DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
DEVOIR

13 avril 2018

Directives : *Vous avez trois heures pour compléter les deux exercices de ce devoir. À la fin de la séance, vous devez remettre sur MoodleQuiz la version PDF de votre rapport de laboratoire. Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction `publish` de* MATLAB. *Voir le fichier `RapportDev.m`. Vous devez utiliser les fonctions de la bibliothèque numérique du cours et le logiciel* MATLAB. *Le fichier `RapportDev.m` et les fonctions utiles pour le devoir sont disponibles dans la bibliothèque numérique du cours.*

1. La simulation numérique de l'écoulement de deux polymères dans une filière annulaire a donné les résultats illustrés au Tableau 1, où u_i est la vitesse axiale au rayon r_i. Tous les résultats sont disponibles dans le fichier « `donnees.txt` », sur le site du cours. La commande « `load` » de MATLAB permet de charger ces données dans votre espace de travail. Voir le fichier « `RapportDev.m` ». Télécharger le fichier « `donnees.txt` » de la bibliothèque numérique du cours.

i	r_i	u_i
0	1,000 000 000	0,000 000 000
1	1,033 333 333	0,059 793 127
2	1,066 666 666	0,111 777 223
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
29	1,966 666 666	0,058 843 045
30	2,000 000 000	0,000 000 000

Table 1: Vitesse axiale des polymères en fonction du rayon

(a) Soit
$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$
le polynôme de degré n passant par les $(n+1)$ points de collocation de coordonnées $(x_i\,,\, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.
Le système pour obtenir les coefficients a_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ est donné par
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$
La matrice de ce système linéaire porte le nom de matrice de Vandermonde.

($\frac{1}{20}$) i) Écrire un programme qui permet de réaliser les instructions suivantes :

- créer la matrice de Vandermonde pour les données du tableau;
- calculer, à l'aide de la norme $\| \ \|_\infty$, le conditionnement de la matrice de Vandermonde des données du tableau;

($\frac{2}{20}$) ii) Expliquer avec preuves à l'appui pourquoi la méthode basée sur la matrice de Vandermonde n'est pas appropriée pour déterminer le polynôme d'interpolation qui passe par les données du tableau.

($\frac{3}{20}$) (b) Construire l'approximation polynomiale qui vous semble appropriée pour représenter les données du tableau. Tracer sur le même graphique l'approximation polynomiale obtenue et les données. Utiliser le symbole $\circ$ pour identifier les données du tableau.

Le rapport doit contenir : le programme MATLAB*, la valeur du conditionnement et la discussion à la question (a); le programme* MATLAB *et le graphe à la question (b).*

2. Dans le domaine de l'astronautique, une tuyère propulsive est un conduit de section variable, placé à la sortie d'un propulseur et sert à transformer l'énergie des gaz de combustion en énergie cinétique. Le débit massique dans une tuyère propulsive est donné par la relation:

$$D_m = AMP_0\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}\left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{1}$$

où:

$A = 0{,}8\,\mathrm{m}^2$ est l'aire de la sortie de la tuyère;

$P_0 = 101325\,\mathrm{Pa}$ est la pression dans le réservoir alimentant la tuyère;

$T_0 = 288\,\mathrm{K}$ est la température dans le réservoir alimentant la tuyère;

$\gamma = 1{,}4$ est le rapport des chaleurs spécifiques du gaz;

$R = 287\,\mathrm{J/kg\,K}$ est la constante du gaz;

et M est le nombre de Mach en sortie de la tuyère.

Pour le débit massique $D_m = 100\,\mathrm{kg/s}$, on désire déterminer les valeurs du nombre de Mach (M) en sortie de la tuyère.

($\frac{1}{20}$) (a) Obtenir de l'équation (1), une équation algébrique non linéaire de la forme $f(M) = 0$.

($\frac{1}{20}$) (b) Écrire une fonction MATLAB qui calculera $f(M)$ pour une valeur de M donnée.

($\frac{1}{20}$) (c) En vous servant de la fonction développée en (b), tracer le graphe de la fonction $f(M)$ sur l'intervalle $[0\ ,\ 3]$. Illustrer graphiquement les positions approximatives des deux racines de la fonction $f(M)$.

($\frac{3}{20}$) (d) Déterminer numériquement les deux racines de la fonction $f(M)$. Pour chaque racine, justifier le choix de la méthode numérique et des arguments initiaux utilisés.

(e) De l'équation (1), on obtient le problème de points fixes $g(M) = M$ où :

$$g(M) = C\left[1+\frac{M^2}{5}\right]^3,$$

avec

$$C = \frac{D_m}{AP_0\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}}$$

($\frac{2}{20}$) i) Soient $M_{r_1} < M_{r_2}$ les deux racines de la fonction $f(M)$. En vous servant des approximations des racines obtenues en (d), calculer des approximations d'ordre 2 de $g'(M_{r_1})$ et de $g'(M_{r_2})$. Conclure sur la nature des points fixes.

($\frac{3}{20}$) ii) Dans le cas où le point fixe est attractif, utiliser la méthode des *points fixes* pour calculer une approximation du point fixe. Calculer les ratios des erreurs $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ et $|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$. Présenter à l'aide de la commande `fprintf` les valeurs des ratios dans un tableau de 2 colonnes. À partir des valeurs du tableau, déterminer numériquement l'ordre et le taux de convergence de cette méthode de points fixes.

($\frac{3}{20}$) iii) Pour le point fixe attractif obtenu en ii), on considère le problème de points fixes associé à la fonction

$$G(M) = M - \frac{(g(M) - M)^2}{g\left(g(M)\right) - 2g(M) + M}$$

Pour ce nouveau problème de points fixes, utiliser la méthode des *points fixes* pour calculer une approximation du point fixe. Calculer les ratios des erreurs $|\frac{e_{n+1}}{e_n}|$ et $|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$. Présenter à l'aide de la commande `fprintf` les valeurs des ratios dans un tableau de 2 colonnes. Donner une approximation de la valeur vers laquelle le ratio des erreurs $|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$ devrait converger.

Note: Porter une attention particulière à la possibilité d'une division par zéro dans l'évaluation de la fonction $G(M)$.

Le rapport doit contenir: la fonction MATLAB *à la question (b); le programme* MATLAB *et le graphe produit par ce programme à la question (c) ; la justification du choix des méthodes et des arguments initiaux, le programme* MATLAB *et les fichiers de résultats (resultat.dat) des fonctions de la bibliothèque numérique utilisées à la question (d); le programme* MATLAB*, les approximations de $g'(M_{r_1})$, $g'(M_{r_2})$ et la discussion à la question (e)i); le programme* MATLAB*, le tableau produit par ce programme, le fichier de résultats (resultat.dat) de la fonction de la bibliothèque numérique utilisée et les valeurs du taux et de l'ordre de convergence obtenus à la question (e)ii); le programme* MATLAB*, le tableau et l'approximation de la valeur vers laquelle le ratio des erreurs $|\frac{e_{n+1}}{e_n^2}|$ devrait converger à la question (e)iii).*

Les professeurs du cours MTH2210A