Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
EXAMEN FINAL

21 avril 2018

Directives: *Vous avez deux heures et trente minutes pour compléter cet examen. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

   (a) En utilisant des développements de Taylor appropriés, on peut montrer que

$$f_h'(x) = f'(x) + \frac{f'''(x)h^2}{3!} + \frac{f^{(5)}(x)h^4}{5!} + \mathcal{O}(h^6),$$

où

$$f_h'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

est la différence centrée d'ordre 2 pour estimer $f'(x)$.
À l'aide de cette différence centrée, on a calculé des approximations de la dérivée première d'une fonction $f(x)$ au point $x = 1$ en utilisant trois valeurs de h. On a obtenu les résultats suivants:

h	$f_h'(1) = \frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$
0,09	1,176 788 36
0,03	1,175 377 48
0,01	1,175 220 75

($\frac{1}{20}$) i) En vous servant des données du tableau, obtenir une approximation d'ordre 4 de $f'(1)$ qui soit la plus précise possible.

($\frac{1}{20}$) ii) En vous servant des données du tableau, expliquer brièvement comment on pourrait calculer une approximation d'ordre 6 de $f'(1)$. **Ne pas calculer l'approximation.**

($\frac{2}{20}$) (b) Soit une nouvelle formule d'intégration numérique dans l'intervalle $[0\,,\,1]$ de la forme

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Déterminer le degré de précision de cette formule d'intégration numérique.

($\frac{2}{20}$) (c) Certains points du profil d'un tremplin de ski sont donnés dans le tableau suivant:

x (en m)	$H(x)$ (en m)	x (en m)	$H(x)$ (en m)
0	100	60	12,9488
10	84,7135	70	10
20	76,2285	80	12,0038
30	49,5312	90	18,2018
40	33,5646	100	27,3379
50	20,9830		

où x (en m) représente la distance horizontale par rapport à la plateforme de départ et $H(x)$ (en m) la hauteur du tremplin en x. La longueur du tremplin est définie par

$$L = \int_0^{100} \sqrt{1 + (H'(x))^2}\, dx.$$

Proposer une méthodologie numérique pour calculer une approximation de la longueur du tremplin qui soit d'ordre 2. Cette approximation doit être la plus précise possible. Justifier le choix des méthodes utilisées et identifier clairement toutes les quantités pertinentes (les formules, les paramètres ...). **Ne pas calculer l'approximation.**

2. Questions indépendantes

($\frac{2}{20}$) (a) On veut résoudre l'équation

$$e^x - (x + 5) = 0.$$

Faire 2 itérations de la méthode de la bissection en partant de l'intervalle $[1{,}75 \quad , \quad 2]$ et estimer le nombre de chiffres significatifs de l'approximation obtenue.

(b) Soit $f(x)$ une fonction vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} f(r) = 0 \\ f'(r) \neq 0 \\ f''(r) = 0 \\ f'''(r) \neq 0 \end{cases}$$

($\frac{0{,}5}{20}$) i) Quelle est la multiplicité de la racine r de $f(x)$?**Justifier votre réponse.**

($\frac{1{,}5}{20}$) ii) Montrer que la méthode de Newton converge au moins à l'ordre 3 vers la racine r.

3. On considère le système non linéaire

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0, \\ \\ x_1 x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

($\frac{1}{20}$) (a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de ce système.

($\frac{2{,}5}{20}$) (b) Faire une itération de la méthode de Newton en partant de l'approximation initiale $[x_1^0 \quad x_2^0]^T = [1 \quad 0]^T$.

($\frac{1{,}5}{20}$) (c) La table suivante contient les itérations de la méthode de Newton qui suivent celle effectuée en (b). On vous présente également la norme euclidienne de l'erreur commise à chaque itération en comparant avec la solution exacte $\vec{x} = [1 \quad 1]^T$. Quel est l'ordre de convergence de la méthode de Newton dans ce cas? Donner 2 raisons pour justifier votre réponse.

i	x_1^i	x_2^i	$\lVert\vec{x} - \vec{x}^i\rVert_2$
0	1,000000	0,000000	$1{,}0 \times 10^{0}$
1			$5{,}0 \times 10^{-1}$
2	1,15	0,9	$1{,}8 \times 10^{-1}$
3	1,062805	0,937805	$8{,}8 \times 10^{-2}$
4	1,031250	0,968750	$4{,}4 \times 10^{-2}$
5	1,015625	0,984375	$2{,}2 \times 10^{-2}$
6	1,007812	0,992188	$1{,}1 \times 10^{-2}$
7	1,003906	0,996094	$5{,}5 \times 10^{-3}$
8	1,001953	0,998047	$2{,}7 \times 10^{-3}$
9	1,000977	0,999023	$1{,}3 \times 10^{-3}$

4. Questions indépendantes

($\frac{2}{20}$) (a) Soit le problème de valeurs initiales

$$y'''(t) + \cos\left(y(t)\right) = e^t, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 3.$$

i) Transformer cette équation différentielle en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre 1.

ii) Donner les conditions initiales associées au système obtenu en (i).

($\frac{3}{20}$) (b) Le problème de valeurs initiales

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 1195y_1(t) - 1995y_2(t) \quad y_1(0) = 2 \\ y_2'(t) &= 1197y_1(t) - 1997y_2(t) \quad y_2(0) = -2 \end{cases}$$

possède la solution analytique

$$y_1(t) = 10e^{-2t} - 8e^{-800t} \quad \text{et} \quad y_2(t) = 6e^{-2t} - 8e^{-800t}.$$

En prenant un pas $h = 0{,}1$, faire une itération de la méthode d'Euler explicite. Expliquer les résultats obtenus en les comparant à la solution analytique.

Les professeurs du cours MTH2210A