DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
LABORATOIRE I

Directives : *Cette séance de laboratoire vous permettra de vous familiariser avec les commandes de base de* MATLAB*, la programmation et les fonctionnalités graphiques de ce logiciel. Nous vous invitons fortement à lire le guide d'introduction à* MATLAB*, disponible sur le site Internet du cours, avant de tenter de faire ces exercices. Vous devez faire les 8 exercices et remettre la version PDF de votre rapport sur Moodle au plus tard le vendredi 10 mai à 13h00.*
Rédigez et présentez votre rapport en utilisant la fonction `publish` *de* MATLAB*. Voir le fichier* `RapportLab1.m`*.*

1. Soit le vecteur donné par la commande MATLAB

   ```
   err =[0.5671; 0.4328; 0.4555e-01; 0.3305e-02; 0.2707e-04; 0.1660e-7];
   ```

   On désire calculer les valeurs des ratios

   $$\left|\frac{err_{n+1}}{err_n}\right|, \quad \left|\frac{err_{n+1}}{err_n^{\alpha}}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{err_{n+1}}{err_n^{2}}\right|,$$

   où err_n la nième composante du vecteur e et $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Utiliser l'opérateur `:` pour extraire 2 sous vecteurs du vecteur err et calculer les valeurs des 3 ratios à l'aide des opérateurs `./` et `.^` . **Ne pas utiliser de boucle `for` ou `while`** .
   Présenter les résultats dans un tableau de trois colonnes à l'aide de la commande `fprintf`.
   Le rapport doit contenir : le programme MATLAB *et le tableau produit par ce programme.*

2. Pour estimer la dérivée première de la fonction réelle $f(x) = \tan(x)$ en $x = 1$, on considère le quotient

   $$\frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \tag{1}$$

   En vous servant du quotient (1), écrire un programme MATLAB qui calcule différentes approximations de $f'(1)$ et les erreurs absolues correspondantes, pour $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \cdots, 10^{-20}$. Utiliser les opérateurs `:`, `.*` , `./` et `.^` pour écrire votre programme. (**Ne pas utiliser de boucle `for` ou `while`**).
   Indice : Utiliser les fonctions MATLAB `tan` *et* `sec`*.*

   (a) Les résultats doivent être présentés dans un tableau de 3 colonnes comportant les valeurs de h, les approximations de $f'(1)$ et les erreurs absolues.

   (b) Tracer le graphe de l'erreur absolue en fonction de h en échelle logarithmique. *Indice : Utiliser la fonction «* `loglog` *».*

Le rapport doit contenir : Le programme MATLAB*, le tableau et le graphique produit par ce programme.*

3. On considère $p_4(x)$ et $r(x)$ deux approximations de la fonction e^x.

$$p_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

$$r(x) = \frac{Q(x) + xP(x)}{Q(x) - xP(x)},$$

où :

$$P(x) = 0{,}249\,999\,999\,999\,999\,993 + 0{,}694\,360\,001\,511\,792\,852 \times 10^{-2}x^2$$
$$+0{,}165\,203\,300\,268\,279\,130 \times 10^{-4}x^4$$

$$Q(x) = 0{,}5 + 0{,}555\,538\,666\,969\,001\,188 \times 10^{-1}x^2 + 0{,}495\,862\,884\,905\,441\,294 \times 10^{-3}x^4.$$

Tracer sur un même graphique le graphe des erreurs commises $e^x - p_4(x)$ et $e^x - r(x)$ sur l'intervalle $[-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2}]$ en utilisant un vecteur de 129 abscisses équidistantes dans l'intervalle $[-\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 2}{2}]$. Utiliser la fonction MATLAB `linspace` pour construire le vecteur des abscisses et la commande `hold on` pour superposer les deux graphes. Identifier clairement les 2 courbes. Commenter les résultats obtenus.
Le rapport doit contenir : le programme MATLAB*, le graphe produit par ce programme et la discussion.*

4. L'objectif de cette question est de mieux comprendre les notions d'erreurs absolue et relative. Il existe une approximation bien connue du factoriel,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$$

trouvée par Stirling :

$$S_n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Écrire un programme MATLAB qui permet de réaliser les instructions suivantes :

(a) Construire un vecteur, `factoriel`, contenant les nombres

$$1!,\ 2!,\ 3!, \ldots, 13!.$$

Indice : Utiliser les fonctions MATLAB `factorial` *ou* `prod`*.*

(b) Construire un vecteur, `stirling`, contenant les nombres

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{13}.$$

Indice : Utiliser les opérateurs `.*` *et* `.^`

(c) Pour $n = 1, 2, \ldots, 13$, construire deux vecteurs contenant respectivement les erreurs absolues $|n! - S_n|$ et relatives $|n! - S_n|/n!$.
Indice : Utiliser l'opérateur `./`

(d) Présenter à l'aide de la commande `fprintf` les résultats dans un tableau de trois colonnes comportant les valeurs de n et des erreurs absolue et relative.

Commenter sur la qualité de l'approximation (l'importance de l'erreur) en fonction de n.

Le rapport doit contenir : le programme MATLAB *, le tableau produit par ce programme et la discussion.*

5. Nous parlerons du *nombre d'or*, qui est défini par $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}6181$, lorsque nous étudierons la méthode de la sécante. Il y a plusieurs algorithmes qui nous permettent de calculer ce nombre. Programmons-en un :

   La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = 0$ et $F_2 = 1$

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{pour } n = 3, 4, 5, \ldots$$

   On peut montrer que le rapport $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ lorsque $n \to \infty$. Écrire un programme MATLAB qui vous permettra de déterminer la valeur de n à partir de laquelle le rapport $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ donne une approximation du nombre d'or avec **au moins** 6 chiffres significatifs.

   Le rapport doit contenir : le programme MATLAB *et la la valeur de n obtenue par ce programme.*

6. Le coefficient de friction d'un parachutiste en chute libre est donnée par la fonction continue et différentiable

   $$k(t) = \begin{cases} \frac{2}{11} & \text{si} \quad t < t_{para}; \\ \frac{10523}{64} - \frac{5625}{128}t + \frac{1286}{333}t^2 - \frac{268}{2415}t^3 & \text{si} \quad t_{para} \le t < t_{para} + t_{ouv}; \\ 2 & \text{si} \quad t \ge t_{para} + t_{ouv}, \end{cases}$$

   où $t_{para} = 10\,\mathrm{s}$ est le moment où le parachute commence à s'ouvrir et $t_{ouv} = 3{,}2\,\mathrm{s}$ est le temps que le parachute prend pour s'ouvrir complètement.

   (a) Écrire une fonction MATLAB qui permet d'évaluer la fonction $k(t)$ pour t donné. Assurez-vous que votre fonction puisse prendre des vecteurs comme argument d'entrée.
   La fonction `find` de MATLAB *pourrait être utile.*

   (b) En vous servant de la fonction développée en (a), tracer le graphe de la fonction $k(t)$ sur l'intervalle $[0\,,15]$.

   Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction MATLAB *développée à la question (a), le programme* MATLAB *et le graphe produit par ce programme à la question (b).*

7. Soit la fonction

   $$f(x) = \frac{1}{((1-x^2)^2 + \lambda x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

   où λ est un paramètre réel.

(a) Pour λ donné, écrire une fonction MATLAB dont le seul argument d'entrée sera x et qui calculera $f(x)$. Assurez-vous que votre fonction puisse prendre des vecteurs comme argument d'entrée.
Utiliser la commande `global` *de* MATLAB *pour transférer la valeur du paramètre λ à votre fonction.*

(b) En vous servant de la fonction développée en (a), tracer pour les valeurs du paramètre $\lambda = 0{,}015625$; $\lambda = 0{,}1$; $\lambda = 0{,}5$, les graphes de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0{,}1\ ,\ 2]$. Identifier clairement les 3 courbes.

Le rapport doit contenir : le fichier de la fonction MATLAB *développée à la question (a), le programme* MATLAB *et le graphe produit par ce programme à la question (b).*

8. Nous cherchons un algorithme pour estimer la valeur de π. Une méthode est basée sur le fait que le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ est π. Pour estimer la valeur de π, il suffit alors d'estimer le périmètre d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$. L'idée est donc d'inscrire des polygones réguliers dans le cercle et de calculer le périmètre du polygone.

En augmentant le nombre de côtés du polygone, on s'approche de plus en plus du périmètre du cercle et donc de π. Nous noterons p_n le périmètre du polygone ayant 2^n côtés (par exemple, $p_2 = 2\sqrt{2}$) et on assumera que la formule de récurrence suivante est vraie :

$$p_{n+1} = 2^n \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{p_n}{2^n}\right)^2}\right)}, \quad \text{pour} \quad n = 2,\ 3,\ \ldots \tag{2}$$

Écrire un programme MATLAB qui calculera p_n pour $n = 3,\ 4,\ \ldots,\ 30$ en utilisant l'algorithme (2). Le programme devra présenter à l'aide de la commande `fprintf` les résultats dans un tableau de trois colonnes comportant les valeurs de n, p_n ainsi que l'erreur absolue commise. Que remarquez-vous d'anormal ? Donner le nombre de chiffres significatifs de p_{15} et p_{24}. Justifier vos réponses.

Le rapport doit contenir : le programme MATLAB *, le tableau, le nombre de chiffres significatifs de p_{15} et p_{24} produits par ce programme et la discussion.*

Donatien N'Dri & Steven Dufour