DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE

MODÉLISATION NUMÉRIQUE EN GÉNIE CHIMIQUE (GCH2535)
THÉORIE DES E.D.P : DEVOIR 1
HIVER 2020

Directives :

- Vous devez compléter ce devoir pour le Mercredi 29 janvier à 23h55.
- Vous pouvez travailler par équipe de trois (4) au maximum.
- **Le corps de votre devoir doit contenir une page de présentation avec les noms, prénoms et matricules de chaque étudiant de l'équipe**.
- La présentation doit être soignée mais nous ne demandons pas que les devoirs soient typographiés sur traitement de texte.
- Il est toutefois préférable de rédiger vos devoirs à l'encre. Vous devez numériser et remettre sous Moodle la version PDF de votre devoir. Une seule copie du devoir est à remettre par équipe.
- Tout devoir élaboré avec un traitement de texte : **LaTeX, Word, ...** se verra attribuer un bonus de 1 point.

Question 1

On cherche à déterminer la solution $u(x,t)$ de l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \text{ et } t > 0, \tag{1}$$

qui vérifie les conditions aux limites et initiales suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u(1,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = x(1-x) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1. \end{array} \right. \tag{2}$$

(a) Supposons que $u(x,t) = F(x)G(t)$. En utilisant la méthode de la séparation des variables, montrer que la fonction $F(x)$ satisfait au problème de fonctions propres

$$\left\{ \begin{array}{l} F^{(4)}(x) - \lambda F(x) = 0 \text{ pour } 0 < x < 1, \\ F(0) = 0, \quad F(1) = 0, \quad F''(0) = 0 \text{ et } F''(1) = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

et que $G(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$G''(t) + 4\lambda G(t) = 0 \text{ pour } t > 0, \tag{4}$$

où λ est une constante réelle de séparation.

(b) Résoudre le problème de fonctions propres (3), en supposant que $\lambda = \mu^4 \geq 0$, où μ est un réel.

(c) En vous servant des résultats obtenus en (a) et (b), déduire la solution $u(x,t)$ de l'EDP (1) avec les conditions (2).
On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

Question 2

Dans un problème de conduction de chaleur bi-dimensionnelle, la température $u(x,y,t)$ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5}$$

On considère le problème qui consiste à trouver la fonction $u(x,y,t)$ satisfaisant à l'équation de conduction de la chaleur (5) dans le carré $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$, et aux conditions limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y,t) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,y,t) = 0 \text{ pour } 0 < y < \pi, t > 0 \\ u(x,0,t) = 0 \quad \text{et} \quad u(x,\pi,t) = 0 \text{ pour } 0 < x < \pi, t > 0 \end{cases} \tag{6}$$

et à la condition initiale

$$u(x,y,0) = f(x,y) = \begin{cases} 50, & \text{pour } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \text{ et } 0 < y < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

(a) Soit $u(x,y,t) = F(x)G(y)H(t)$. En utilisant la méthode de la séparation des variables, montrer que la fonction $H(t)$ satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$H'(t) - \lambda H(t) = 0,$$

$F(x)$ satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$F''(x) - \mu F(x) = 0, \tag{8}$$

et la fonction $G(y)$ satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$G''(y) + (\mu - \lambda)G(y) = 0, \tag{9}$$

où λ et μ sont des constantes réelles de séparation.

(b) Déterminer les conditions limites associées à l'équation différentielle (8) et trouver les fonctions et les valeurs propres associées à ce problème. **On demande une solution complète où chaque étape est justifiée**

(c) Déterminer les conditions limites associées à l'équation différentielle (9). En vous servant des résultats obtenus à la question (b), résoudre le problème de fonctions et de valeurs propres associé à la fonction $G(y)$.
On demande une solution complète où chaque étape est justifiée.

(d) En vous servant des résultats obtenus en (b) et en (c), trouver la température $u(x,y,t)$.
Indication : En utilisant l'orthogonalité des fonctions $\cos(nx), \sin(my)$ pour $n = 0,1,2,\ldots$ et $m = 1,2,\ldots$, identifier les coefficients $C_{m,n}$ de la superposition dans l'expression

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)\sin(my) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n}\cos(nx)\sin(my) \Rightarrow$$
$$g_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n}\cos(nx), m = 1,2,\ldots .$$