POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

ELE 6705
Traitement numérique des signaux

Hassan Bensalah

Chap. V : Conversion A/N et N/A Par Sur-échantillonnage

Sujets abordés

- Généralités
- Quantification vs Taux d’échantillonnage
- Modulation Délta-Sigma

Généralités

$x_a(t) \rightarrow$ P-Bas $\rightarrow A/N \rightarrow x(n)$

Fréq. coupure $f_c = \frac{f_e}{2}$

Taux d'échantillonnage f_e

✓ Possiblement d'ordre élevé ⇨ Complexité; Distorsion de phase;
Vulnérabilité au bruit
Vulnérabilité aux interférences

$y(n) \rightarrow N/A \rightarrow$ P-Bas $\rightarrow y_a(t)$

$x_a(t) \longrightarrow$ P-Bas $\longrightarrow$ A/N $\longrightarrow x(n)$

Fréq. coupure $f_c = \frac{f_e}{2}$
Beaucoup plus simple

f_e très élevée

- ✓ Possiblement d'une quantification dure (1bit) sans perte d'information
- ✓ Principe: Échange entre résolution de l'amplitude et la résolution dans le temps

$x(n) \longrightarrow$ Sys. Discret $\longrightarrow y(n)$

T_x:très petit quantification Dure(ex:1bit)

$T_y \gg T_x$:quantification douce (ex:16bits)

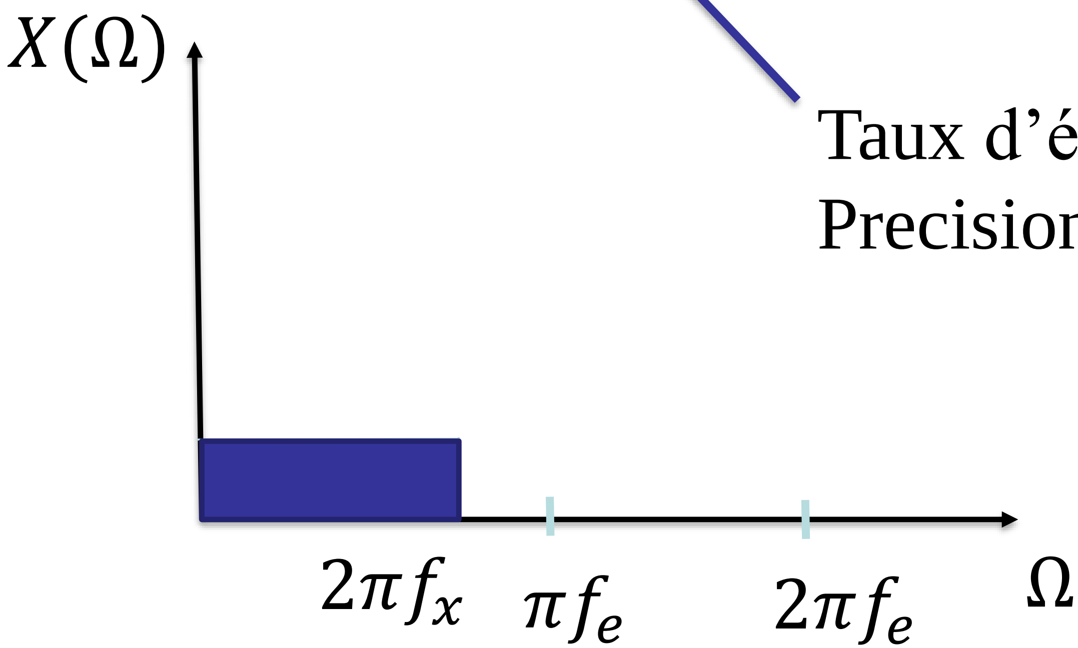
$x(n) \longrightarrow$ N/A $\longrightarrow$ P-Bas $\longrightarrow y(n)$

plus simple

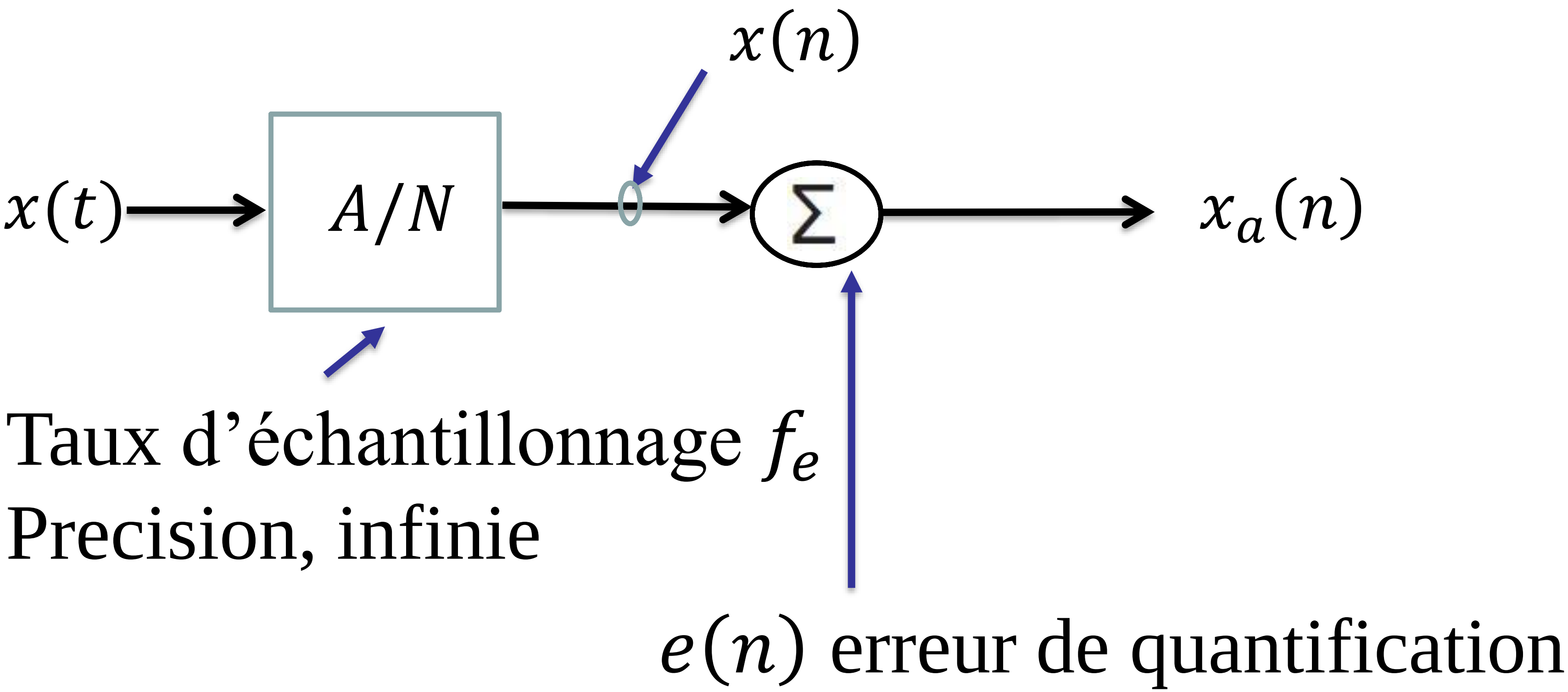
Quantification vs Taux d’échantillonnage

$$x(t) \longrightarrow \boxed{A/N} \longrightarrow Q\{x(nT_e)\} = Q\{x(n)\} = x_a(n)$$

Taux d’échantillonnage f_e
Precision, finie



Modèle:



- On voudrait $e(n)$ indépendant de $x(n)$; c'est possible lorsque $x(n)$ varie beaucoup

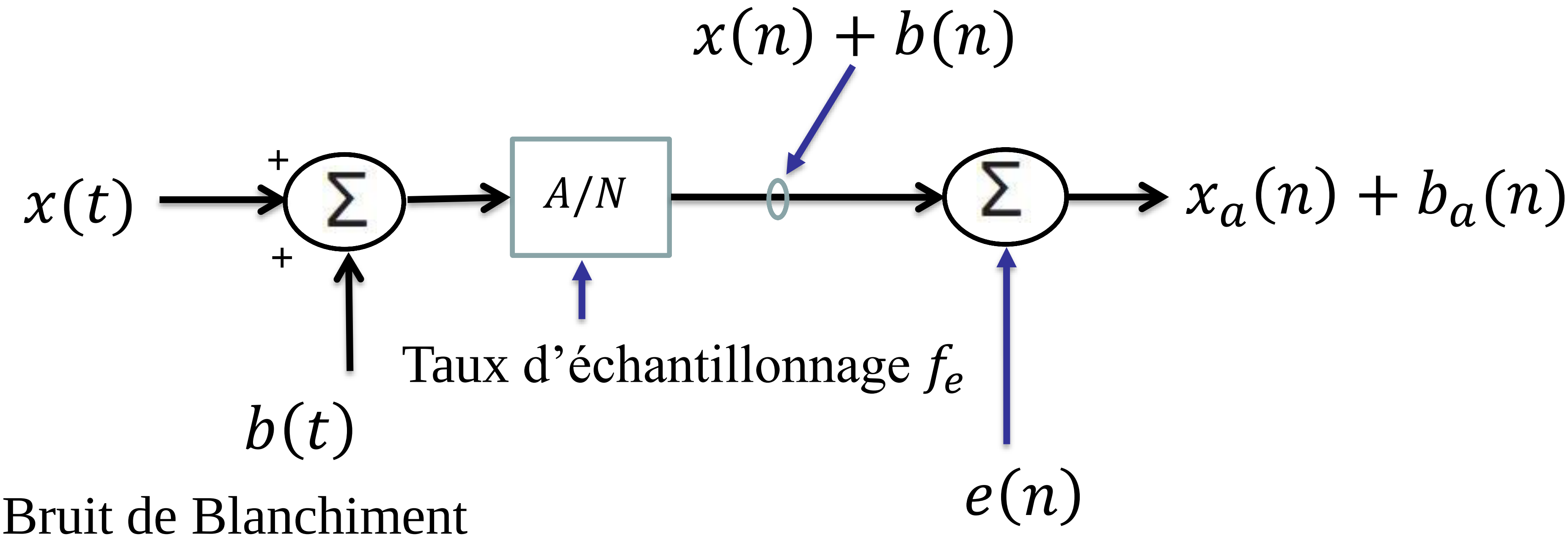
- Pour contribuer à rendre $e(n)$ indépendamment de $x(n)$ les conditions suivantes sont respectées:

  - ✓ tous les niveaux de quantification ont une probabilité égale d'être utilisés ;

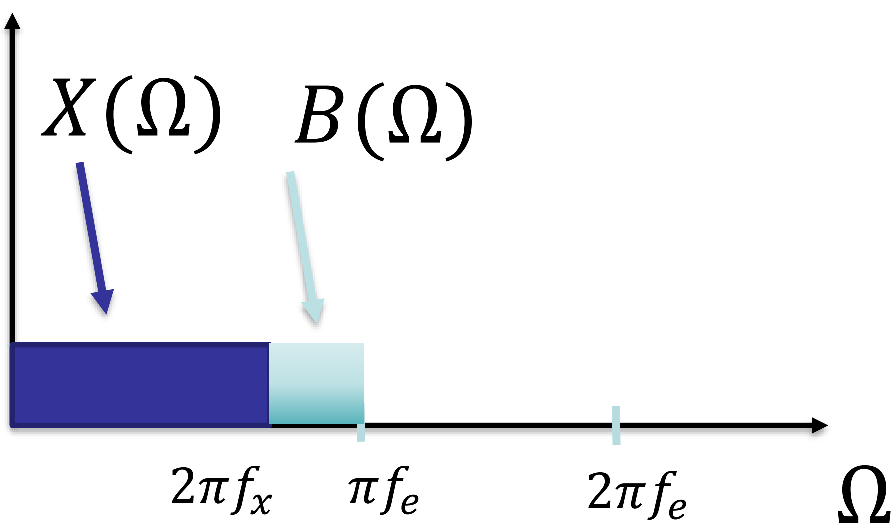
  - ✓ les pas de quantification sont uniformément distribués;

  - ✓ le signal d'entrée franchit plusieurs niveau de quantification entre deux échantillons ;

  - ✓ le signal d'erreur n'est pas corrélé avec le signal d'entrée.

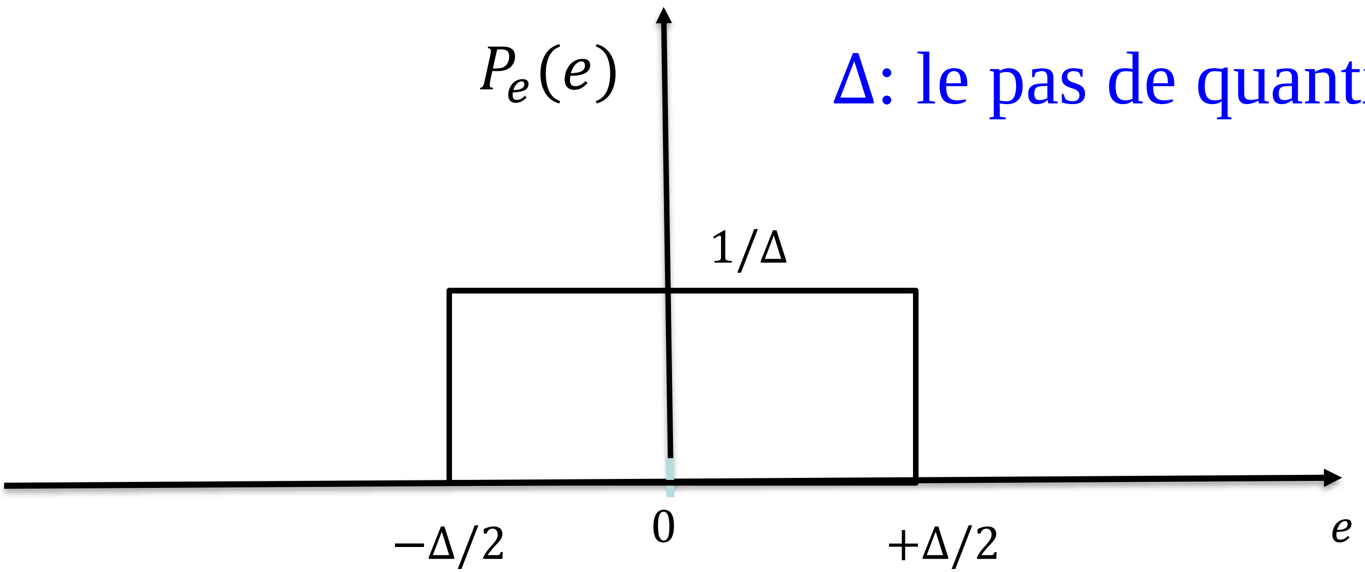


Bruit de Blanchiment



❖ $e(n)$: Bruit blanc

➢Fonction de densité de probabilité

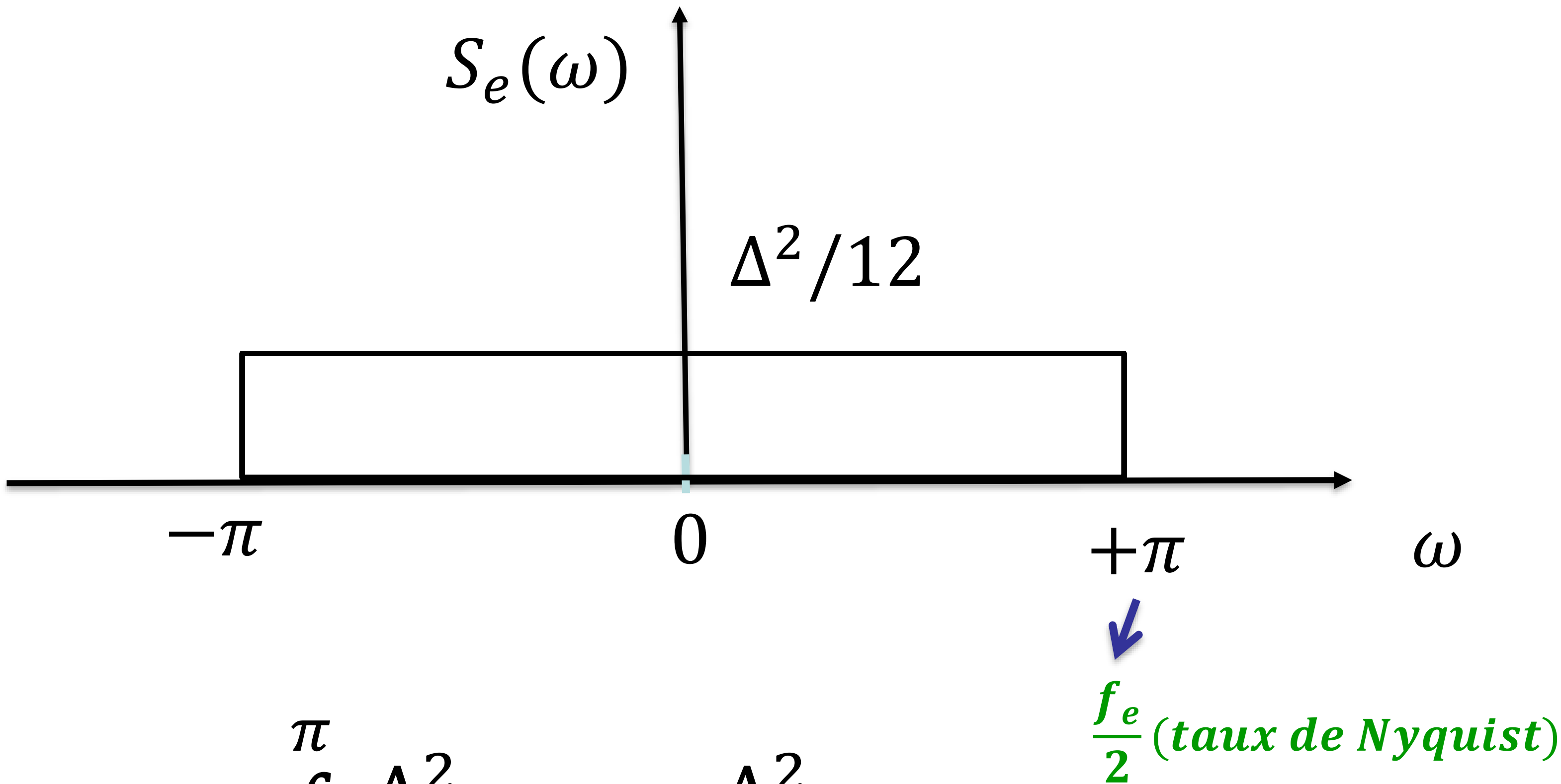


Δ: le pas de quantification

➢Puissance moyenne de l'erreur

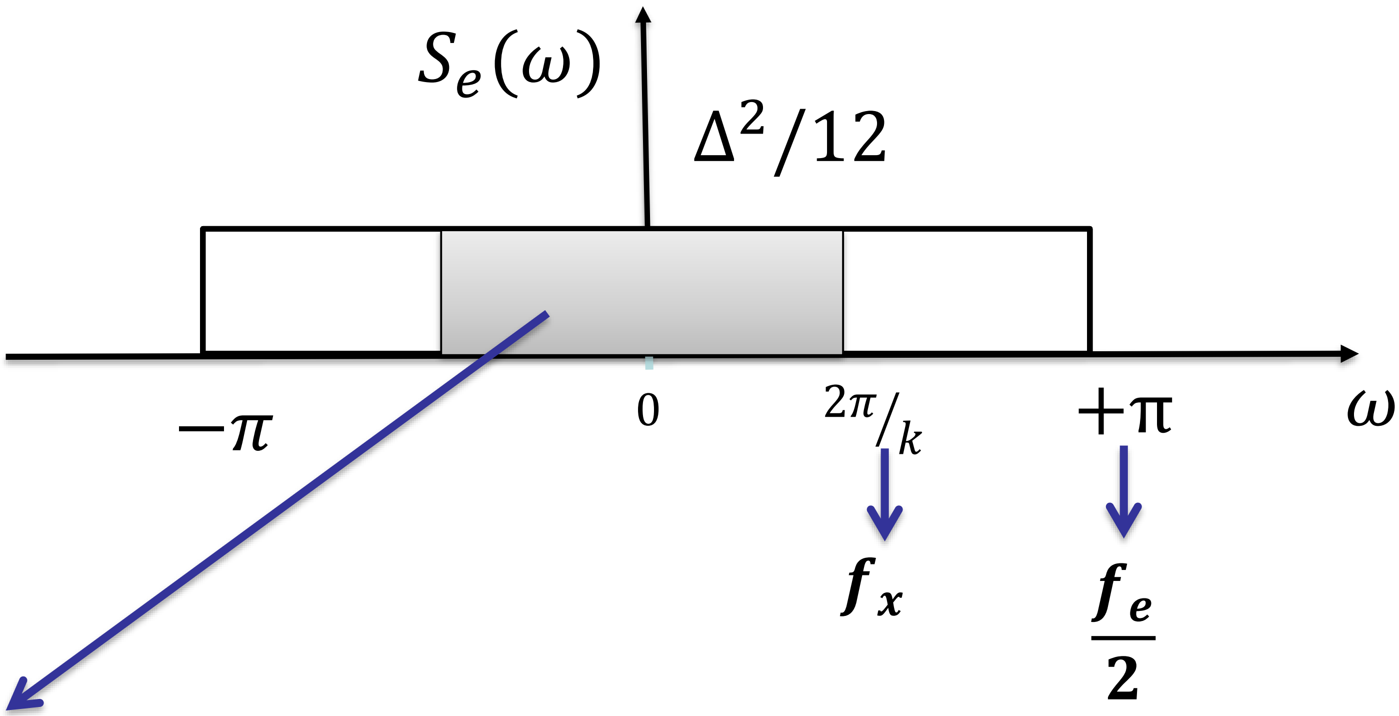
$$\overline{e^2(n)} = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} (1/\Delta)\, e^2 de = \frac{\Delta^2}{12}$$

➢Spectre de puissance de $e(n)$: $S_e(\omega)$



$$S_e(\omega) = 2\int_0^{\pi} \frac{\Delta^2}{12}\, d\omega = \frac{\Delta^2}{12}$$

- Soit $f_e = k f_x \quad (\mathrm{k} > 2)$

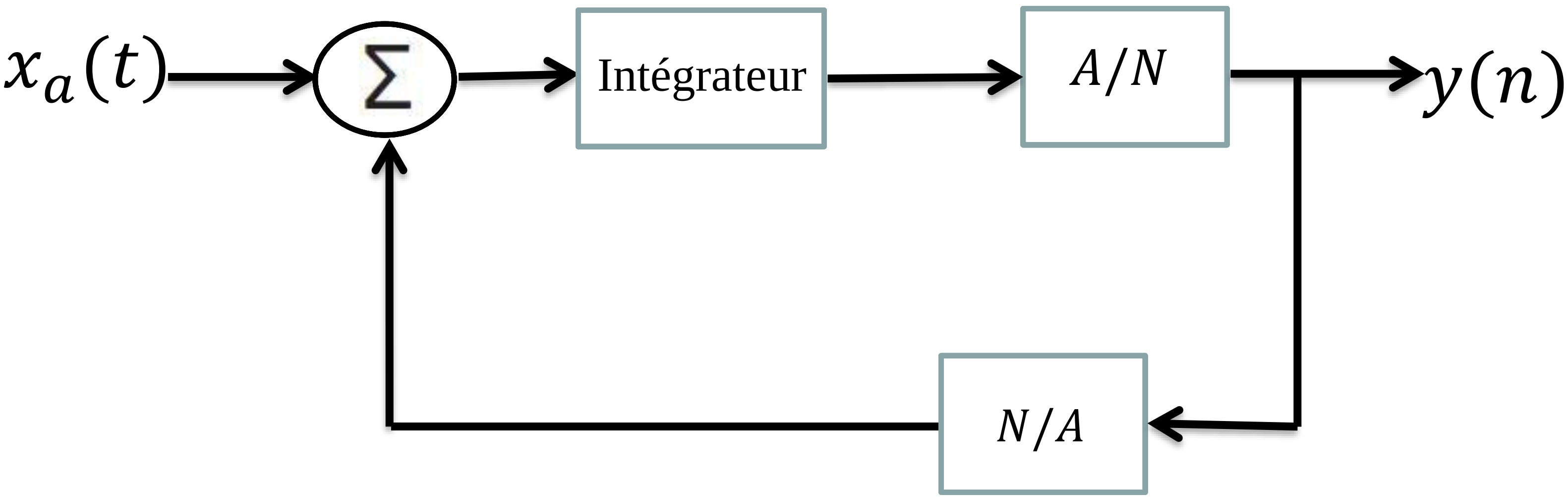


- Puissance du bruit de quantification dans la bande de fréquence utile du signal: $S_e(\omega)$

$$P_{qe}(\omega) = 2\int_0^{f_x} \frac{\Delta^2}{12}\, df = 2\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \frac{\Delta^2}{12}\, \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta}{\sqrt{k}}\right)^2$$

- $k * 2, \qquad \Delta \div \sqrt{2}\ \left(\frac{1}{2}\, bit\ suppl\acute{e}mentaire\right)$
- $k * 4, \qquad \Delta \div 2\ (1\ bit\ suppl\acute{e}mentaire)$
- L'augmentation de la précision demande tout de même un effort considérable en terme de taux d'échantillonnage.

Modulation Delta-Sigma

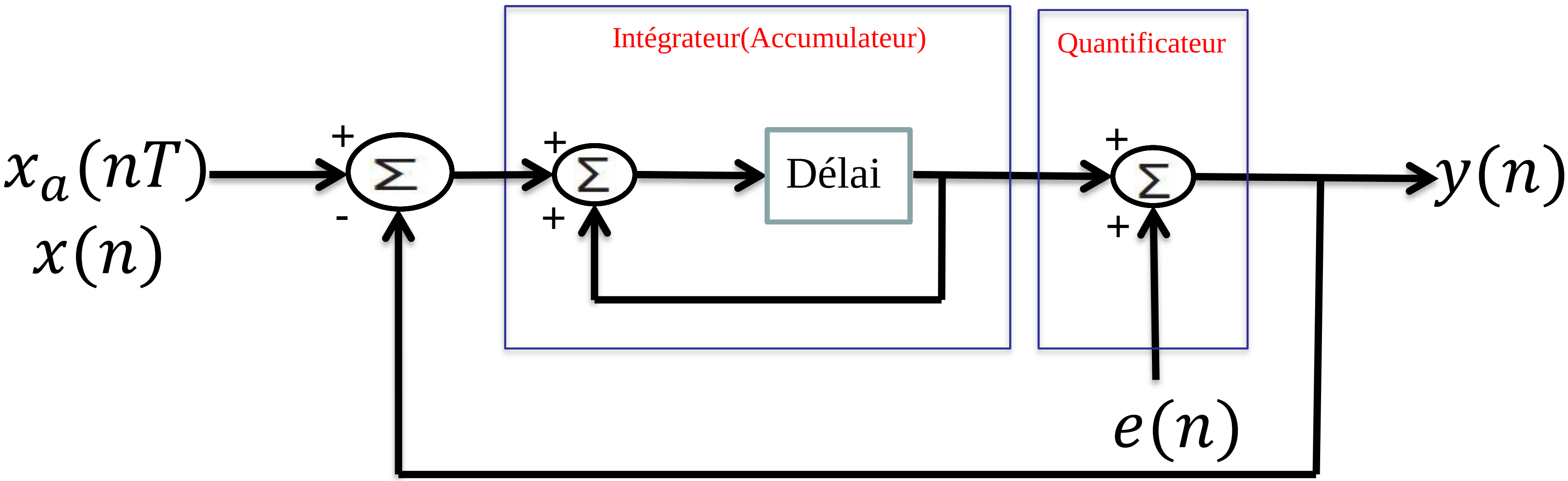


- La valeur moyenne à la sortie tend à suivre la valeur moyenne à l'entrée;

Toute différence s'accumule dans l'intégrateur puis se corrige.

- But: Diminuer la puissance de l'erreur de quantification dans la largeur de la band de signal: « Noise shaping»

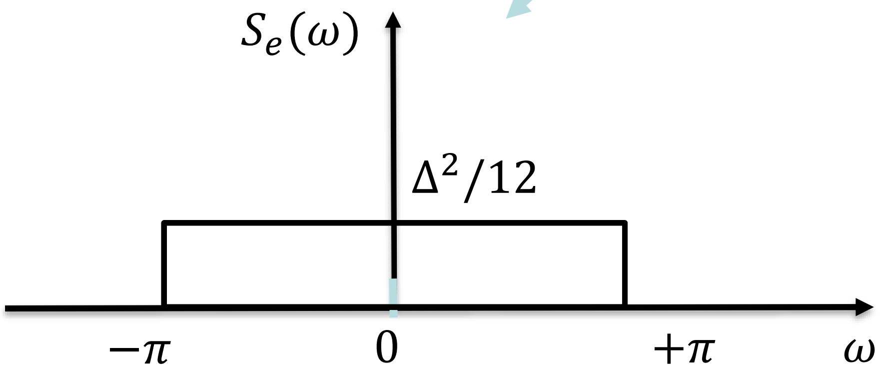
Analyse:



- $y(n) = x(n-1) + [e(n) - e(n-1)]$
- Bruit de quantification à la sortie:
  - ✓ $b(n) = e(n) - e(n-1)$
  - ✓ $B(e^{j\omega}) = E(e^{j\omega})(1 - e^{-j\omega})$

- Spectre de puissance de $b(n)$: $S_b(\omega)$

$$S_b(\omega) = S_e(\omega)\left|1 - e^{-j\omega}\right|^2$$



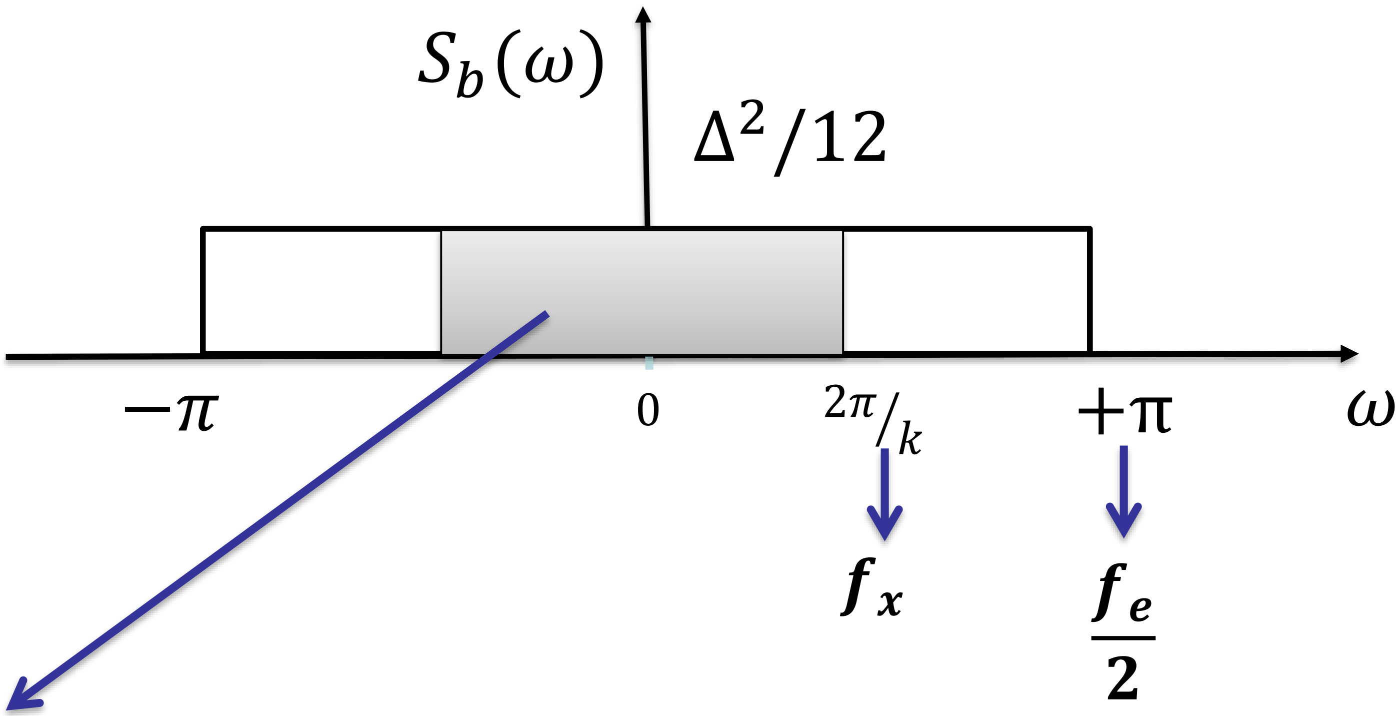
$2 - 2\cos\omega$

Ou bien

$4\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2$

✓ Pour une petite fréquence ω , $\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{2}\right)^2$

➢Soit $f_e = k f_x \quad (\mathrm{k} > 2)$



➢Puissance du bruit de quantification dans la bande de fréquence utile du signal: $S_b(\omega)$

$$P_{qb}(\omega) = 2\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \frac{\Delta^2}{12}\,\omega^2\,\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\pi^2}{9}\left(\frac{\Delta}{k^{\frac{3}{2}}}\right)^2$$

- ✓ $k * 2, \qquad \Delta \div 2\sqrt{2}\ (1\frac{1}{2}\,bit\ suppl\acute{e}mentaire)$
- ✓ $k * 4, \qquad \Delta \div 8\ (1\ bit\ suppl\acute{e}mentaire)$

➢Modulation d’ordre M.

- Bruit de quantification est proportionnel à la quantité suivante:

$$\left(\frac{\Delta}{k^{M+\frac{1}{2}}}\right)^2$$

- ✓ $k * 2, \qquad \Delta \div 2^{M+\frac{1}{2}}\ (M + \frac{1}{2}\,bit\ suppl\acute{e}mentaire)$