MTH2120
Analyse appliquée
Devoir # 4

Date de remise: vendredi le 15 février 2019.

(Lors de la remise, une question sera choisie au hasard par le professeur)

Exercice 1 *Soit*

$$g_1(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Donnez le développement de Laurent de g_1 valide sur les couronnes

a) $|z| < 3$.

b) $|z| > 3$.

c) $|z - 2| > 1$.

Exercice 2 *Soit*

$$g_2(z) = \frac{1}{z(z-4)}.$$

Donnez le développement de Laurent de g_2 valide sur la couronne $1 < |z-1| < 3$.

Exercice 3 *Donnez le développement de Laurent de*

$$g_3(z) = \frac{1}{z^2}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

valide pour $|z| > 0$.

Exercice 4 *Selon la formule vue au cours, les coefficients de la série de Laurent de* $h(z) = \frac{1}{z}$ *en* $z_0 = 0$ *sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{h(w)}{w^{n+1}}\,dw,$$

où C est un cercle centré à l'origine.

a) À partir de la formule ci-dessus, calculez le coefficient a_{-1} en évaluant directement l'intégrale (i.e. en calculant explicitement l'intégrale curviligne.)

b) Calculez ensuite le coefficient a_n pour $n \neq -1$.

c) Donnez la série de Laurent de h en 0. Que constatez-vous?

Exercice 5 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les singularités et leur nature.*

a) $f(z) = \dfrac{(z^4 - 1)\sin(\dfrac{1}{z-i})}{(z+i)^2}$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$.

Exercice 6 *En observant les séries suivantes et en considérant la singularité* $z_0 = 0$, *déterminez la nature de cette singularité.*

a) $z^{-3} + z^{-2} + \dfrac{1}{2}z^{-1} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24}z + \dfrac{1}{120}z^2 + \cdots$.

b) $1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!\,z^2} + \cdots$.