à $n = 10^7$, par incréments de 2×10^5;
- en partant de $n = 10^{15}$ jusqu'à $n = 10^{17}$, par incréments de 2×10^{15}.

Observer les résultats obtenus et expliquer toute anomalie.

(c) Expliquer brièvement pourquoi en arithmétique flottante, la suite $(1+\frac{1}{n})^n$ tend plutôt vers 1 pour de grandes valeurs de n. Estimer analytiquement la plus petite valeur de n à partir de laquelle cette suite tend vers 1 sous Matlab qui utilise la norme IEEE en double précision.
Indice: Utiliser les résultats de la question 1(c).

3. La définition de la dérivée est

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La dérivée d'une fonction n'est pas toujours facile à obtenir et il est souvent utile d'utiliser une approximation de $f'(x)$ en évaluant le quotient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

pour différentes valeurs de h. Le quotient (1) dépend du paramètre h et on pourrait croire intuitivement que la précision du résultat augmente à mesure que diminue la valeur de h.

(a) Pour $f(x) = \tan(x)$ et $x = 1$, construiser un vecteur contenant les valeurs du quotient (1) pour $h = 10^{-k}$, où $k = 1, 2, 3, \cdots, 15$.

(b) Sachant que $f'(x) = \sec^2(x)$ (voir fonction Matlab `sec`). Construisez un vecteur contenant les erreurs absolues pour les différentes valeurs de h défines en (a).

(c) Faites un graphe de l'erreur en fonction de h en échelle logarithmique.
Indice: Utiliser la fonction « `loglog` ».

(d) Quelle est la plus petite erreur observée? Expliquez le comportement de l'erreur pour $h = 10^{-8}, 10^{-9}, \ldots, 10^{-15}$.

Guy Jomphe