DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

**MTH2210A-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS**
**CONTRÔLE PÉRIODIQUE DIFFÉRÉ**

le 3 mars 2018

**Directives**: *Vous avez deux heures pour compléter ce contrôle. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

($\frac{1,5}{20}$) (a) Soit une calculatrice travaillant en arithmétique flottante à 3 chiffres dans la mantisse et utilisant l'arrondi. Faire les différentes étapes suivies par cette calculatrice pour évaluer l'expression suivante:

$$\left(\pi\left(\frac{1}{\pi}\right)\right) - 1.$$

($\frac{0,5}{20}$) (b) Expliquer brièvement la notation $E(h) = \mathcal{O}(h^3)$.

(c) Soit le développement de Taylor de la fonction $\arctan(x)$ autour de $x_0 = 0$:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

($\frac{1}{20}$) i. Sachant que $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$, estimer la valeur de $\pi$ à l'aide du polynôme de Taylor d'ordre 7.

($\frac{0,5}{20}$) ii. Expliquer pourquoi l'approximation de $\pi$ obtenue en (i) n'est pas précise.

($\frac{3}{20}$) (d) Calculer les 3 premiers termes non nuls du développement de Taylor de la fonction

$$g(x) = e^{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}$$

autour de $x_0 = 0$. Préciser le degré et l'ordre du polynôme obtenu.

2. On fournit les données suivantes pour le satellite Titania d'Uranus:

$$\text{Rayon:} \quad R = 800\,000 \pm 5000\,\text{m}$$

$$\text{Densité:} \quad \rho = 1590 \pm 90\,{}^{\text{kg}}/_{\text{m}^3}$$

($\frac{1}{20}$) (a) Donner le nombre de chiffres significatifs du rayon $R$ et de la densité $\rho$.

($\frac{2}{20}$) (b) En supposant que Titania est parfaitement sphérique de volume $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, trouver une approximation de sa masse $m = \rho V$ et donner le nombre de chiffres significatifs de votre résultat.

3. (a) Le tableau ci-dessous contient les températures quotidiennes maximales mesurées tous les 3 jours durant un mois d'août.

| Jour | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_m$ (°$C$) | 31,2 | 32,0 | 35,3 | 34,1 | 35,0 | 35,5 | 34,1 | 35,1 | 36,0 |

($\frac{1}{20}$) i. En utilisant le meilleur polynôme de degré 1 possible, obtenir une approximation de la température maximale au jour $x = 4$.

($\frac{1}{20}$) ii. Serait-il possible d'obtenir une meilleure approximation de la température maximale au jour $x = 4$ en utilisant toutes les données du tableau? **Justifier votre réponse.**

($\frac{2}{20}$) (b) Soit les points de coordonnées $(x_i, y_i)$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. On a utilisé les 3 méthodes présentées en classe pour calculer le polyñome d'interpolation qui passe par ces $(n + 1)$ points. Pour la méthode basée sur la matrice de Vandermonde, on a calculé une décomposition $LU$ de Crout de la matrice de Vandermonde. Pour la méthode de Lagrange, on a calculé les $(n + 1)$ polynômes de Lagrange $L_i(x)$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Finalement, pour la méthode de Newton, on a calculé la table des différences divisées. En vérifiant les données, on a réalisé que les coordonnées du dernier point devraient être $(x_n, \hat{y}_n)$ et non $(x_n, y_n)$. En vous servant au besoin des données déjà calculées, déterminer laquelle des 3 méthodes serait la plus appropriée pour construire le nouveau polynôme d'interpolation. **Une réponse sans les bonnes justifications se verra attribuer la note 0.**

($\frac{1}{20}$) (c) On désire faire passer une *spline cubique naturelle* par les points suivants:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 1,000 000 |
| 1 | 0,5 | 1,127 626 |
| 2 | 1,0 | 1,543 081 |
| 3 | 1,5 | 2,352 409 |
| 4 | 2,0 | 3,762 196 |

En résolvant le système linéaire requis, on a trouvé:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''_i$ | 0,000 | 1,432 | 1,178 | 3,308 | 0,000 |

En se servant de cette spline, on veut obtenir une approximation de $f'(1{,}0)$. On peut donc choisir entre le polynôme $p_2(x)$ défini dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ et le polynôme $p_3(x)$ défini dans l'intervalle $[1, \frac{3}{2}]$. Lequel de ces 2 polynômes donnera la meilleure approximation de $f'(1{,}0)$? Expliquer pourquoi.

($\frac{1}{20}$) (d) Soit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ des points également distancés , c'est-à-dire qu'il existe $h > 0$ tel que $x_i - x_{i-1} = h$ pour $i = 1, 2, 3$. En interpolant la fonction cubique $k(x) = x^3$ sur l'intervalle $[x_0, x_3]$ par une spline cubique naturelle, on obtient quand même une erreur. Expliquer ce résultat.

4. Questions indépendantes

$(\frac{1,5}{20})$ (a) La décomposition $LU$ de Crout d'une matrice $A$ obtenue sans permutation de lignes est donnée en notation compacte par:

$$\begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 7 & -\frac{29}{4} & -\frac{19}{29} \\ 5 & -\frac{87}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

On considère le système linéaire $A\vec{x} = [6 \quad 9 \quad 3]^T$.
En utilisant une calculatrice, on trouve comme solution le vecteur

$$[1{,}586\,206 \quad -0{,}448\,2759 \quad -1{,}000\,000]^T.$$

Après avoir multiplié la matrice par ce vecteur, on trouve:

$$[5{,}999\,9963 \quad 8{,}999\,9938 \quad 2{,}999\,9962]^T$$

ce qui semble indiquer que la solution obtenue est acceptable.
La résolution du même système sur un ordinateur produit la solution

$$[0{,}620\,6896 \quad 2{,}172\,4137 \quad 3{,}0000]^T].$$

Après multiplication de la matrice du système par ce vecteur, l'ordinateur affiche:

$$[5{,}999\,9995 \quad 8{,}999\,9998 \quad 3{,}000\,0014]^T$$

ce qui semble tout aussi acceptable. Expliquer avec preuve à l'appui ces résultats.

$(\frac{1}{20})$ (b) Une matrice $B$ de dimensions $3 \times 3$ possède les propriétés suivantes:

i. $\|B\|_\infty = 3{,}5$.

ii. La solution de $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 83{,}077 \\ 156{,}92 \\ -57{,}692 \end{pmatrix}$.

iii. La solution de $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 64{,}615 \\ -115{,}38 \\ 41{,}538 \end{pmatrix}$.

iv. La solution de $B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0{,}46154 \\ -1{,}5384 \\ 1{,}1538 \end{pmatrix}$.

En déduire le conditionnement de la matrice $B$.

$(\frac{2}{20})$ (c) Soit le système linéaire $C\vec{x} = \vec{b}$ suivant:

$$\begin{pmatrix} -0{,}149 \times 10^3 & -0{,}500 \times 10^2 & -0{,}154 \times 10^3 \\ 0{,}537 \times 10^3 & 0{,}180 \times 10^3 & 0{,}546 \times 10^3 \\ -0{,}270 \times 10^2 & -0{,}900 \times 10^1 & -0{,}250 \times 10^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}1 \times 10^1 \\ 0{,}2 \times 10^1 \\ 0{,}3 \times 10^1 \end{pmatrix}$$

Supposons que tous les chiffres de chaque composante $C_{ij}$ de la matrice $C$ sont significatifs. Sachant que $\|C^{-1}\|_\infty = 515{,}6667$, estimer l'erreur relative sur la solution $\vec{x}$ de ce système linéaire.

*Les professeurs des cours MTH2210A*