Exemple complet : L'horloge à eau

Bruno Blais

Professeur Adjoint
Département de Génie Chimique
École Polytechnique

8 février 2019

Aperçu

Présentation de l'horloge à eau

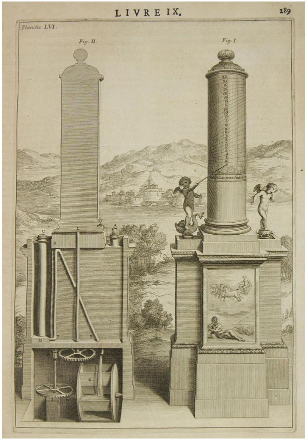
Le problème

Solution : Modèle physique et mathématique

Solution : Modèle numérique

Exemple complet : L'horloge à eau

Les horloges à eau (clepsydres) sont une ancienne manière de mesurer le temps en se basant sur la hauteur d'eau dans une colonne. Elles fonctionnent sur le même principe qu'un sablier. Cependant, dans une horloge à eau, le débit sortant de l'horloge est fonction de la hauteur du liquide, ce qui est moins le cas du sablier.

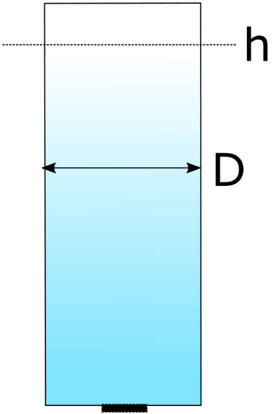


Problème

Vous avez une horloge à eau, mais celle-ci n'a pas été graduée. L'horloge est cylindrique et fait $H = 1\,\mathrm{m}$ de haut, avec un diamètre $D = 0.15\,\mathrm{m}$ et un trou au fond d'un diamètre de $d = 0.005\,\mathrm{m}$. Le débit à la sortie est proportionnel à la racine de la perte de charge Δp :

$$Q = C_d A_0 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{1}$$

Où ρ est la masse volumique du fluide, C_d est un coefficient de décharge, A_0 est l'aire du trou.



Problème : Suite

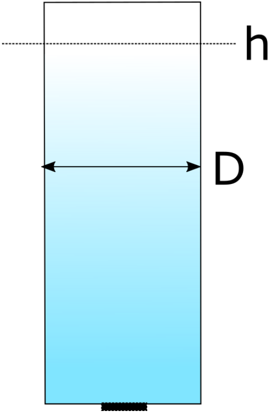
La perte de charge est donnée par la tête hydrostatique

$$\Delta P = \rho g h \tag{2}$$

où g est la gravité et h la hauteur de liquide dans l'horloge

Votre collègue vous indique qu'il faut 350 secondes pour que la hauteur du liquide passe de 0.9m à 0.8m dans l'horloge.

À partir de cette information, on vous demande de calibrer l'horloge pour une hauteur d'eau initiale de 1m. C'est à dire de déterminer combien de temps s'est déroulé entre un hauteur d'eau de h et la hauteur initiale à 1 m. Comment procéder ?



Modèle physique

Après le bilan on obtient une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dh}{dt} = -C_d \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh} \tag{3}$$

La seule chose que nous ne connaissons pas est la valeur de C_d, c'est ce que nous devons calibrer.

Modèle numérique

$$\frac{dh}{dt} = -C_d \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh} \tag{4}$$

On résout le problème avec un schéma d'Euler explicite

$$h^{t+\Delta t} = h^t - C_d \Delta t \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh^t} \tag{5}$$

Résolution MATLAB

Code pour la résolution du problème en différence finie

```
function [t] = eulerHorloge(h0,dt,Cd,hstop)
d=0.0005; % Diamètre du trou
D=0.15; % Diamètre de l'horloge
H=1; % Hauteur totale de l'horloge
g=9.8; % Gravité
t=0; % Temps initial
h=h0; % Hauteur au temps t
hpdt=h0; % Hauteur à t + delta t
while (h>hstop)
  hpdt = h - Cd*dt * d^2/(D^2) * sqrt(2*g*h);
  t += dt;
  h = hpdt;
end
end
```

Détermination de la valeur de C_d

On peut calibrer la valeur de C_d en lancant la simulation plusieurs fois avec une valeur de C_d différente.

```
clear all
C=linspace(1,20,50);
t=zeros(length(C),1);
for i=1:1:length(C)
   t(i)=eulerHorloge(0.9,0.05,C(i),0.8);
end
plot(C,t)
```

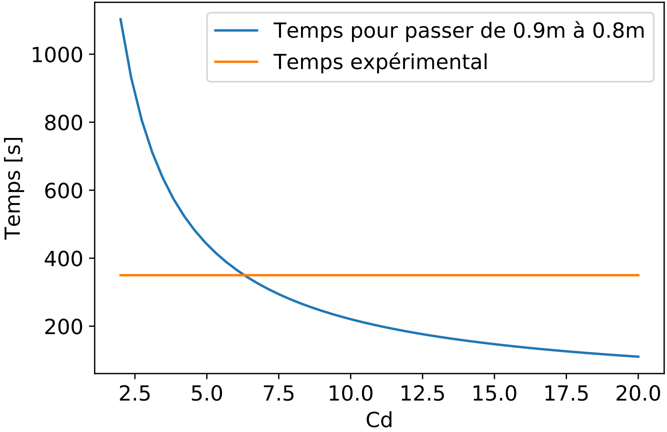
Résolution Python

```
def eulerHorloge(h0,dt,Cd,hstop):
# Propriétés du problème
d=0.0005 # Diamètre du trou
D=0.15   # Diamètre de l'horloge
H=1      # Hauteur totale de l'horloge
g=9.8    # Gravité
t=0      # Temps initial
h=h0     # Hauteur au temps t
hpdt=h0  # Hauteur à t + delta t

while (h>hstop):
   hpdt = h - Cd*dt*(d**2)/(D**2) * np.sqrt(2*g*h)
   t += dt
   h = hpdt
return t
```

Résolution Python

```
plt.figure()
npt=50
dt=0.01
Cd = np.linspace(2,20,npt)
t=[]
for c in Cd:
   t.append(eulerHorloge(0.9,dt,c,0.8))

plt.figure()
plt.plot(Cd,t,label="Temps pour passer de 0.9m à 0.8")
plt.plot([2,20],[350,350],label="Temps expérimental")
plt.xlabel("Cd")
plt.ylabel("Temps [s]")
plt.legend()
```

Résultat



Comment pourrions-nous procéder pour que ce soit encore plus automatique ?

Calibration Finale