8.1 Calcul du résidu pour un pôle

Théorème 8.1. *Si z_0 est un pôle d'ordre m alors*

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)}$$

Notons que si z_0 est un pôle d'ordre $m = 1$ alors

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Preuve. Puisque z_0 est un pôle d'ordre m alors la série de Laurent devient

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \\
(z-z_0)^m f(z) &= a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots a_{-2}(z-z_0)^{m-2} + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m \\
&\quad + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Ainsi en dérivant de façon successive, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^1}{dz^1}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= a_{-m+1} + \cdots (m-2)a_{-2}(z-z_0)^{m-3} + (m-1)a_{-1}(z-z_0)^{m-2} \\
&\quad + m\, a_0(z-z_0)^{m-1} + (m+1)a_1(z-z_0)^m + \cdots \\
\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= \cdots (m-2)(m-3)a_{-2}(z-z_0)^{m-4} + (m-1)(m-2)a_{-1}(z-z_0)^{m-3} \\
&\quad + m(m-1)\, a_0(z-z_0)^{m-2} + (m+1)m a_1(z-z_0)^{m-1} + \cdots \\
\frac{d^3}{dz^3}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= \cdots + (m-2)(m-3)(m-4)a_{-2}(z-z_0)^{m-5} \\
&\quad + (m-1)(m-2)(m-3)a_{-1}(z-z_0)^{m-4} \\
&\quad + m(m-1)(m-2)\, a_0(z-z_0)^{m-3} + (m+1)m(m-1)a_1(z-z_0)^{m-2} + \cdots \\
&\ \ \vdots \\
\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) &= (m-1)!\, a_{-1} + m!\, a_0(z-z_0) + \cdots
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\Big((z-z_0)^m f(z)\Big) = (m-1)!\, a_{-1}$$

D’où

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)$$

$\square$