Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal

CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
Notes de cours complémentaires

Les fonctions splines

En introduisant les fonctions splines dans les années 40, Schenberg apporta plus de souplesse dans l'approximation polynomiale. Il permit de diminuer le degré du polynôme approchant la fonction en considérant des fonctions polynomiales par morceaux appelées *splines* du nom de la tige flexible qu'on fixait sur le papier pour tracer des courbes lisses. Nous envisagerons ici le cas des *splines cubiques.*

Splines cubiques

Soient $(n+1)$ points d'interpolation de coordonnées $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Sur chaque intervalle élémentaire $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, on cherche un polynôme $P_i(x)$ de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant les conditions d'interpolation,

$$P_1(x_0) = f(x_0);$$

$$P_i(x_i) = f(x_i), \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1;$$

$$P_{i+1}(x_i) = f(x_i), \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1;$$

$$P_n(x_n) = f(x_n)$$

et les conditions de continuité des dérivées premières et secondes,

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1;$$
$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

On définit par la suite la spline cubique qui passe par ces points d'interpolation par:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) & \text{si} \quad x \in [x_0\,,\,x_1]; \\ P_2(x) & \text{si} \quad x \in [x_1\,,\,x_2]; \\ P_3(x) & \text{si} \quad x \in [x_2\,,\,x_3]; \\ \vdots & \\ P_n(x) & \text{si} \quad x \in [x_{n-1}\,,\,x_n]. \end{cases}$$

Calcul de la Spline cubique

La spline cubique étant de degré 3 dans chaque intervalle, sa dérivée seconde est un polynôme de degré 1 sur chaque intervalle. Ainsi dans chaque intervalle $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, la dérivée seconde est représentée par un segment de droite dont les sommets sont les points de coordonnées (x_{i-1}, f''_{i-1}) et (x_i, f''_i), où $f''_{i-1} = P''_i(x_{i-1})$ et $f''_i = P''_i(x_i)$.

En posant $h_i = x_i - x_{i-1}$, la formule d'interpolation de Lagrange donne alors:

$$P''_i(x) = -f''_{i-1}\frac{(x - x_i)}{h_i} + f''_i\frac{(x - x_{i-1})}{h_i},$$

On intègre 2 fois cette équation et on cherche $P_i(x)$ sous la forme:

$$P_i(x) = -f''_{i-1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + f''_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_i) + B_i(x - x_{i-1}),$$

où A_i et B_i sont des constantes d'intégration à déterminer à l'aide des conditions d'interpolation.
Comme $P_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$, on en déduit que

$$A_i = -\left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{f''_{i-1}h_i}{6}\right)$$

et de la condition $P_i(x_i) = f(x_i)$, on déduit la valeur

$$B_i = \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{f''_i h_i}{6}\right).$$

On en déduit par la suite que l'équation de la spline dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ est

$$\begin{aligned}P_i(x) = -\frac{f''_{i-1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \frac{f''_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \\ -\left\{\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{f''_{i-1}h_i}{6}\right\}(x - x_i) + \left\{\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{f''_i h_i}{6}\right\}(x - x_{i-1}),\end{aligned}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

En exprimant la condition de continuité des dérivées premières $P'_i(x_i) = P'_{i+1}(x_i)$, on obtient un système de $(n-1)$ équations données par

$$\frac{h_i}{6}f''_{i-1} + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1})f''_i + \frac{h_{i+1}}{6}f''_{i+1} = \left\{\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}}\right\} - \left\{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}\right\}$$

ce qui donne en utilisant les différences divisées:

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}f''_{i-1} + 2f''_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}f''_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Il y a au total $(n+1)$ inconnues f_i'' et l'on n'a que $(n-1)$ équations. On doit donc imposer de façon arbitraire deux conditions supplémentaires aux extrémités. Il existe plusieurs possibilités, mais la plus simple consiste à imposer les valeurs des dérivées secondes aux deux extrémités soit $f_0'' = a \quad \text{et} \quad f_n'' = b$.

Si $a = b = 0$, on qualifie de *spline naturelle* ou de *spline libre* la courbe qui en résulte. Un autre choix possible consiste à imposer que:

$$f_0'' = f_1'' \quad \text{ou encore} \quad f_0'' - f_1'' = 0;$$

$$f_{n-1}'' = f_n'' \quad \text{ou encore} \quad f_{n-1}'' - f_n'' = 0;$$

Il est possible que la pente soit connue aux extrémités, on définit dans ce cas une *spline forcée* en imposant les conditions suivantes:

$$P_1'(x_0) = f'(x_0) = f_0' = a \quad \text{et} \quad P_n'(x_n) = f'(x_n) = f_n' = b.$$

En dérivant l'équation de la spline, on a

$$P_i'(x) = -\frac{f_{i-1}''}{2h_i}(x-x_i)^2 + \frac{f_i''}{2h_i}(x-x_{i-1})^2 + \\ - \left\{\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{f_{i-1}''h_i}{6}\right\} + \left\{\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{f_i''h_i}{6}\right\},$$

En évaluant $P_1'(x)$ en x_0 on a,

$$-\frac{h_1 f_0''}{3} - \frac{h_1 f_1''}{6} + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} = a$$

qui devient

$$2f_0'' + f_1'' = \frac{6}{h_1}\left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_1} - a\right).$$

En évaluant $P_n'(x)$ en x_n on a,

$$\frac{h_n f_{n-1}''}{6} + \frac{h_n f_n''}{3} + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_n} = b$$

qui devient

$$f_{n-1}'' + 2f_n'' = \frac{6}{h_n}\left(b - \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_n}\right).$$