DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE V

Directives: *Cette séance de laboratoire vous permettra de faire l'étude de problèmes appliqués menant à des équations algébriques non linéaires. Cette séance vous permettra aussi de résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles. Vous devrez utiliser les fonctions* MATLAB `bissect.m`, `secante`, `ptfixe.m`, `newton.m`, `euler.m` *et* `rk4.m` *disponibles sur le site Internet du cours. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction* `publish` *de* MATLAB. *Voir le fichier* `DocdeTravailLab5.m`.

1. Le facteur de compressibilité d'un gaz réel est donné par

$$z = \frac{1 + y + y^2 - y^3}{(1 - y)^3}. \tag{1}$$

   On cherche à déterminer y^*, la valeur de y lorsque $z = 0{,}892$.

   (a) À partir de l'équation (1), obtenir une fonction $f(y)$ pour laquelle $f(y^*) = 0$.

   (b) Écrire une fonction MATLAB qui calculera $f(y)$ et tracer le graphe de $f(y)$ sur l'intervalle $[1{,}5\ ,\ 5]$.

   (c) Calculer des approximations de y^* en utilisant les méthodes de la *bissection*, de la *sécante* et de *Newton*. Pour les trois méthodes, tracer en échelle logarithmique sur le même graphique en utilisant la fonction MATLAB `semilogy`, les erreurs $|e_n|$ en fonction du nombre d'itérations. Commenter les résultats obtenus.

   (d) Pour $z = 0{,}892$, on obtient à partir de l'équation (1), le problème de points fixes $g_\alpha(y) = y$, avec

$$g_\alpha(y) = \alpha f(y) + y,$$

   où α est un paramètre réel et $f(y)$ est la fonction obtenue en (a).

      i. Calculer une approximation d'ordre 2 de $f'(y^*)$ et déterminer *analytiquement* les valeurs de α pour lesquelles la méthode de points fixes associée à la fonction $g_\alpha(y)$ converge.

      ii. Choisir une valeur de α parmi celles obtenues à la question précédente. Pour cette valeur de α, calculer une approximation de y^* en utilisant le problème de points fixes associé à la fonction $g_\alpha(y)$. Une fois l'approximation de y^* obtenue, calculer les ratios des erreurs $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ et $|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$. Présenter à l'aide de la commande `fprintf` les valeurs des ratios dans un tableau de 2 colonnes. À partir des valeurs du tableau, déterminer numériquement l'ordre de convergence de cette méthode de points fixes.

   Le rapport doit contenir: le programme MATLAB, *le graphe produit par ce programme à la question (b); le programme* MATLAB, *le graphe produit par ce programme et les fichiers de résultats (resultat.dat) des fonctions de la bibliothèque numérique utilisées à la question (c);*

les valeurs de l'approximation de $f'(y^*)$ et de α obtenues à la question (d(i)); le programme MATLAB*, le tableau produit par ce programme et la discussion sur l'ordre de convergence obtenu à la question d(ii)).*

2. Le problème de valeurs initiales de Fehlberg est constitué du système d'équations différentielles

$$\begin{cases} c''(t) = -\pi^2 t^2 c(t) - \pi \dfrac{s(t)}{\sqrt{(c(t))^2 + (s(t))^2}}; \\ \\ s''(t) = -\pi^2 t^2 s(t) + \pi \dfrac{c(t)}{\sqrt{(c(t))^2 + (s(t))^2}}, \end{cases}$$

et des conditions initiales

$$\begin{cases} c(2\sqrt{3}) = 1; \\ c'(2\sqrt{3}) = 0; \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} s(2\sqrt{3}) = 0; \\ s'(2\sqrt{3}) = 2\pi\sqrt{3}. \end{cases}$$

La solution du problème de Fehlberg est donnée par

$$c(t) = \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad s(t) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right).$$

(a) Transformer le système d'équations différentielles d'ordre 2 en un système de 4 équations différentielles d'ordre 1 et donner les conditions initiales associées au système.

(b) Résoudre le système obtenu en (a) à l'aide des méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta d'ordre 4 sur l'intervalle $[2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 1]$. Utiliser le pas temps $h_1 = 0{,}025$ pour la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Pour avoir le même nombre d'appels de fonctions pour les deux méthodes, utiliser le pas temps $h_2 = \frac{h_1}{4}$ pour la méthode d'Euler explicite. Tracer sur 3 graphiques différents:

   i. les graphes des solutions numérique et analytique de $c(t)$ en fonction du temps;

   ii. les graphes des solutions numérique et analytique de $s(t)$ en fonction du temps;

   iii. les graphes des solutions numérique et analytique de $s(t)$ en fonction $c(t)$;

(c) Quelles conclusions peut-on tirer des résultats obtenus en (b)?

Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction du système d'équations différentielles, le programme MATLAB *et les graphes produits par ce programme à la question (b); la discussion à la question (c).*

Donatien N'Dri & Steven Dufour