MTH2120

Analyse appliquée
Devoir # 2

Date de remise: vendredi le 25 janvier 2019.

(Lors de la remise, une question sera choisie au hasard par le professeur)

Exercice 1 *Nous avons vu en classe qu'une fonction est analytique en un point si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann pour la fonction sont satisfaites en tout point d'un voisinage de ce point. Utilisez ce résultat pour déterminer si chacune des fonctions suivantes est analytique.*

a) $f(z) = i\,z$, *où* $z \in \mathbb{C}$.

b) $g(z) = \dfrac{1}{z}$, *où* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

c) $h(z) = Im(z)$, *où* $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 *Utilisez l'une des formules*

$$\begin{cases} f'(x+iy) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ f'(x+iy) = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

pour démontrer que si $f(z) = \sin(z)$ *alors* $f'(z) = \cos(z)$.

Exercice 3 *Soit* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ *une fonction analytique.*
Trouvez toutes les fonctions $u(x,y)$ *et* $v(x,y)$ *telles que* $Im(f'(z)) = 2\,y$

Exercice 4 *Trouvez toutes les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ telle que la fonction*

$$f(z) = z\, Im(z^2) - \frac{2}{3}(Im(z))^3 - \frac{2}{3}\, i\, (Re(z))^3$$

soit analytique dans tout le plan complexe ?

Exercice 5 *Une fonction $u(x,y)$ est dite harmonique si*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Pour les sous-questions suivantes, déterminez les valeurs de a et b pour que les fonctions soient harmoniques.

a) $u(x,y) = a\,x^3 + b\,y^3$

b) $u(x,y) = \cos(a\,x)\ \cosh(2\,y)$

Exercice 6 *Considérons une fonction analytique $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Montrez que les courbes de niveau $u(x,y) = c_1$ et $v(x,y) = c_2$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sont orthogonales en leurs point d'intersection.*