Polytechnique Montréal

Analyse appliquée MTH2120 - Exercices

28 novembre 2018

Table des matières

Plusieurs exercices de ce recueil proviennent du document *Notes de cours complémentaires et cahier d'exercices, 6e édition* de Clément Frappier.

1 Exercices sur les fonctions complexes

1. Trouvez toutes les solutions des équations suivantes :
   a) $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$
   b) $z^3 + 2z^2 + 9z + 18 = 0$
   c) $4z^3 - 4z^2 + z - 1 = 0$
   d) $2z^7 - 2z^4 + z = 0$
2. Écrivez les fonctions suivantes sous la forme $f = u + i\,v$.
   a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$
   b) $f(z) = |z|$
3. Démontrez les propriétés suivantes de l'exponentielle complexe :
   (a) $e^{z+2\pi i} = e^z$
   (b) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
   (c) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$
4. Démontrez que $|e^z| \leq e^{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$
5. Trouvez toutes les solutions (complexes) de l'équation $e^{iz} = i + 1$.
6. La règle $\dfrac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$ est-elle vraie pour tous $z, w \in \mathbb{C}$? Si oui, démontrez-la. Sinon, donnez un contrexemple (c'est-à-dire des valeurs de z et w pour laquelle elle n'est pas vérifiée).
7. Démontrez les formules suivantes :
   (a) $\sin z = \sin x \cosh y + i\, \cos x \sinh y$
   (b) $\cos z = \cos x \cosh y - i\, \sin x \sinh y$
8. Démontrez les identités trigonométriques suivantes :
   a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
   b) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
   c) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$
9. Déterminez si chacune des identités suivantes est vraie. Si c'est le cas, démontrez-la. Sinon, donnez une valeur de z pour laquelle elle n'est pas vérifiée.
   a) $\sin(-z) = -\sin z$
   b) $\cos(-z) = \cos z$
   c) $\cos(\bar{z}) = \overline{\cos z}$
   d) $\sin(\bar{z}) = \overline{\sin z}$
   e) $\cos(iz) = -\cos z$

f) $\sin(iz) = -i \sin z$.

10. Trouvez toutes les solutions (complexes) des équations suivantes :
    a) $\cosh z = 0$
    b) $\sinh z = 0$.
11. Trouvez toutes les solutions des équations suivantes
    a) $\cos(iz) + \sin(iz) = 1$
    b) $\cos z - \sin z = 2$
12. Démontrez les relation suivantes :
    a) $\sin(iz) = i \sinh z$
    b) $\cos(iz) = \cosh(z)$
    c) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
13. Montrez que
    a) $\sin(x + i\,y) = \sin x \cosh y + i\ \cos x \sinh y$
    b) $\cos(x + i\,y) = \cos x \cosh y - i\ \sin x \sinh y$
    c) $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$
    d) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$
14. Montrez que (contrairement au cas réel) $|\sin z|$ et $|\cos z|$ ne sont pas bornées, c'est-à-dire qu'elle peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes. *Indice : utilisez les résultats de l'exercice 13.*
15. Montrez que
    a) $\arctan z = \dfrac{i}{2} \ln\left(\dfrac{i+z}{i-z}\right)$
    b) $\operatorname{arcsinh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$
    c) $\operatorname{arccosh} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

    Ces formules correspondent aux branches principales des fonctions, qui sont égales aux fonctions usuelles pour $z \in \mathbb{R}$.
16. Exprimez les nombres suivants sous la forme $a + i\,b$.
    a) i^i
    b) $(1+i)^i$
    c) $\ln\left(-\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
    d) $\ln(2-2i)$
17. Trouvez des valeurs z et w pour lesquelles $\ln(zw) \neq \ln z + \ln w$, où ln désigne la branche principale du logarithme.

18. a) Montrez que l'égalité $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$ est vérifiée si z est un nombre réel positif.

    b) Donnez un exemple où l'égalité $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$ n'est <u>pas</u> vérifiée.

19. On sait que l'identité $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ n'est vraie qu'à un multiple de $2\pi i$ près. Donnez un exemple concret (c'est-à-dire des valeurs de α, β et z) où $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\beta}$.

20. Montrez que si $z = r^{i\theta}$ alors $z^i = e^{-\theta}[\cos(\ln(r)) + i\,\sin(\ln(r))]$.

21. Montrez que la fonction $f(z) = |z|$ est continue sur $\mathbb{C}$.

22. Montrez que la fonction $f(z) = e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$. *Indice : utilisez le résultat de l'exercice 4.*

23. En vous inspirant de l'exemple de la fonction logarithmique vu en classe, montrez que $f(z) = z^{3/2}$ est discontinue en tout point de l'axe des réels négatifs (bien qu'elle soit définie en ces points).

24. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Montrer que

$$\ln(z_1\, z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2) + i\, 2\, k\, \pi,$$

    où ln(...) désigne la branche principale du logarithme et $k \in \mathbb{Z}$ dépend de z_1 et z_2.

25. Montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\, e^{inx}\right) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2\, r\cos(x) + r^2},$$

    où $0 < r < 1$.

1.1 Réponses aux exercices sur les fonctions complexes

1. a) $0, 1, 1 \pm i$
   b) $-2, \pm 3\,i$
   c) $1, \pm\frac{1}{2}\,i$
   d) 0, $\frac{1}{2^{1/6}}\,(\cos(\pi/12) + i\,\sin(\pi/12))$, $\frac{1}{2^{1/6}}\,(\cos(9\pi/12) + i\,\sin(9\pi/12))$, $\frac{1}{2^{1/6}}\,(\cos(17\pi/12) + i\,\sin(17\pi/12))$, $\frac{1}{2^{1/6}}\,(\cos(\pi/12) - i\,\sin(\pi/12))$, $\frac{1}{2^{1/6}}\,(\cos(7\pi/12) + i\,\sin(7\pi/12))$, $\frac{1}{2^{1/6}}\,(\cos(15\pi/12) + i\,\sin(15\pi/12))$

2. a) $f(x + i\,y) = \frac{x}{x^2+y2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$
   b) $f(x + i\,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + i\,\cdot 0$

5. $\frac{1}{4}(2k-1)\pi + \frac{i}{2}\ln(2)$, $k \in \mathbb{Z}$

6. La règle n'est pas vraie pour tous les complexes

9. a) Vraie
   b) Vraie
   c) Vraie
   d) Vraie
   e) Fausse
   f) Fausse

10. Trouvez toutes les solutions (complexes) des équations suivantes :
    a) $\frac{\pi\,i}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$
    b) $k\pi\,i$, $k \in \mathbb{Z}$

11. a) $2k\pi\,i$, $\frac{\pi\,i}{4k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$
    b) $-\frac{\pi}{4}(8k+1) - i\,\ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

16. Exprimez les nombres suivants sous la forme $a + i\,b$.
    a) $e^{-\pi/2}$
    b) $e^{-\pi/4}\cos(\ln(2)) + i\,e^{-\pi/4}\sin(\ln(2))$
    c) $-\frac{2}{3}\pi\,i$
    d) $\frac{3}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}\,i$

2 Exercices sur la dérivée complexe et les fonctions analytiques

1. Calculez la dérivée de la fonction
$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$
à partir de la définition de la dérivée.

2. Montrez, en utilisant la définition de la dérivée, que la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point.

3. Déterminez si les fonctions suivantes sont analytiques ou non sur le domaine indiqué.
   a) $f(z) = |z|$, $\mathbb{C}$
   b) $f(z) = i|z^3|$, $\mathbb{C}$
   c) $f(z) = iz$, $\mathbb{C}$
   d) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
   e) $f(z) = z + 1/z$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
   f) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $\mathbb{C}$
   g) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$, $\mathbb{C}$
   h) $f(z) = \arg(z)$, $\mathbb{C}$
   i) $f(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$, $\mathbb{C}$
   j) $f(z) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
   k) $f(z) = z\,\mathrm{Im}(z^2) - \frac{2}{3}(\mathrm{Im}(z))^3 - \frac{2}{3}i\,(\mathrm{Re}(z))^3$, $\mathbb{C}$.

4. Soit f une fonction et $\bar{f}$ la fonction définie par $\bar{f}(z) = \overline{f(z)}$. Si f et $\bar{f}$ sont toutes deux analytiques, montrez que f est nécessairement une fonction constante

5. Trouvez toutes les fonctions complexes à valeurs réelles $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ qui sont analytiques.

6. Soit f une fonction analytique. Montrez que si $f'(z) = 0$ pour tout z alors la fonction f est constante.

7. Considérons la fonction f définie par $f(z) = |z|^2$.
   a) Montrez que f est dérivable en $z = 0$.
   b) Vérifiez que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites en $z = 0$.
   c) La fonction f est-elle analytique en $z = 0$? Justifiez votre réponse.

8. Trouvez toutes les valeurs de la constante k pour lesquelles la fonction $f(x+i\,y) = e^x(\cos(ky) + i\,\sin(ky))$ est analytique.
9. Montrez que la fonction $f(z) = 1/z$ est analytique en tout point de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.1 Réponses aux exercices sur la dérivée complexe et les fonctions analytiques

1. La dérivée est $\frac{2}{(z-1)^2}$

3. a) Non
   b) Non
   c) Oui
   d) Oui
   e) Oui
   f) Non
   g) Non
   h) Non
   i) Non
   j) Non
   k) Oui

7. Les fonctions constantes

9. c) Non

10. $k = 1$

3 Exercices sur l'intégration complexe et la formule de Cauchy

1. Évaluez $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z)\, dz$, où C est le segment reliant le point $1+i$ au point $3+2i$.

2. Évaluez $\displaystyle\int_C \bar{z}\, dz$, où C est l'arc de la parabole $y = x^2$ reliant le point 0 au point $1+i$.

3. Évaluez $\displaystyle\oint_{|z|=1} \mathrm{Re}(z^2)\, dz$.

4. Évaluez $\displaystyle\int_C \bar{z}^2\, dz$
   a) sur le cercle $|z| = 1$.
   b) sur le cercle $|z-1| = 1$.

5. Évaluez $\displaystyle\oint_C |z|^2\, dz$, où C est le carré de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$.

6. Évaluez $\displaystyle\int_C \bar{z}, dz$, où C est la courbe paramétrée par $z(t) = t^2 + it$, $0 \leq t \leq 2$.

7. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\int_C \bar{z}|z|\, dz$, où C est le demi-cercle défini par $|z| = 2$ avec $\mathrm{Re}(z) \geq 0$, parcouru du point $-2i$ au point $2i$.

8. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\int_C \frac{\bar{z}}{z-1}\, dz$, où C est le demi-cercle défini par $|z-1| = 1$ avec $\mathrm{Re}(z) \geq 1$, parcouru du point $1-i$ au point $1+i$.

9. Vérifiez que $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 0$ si C est un cercle n'entourant pas (et ne contenant pas) l'origine.

10. Évaluez $\displaystyle\int_C z^2\, dz$ où $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ et C_1 est le segment reliant $1+i$ à $2+i$, C_2 est le segment reliant $2+i$ à $3-4i$ et C_3 est le segment reliant $3-4i$ à $1-i$.

11. Évaluez $\displaystyle\oint_C (5z^4 - z^3 + 1)\, dz$.
    a) où C est le cercle $|z| = 1$.
    b) où C est le carré de sommets $(0,0), (1,0), (1,1)$ et $(0,1)$.

12. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\oint_C e^{z^2+1}\, dz$, où C est l'ellipse $|z-1| + |z+1| = 4$.

13. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\oint_C \sin(1+z^2)\, dz$, où C est le carré de sommets $1, i, -1$ et $-i$, parcouru dans le sens négatif.

14. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\int_C z^4 \sin(z^5)\, dz$, où C est le segment reliant le point $1-i$ au point $1+i$.

15. Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_C \frac{1}{z}\, dz$, où C est le segment reliant $-1-i$ à $-1+i$.

   a) Évaluez directement l'intégrale J.

   b) Une primitive de $1/z$ est $F(z) = \ln z$. Évaluez l'intégrale J en calculant $F(-1+i) - F(-1-i)$. Votre réponse sera différente de celle en a).

   c) Laquelle des deux réponses est la bonne ? Expliquez pourquoi.

16. Évaluez $\displaystyle\int_C z^3(1+z^4)^2, dz$, où $C = C_1 \cup C_2$, C_1 est le segment de 0 à $4-i$ et C_2 est le segment de $4-i$ à 1.

17. Évaluez $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4}\, dz$, où C est l'ellipse $4x^2 + (y-2)^2 = 4$.

18. Évaluez $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2n+1}}\, dz$, où n est un entier positif.

19. Évaluez $\displaystyle\oint_{|z-6|=4} \frac{z-1}{z-6}\, dz$.

20. Évaluez $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\, dz$.

21. Évaluez $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z-\pi i}\, dz$, où C est

   a) le cercle $|z-1| = 4$.

   b) l'ellipse $|z-2| + |z+2| = 6$.

22. Évaluez $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz$, où C est

   a) le rectangle de sommets $2 \pm i$ et $-2 \pm i$.

   b) le rectangle de sommets $\pm i$ et $2 \pm i$.

23. Évaluez $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^{iz}}{z^3}\, dz$.

24. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\oint_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z+i}\, dz$.

25. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\oint_C \frac{\sin(5z)}{z^2+4}\, dz$, où C est le cercle $|z-2i| = 1$.

26. Évaluez l'intégrale $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{z^2+1}\, dz$, où C est le cercle $|z-5i| = 5$.

27. Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{\cos(z^2)}{z+1}\,dz$, où C est le rectangle de sommets $0, 2, 2+i$ et i, parcouru dans le sens négatif.

28. Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$, où C est le cercle $|z+4i| = 4$.

29. Évaluez $\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z}\sin z}{z^2}\,dz$.

30. Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z}{(z-i)^2}\,dz$, où C est le cercle de rayon 2 centré au point i.

31. Évaluez l'intégrale $\oint_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^3}\,dz$ en utilisant la méthode de votre choix.

32. Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{z^4}{(z-i)^3}\,dz$, où C est le cercle $|z-i| = 2$.

33. Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z-\pi i)^4}\,dz$, où C est le cercle $|z+1| = 10$.

34. Évaluez l'intégrale $\oint_C \frac{\sin(z\pi)}{(z-1)^3}\,dz$, où C est le cercle $|z+1| = 10$.

35. Évaluez $\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$.

36. Évaluez $\oint_C \frac{2+3\sin(\pi z)}{z(z-10)^2},dz$, où C est le carré de sommets $3+3i, 3-3i, -3+3i$ et $-3-3i$ parcouru dans le sens horaire.

37. Évaluez $\oint_{|z|=1} \frac{(z^3+z+6)\sin(z^2)}{(z-2)^3(z-3)}\,dz$.

38. Soit C le cercle $|z| = 2$.

    a) Évaluez $\oint_C \frac{1}{z+1}\,dz$.

    b) Utilisez le résultat de a) pour montrer que

$$\oint_C \frac{(x+1)\,dx + y\,dy}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

    et

$$\oint_C \frac{(x+1)\,dy - y\,dx}{(x+1)^2+y^2} = 2\pi$$

39. Soit C la *cycloïde* paramétrée par $z(t) = [t - \sin(t)] + i[1-\cos(t)]$, $0 \le t \le 2\pi$ et soit

$$J_1 = \int_C (z-i)\,dz.$$

a) Décrivez de façon explicite deux méthodes différentes pour évaluer l'intégrale J_1.

b) À l'aide d'**une** des deux méthodes données en a), trouvez la valeur de J_1.

40. Soit C le cercle $|z-1|=1$ et

$$J = \oint_C \frac{1}{z^2-1}\,dz$$

a) Décrivez de façon explicite deux méthodes différentes pour évaluer l'intégrale J.

b) À l'aide d'**une** des deux méthodes données en a), trouvez la valeur de J.

41. Le polynôme $P(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5$ admet $z_1 = i$ comme racine. Trouvez toutes les autres racines de P.

42. Le polynôme $Q(z) = z^6 - 6z^5 + 16z^4 - 24z^3 + 25z^2 - 18z + 10$ admet $z_1 = i$ et $z_2 = 1+i$ comme racines. Trouvez toutes les autres racines de P.

43. Montrez que $z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{2\pi i/n}\right)\left(z - e^{4\pi i/n}\right)\cdots\left(z - e^{2(n-1)\pi i/n}\right)$.

44. Évaluer

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z\,\cos(z)}\,dz.$$

3.1 Réponses aux exercices sur la formule de Cauchy et l'intégration complexe

1. $4 + 2\,i$.
2. $1 + \frac{1}{3}\,i$
3. 0
4. a) 0 b) $4\pi\,i$
5. $-1 + i$
6. $10 - \frac{8}{3}\,i$
7. 16
8. $(\pi + 2)\,i$
10. $-\frac{4}{3}\,i$
11. a) 0 b) 0
12. 0
13. 0
14. $\frac{2}{5}\sin(4)\sinh(4)\,i$
15. a) $-\frac{\pi}{2}\,i$ b) $\frac{3\pi}{2}\,i$
16. $7/12$
17. $\pi/2$
18. $2\pi(-1)^n\,i/n!$
19. $10\pi\,i$
20. $4\pi\,i$
21. a) $-2\pi\,i$ b) 0
22. a) 0 b) $-1/2$
23. $-i\,\pi$
24. 0
25. $\frac{1}{2}\,i\pi\sinh(10)$
26. $-\pi$
27. 0
28. $\frac{\pi}{2}(-\cos(2) + \,i\sin(2))$
29. $2\pi\,i$

30. $2\pi(\cos(1)\sinh(1) + \sin(1)\cosh(1) + i(-\sin(1)\sinh(1) + \cos(1)\cosh(1)))$
31. $4\pi i$
32. $-12\pi i$
33. $\frac{8}{3}\pi i$
34. 0
35. $\frac{8}{3}\, i\pi e^{-2}$
36. $\frac{\pi}{25}i$
37. 0
38. a) $2\pi i$
39. $2\pi(\pi - i)$
40. πi
41. $2-i$, $2+i$, $-i$ (en plus de i)
42. $-i$, $1-i$, $2-i$, $2+i$ (en plus de i et $1+i$)

4 Exercices sur les séries de Laurent

1. Écrivez le développement de Taylor de

$$f(z) = \frac{z}{1-z^7}$$

en $z_0 = 0$. Quel est le rayon de convergence de la série ?

2. Si la fonction

$$f(z) = \frac{\cos(z)(e^z - 1)}{\sin(z)}$$

était développée en série de Taylor autour de 0, quel serait le rayon de convergence de la série ? Ne calculez pas la série.

3. Si la fonction

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

était développée en série de Taylor autour de 0, quel serait le rayon de convergence de la série ? Ne calculez pas la série.

4. Si la fonction

$$f(z) = \frac{z^2+1}{e^z+1}$$

était développée en série de Taylor autour du point $z_0 = 0$, quel serait le rayon de convergence de la série ? Ne calculez pas la série de Taylor.

5. Si la fonction

$$f(z) = \frac{z^2}{1+\sin(iz)}$$

était développée en série de Taylor autour du point $z_0 = 0$, quel serait le rayon de convergence de la série ? Ne calculez pas la série de Taylor.

6. Si la fonction

$$f(z) = \frac{z}{e^{\pi z} - 1}$$

était développée en série de Taylor autour de $z_0 = 3i$, quel serait le rayon de convergence de la série ? Ne calculez la série.

7. Donnez le développement de Taylor de

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2}$$

autour de $z_0 = 2$. Quel est le rayon de convergence de la série ?

8. Soit la fonction $g(z) = \dfrac{z^2}{\cos(1/z^2)}$.

   a) Montrez que la singularité de g en $z_0 = 0$ n'est pas isolée.

b) Expliquez pourquoi on ne peut pas développer g en série de Laurent en $z_0 = 0$.

9. Soit la fonction $g(z) = \sin(1/z^3)$

   a) Donnez le développement en série de Laurent de g autour de $z_0 = 0$. Pour quel domaine (un anneau) ce développement est-il valide ?

   b) Donnez explicitement les coefficients a_{-2}, a_{-1}, a_0 et a_1 de la série trouvée en a).

10. Donnez le développement de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1 - z^2}$$

valide pour $|z - 1| > 2$.

11. Donnez le développement de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{(z - \pi)^2}$$

valide pour $0 < |z - \pi| < \infty$.

12. Donnez le développement de Laurent de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2)}$$

valide pour $\sqrt{5} < |z - i| < \infty$.

13. Soit

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 4)}.$$

Donnez le développement de Laurent de g_2 valide sur l'anneau $1 < |z - 1| < 3$.

14. Donnez le développement de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z^2} \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ valide pour $|z| > 0$.

15. Soit $f(z) = \dfrac{z}{z + 2}$. Donnez le développement de Laurent de f valide sur les anneaux

   a) $|z| < 2$. (Que remarquez-vous ici ?)

   b) $|z| > 2$.

   c) $|z + 1| > 1$.

16. Écrivez le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z - 1)(2 - z)}$ valide pour

   a) $|z| < 1$.

   b) $|z - 1| > 1$.

   c) $1 < |z| < 2$.

   d) $0 < |z - 2| < 1$.

17. Soit $f(z) = \dfrac{z}{z-3}$. Donnez le développement de Laurent de f valide sur les anneaux
    a) $|z| < 3$. (Que remarquez-vous ici ?)
    b) $|z| > 3$.
    c) $|z - 2| > 1$.
18. Donnez le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ valide pour
    a) $|z| < 1$
    b) $1 < |z| < 2$
    c) $0 < |z - 2| < 1$
    d) $|z - 1| > 1$
19. Donnez le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(3-z)}$ valide pour
    a) $|z| < 1$
    b) $1 < |z| < 3$
    c) $0 < |z - 1| < 2$
    d) $|z + 1| > 4$

    Que pouvez-vous dire des séries trouvées en b) et en c) ?
20. Donnez le développement de Laurent de
$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z-1}$$
    valide pour $0 < |z - 1| < 1$.
21. Donnez le développement de Laurent de
$$f(z) = \frac{z^7}{(z-2)^3}$$
    valide pour $|z| > 2$. *Indice : dérivez deux fois une série géométrique.*
22. Selon la formule vue au cours, les coefficients de la série de Laurent de $h(z) = \dfrac{1}{z}$ en $z_0 = 0$ sont donnés par
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{h(w)}{w^{n+1}}\, dw,$$
    où C est un cercle centré à l'origine.

a) À partir de la formule ci-dessus, calculez le coefficient a_{-1} en évaluant directement l'intégrale (i.e. en calculant explicitement l'intégrale curviligne.)

b) Calculez ensuite le coefficient a_n pour $n \neq -1$.

c) Donnez la série de Laurent de h en 0. Que constatez-vous ?

4.1 Réponses aux exercices sur les séries de Laurent

1. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{7n+1}$, $R = 1$
2. π
3. 2π
4. π
5. $\pi/2$
6. 1
7. $-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$, $R = 1$

5 Exercices sur le calcul des résidus

1. Déterminez la nature des singularités (pôle, singularité essentielle, singularité apparente) de la fonction.

   a) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 1}{(z-1)^7(z-2)}$

   b) $f(z) = \dfrac{e^{1/(z-2)}}{e^z - 1}$

   c) $f(z) = \dfrac{(z^4 - 1)\sin(1/(z-i))}{(z+i)^2}$

   d) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$

   e) $f(z) = \dfrac{1}{\cos(1/z)}$

   f) $f(z) = e^{1/z}(z+i)$

   g) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$

   h) $f(z) = \dfrac{z^4 - 3z^3 - 3z^2 + 7z + 6}{z^2 - 4}$

   i) $f(z) = \cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   j) $f(z) = \dfrac{e^{-1/z}}{z\cos^2(z)}$

   k) $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{z^2\cos^2(z)}$

2. Déterminez la nature de la singularité $z_0 = 0$ pour la fonction dont le développement de Laurent pour $0 < |z - z_0| < \rho$ est donné.

   a) $z^{-3} + z^{-2} + \dfrac{1}{2}z^{-1} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24}z + \dfrac{1}{120}z^2 + \cdots$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$

3. Montrez que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ et que cette

singularité n'est pas isolée.

4. Démontrez le résultat suivant :

   Soit h une fonction analytique en z_0 et telle que z_0, où est une racine d'ordre m de h. Alors z_0 est un pôle d'ordre m de la fonction $f(z) = 1/h(z)$.

5. Montrez que z_0 est une singulartié apparente de f si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe (même si $f(z_0)$ n'existe pas).

6. Donnez le résidu de chacune des séries de l'exercice 2 ci-dessus.

7. Pour chacun des problèmes ci-dessous, déterminez la nature des singularités de la fonction à intégrer, puis évaluez l'intégrale à l'aide du théorème des résidus. Exprimez vos réponses sous la forme $a + ib$.

   a) $J_1 = \displaystyle\oint_{|z-i|=3} \frac{1}{z^2(z^2+9)}\, dz.$

   b) $J_2 = \displaystyle\oint_{|z+1|=10} \frac{e^{2z}}{z^{10}}\, dz.$

   c) $J_3 = \displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{\cos(z)}{\sin^2(z) - 1/2}\, dz.$

   d) $J_4 = \displaystyle\oint_{C} z^3 \exp\left(\frac{1}{2z^2}\right) dz$, où C est une courbe fermée simple entourant l'origine.

   e) $J_5 = \displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin(z^2)}{z^2}\, dz$

8. Donnez le résidu des fonctions au point indiqué.

   a) $f(z) = \dfrac{e^{2\pi}}{(z+1)^4}$, en $z_0 = -1$

   b) $f(z) = \dfrac{2^z}{(z+1)^4}$, en $z_0 = -1$

   c) $f(z) = \dfrac{z}{\cos^2 z}$, en $z_0 = \pi/2$

   d) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z^4-1)}$, en $z_0 = 0$

   e) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin^2 z}$, en $z_0 = 0$

   f) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, en $z_0 = 0$

   g) $f(z) = \dfrac{4iz}{\sin z}$, en $z_0 = \pi$

h) $f(z) = z^3 \cos^2(1/z)$, en $z_0 = 0$

9. Calculez le résidu de la fonction $f(z) = \dfrac{1}{(z+4)(z-1)^3}$ en chacune de ses singularités.

10. Soit $f(z) = g(z)/h(z)$, où g est une fonction analytique en a. Si h est analytique en a et si ce point est une racine simple de h, montrez que
$$\operatorname{Res}(f; z = a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

11. Montrez que si z_0 est une singularité apparente de f alors $\operatorname{Res}(f; z = z_0) = 0$.

12. Évaluez les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\oint_C z^2 e^{1/(z-1)}\, dz$, où C est le cercle $|z - i| = 2$.

b) $\displaystyle\oint_{|z|=1} z \sin^2(1/z)\, dz$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{\cos z}\, dz$

d) $\displaystyle\oint_{|z|=1} z^3 e^{1/z}\, dz$

e) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}\, dz$

f) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos^2(tz)}{z^3}\, dz$, où $t > 0$.

g) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{\sinh z}\, dz$, où C est le cercle $|z - i\pi/2|$.

h) $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh(3z)}{z(z^2-9)}\, dz$, où C est une courbe fermée entourant les points 0 et -3 mais pas le point 3.

i) $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z(z^2+4)^2}\, dz.$

j) $\displaystyle\oint_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$, où C est une courbe fermée simple entourant l'origine.

k) $\displaystyle\oint_{|z-i|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}\, dz$

l) $\displaystyle\oint_{|z|=5} \frac{1}{\cos z + 1}\, dz$

13. Évaluez les intégrales suivantes.
 a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{k+\cos\theta}\,d\theta$, où $k>1$
 b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{17-8\cos\theta}\,d\theta$
 c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta$
 d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos\theta+c\sin\theta}\,d\theta$, où a,b,c sont des nombres réels tels que $a>0$ et $a^2>b^2+c^2$.
14. Évaluez $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta$. *Indice : calculer* $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz$ *de deux façons différentes.*
15. Montrez que
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{2\pi}{ab},$$
 où $a,b>0$.
16. Montrez que
$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$
 pour $n\in\mathbb{N}$. *Indice : utilisez la formule du binôme* $(a+b)^m\ \sum_{j=0}^m \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} a^j b^{m-j}$.
17. Utilisez l'inégalité du triangle pour montrer que
$$||z|-|w||\le|z-w|.$$
18. Évaluez les intégrales suivantes.
 a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$
 b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$
 c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$
 d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$
 e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}\,dx$
 f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(sx)}{x^2+1}\,dx$, où $s<0$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x-i)^{30}}\,dx$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos t}{1+t^4}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(a\,t)}{(1+t^2)^2}\,dx,\ a\in\mathbb{R}.$ Réponse : $\displaystyle\frac{\pi}{4}\,(1+|a|)\,e^{-|a|}.$

19. Évaluez l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ en suivant les étapes ci-dessous.

a) Posez $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ et évaluez

$$\oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,dz,$$

où

$$\Gamma_{R,\epsilon} = [\epsilon, R] \cup C_R \cup [-R, -\epsilon] \cup C_\epsilon\,,$$

avec $0 < \epsilon < R$, et où

- $[\epsilon, R]$ est le segment de l'axe des réels allant de ϵ à R.
- C_R est le demi-cercle défini par $|z| = R$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.
- $[-R, -\epsilon]$ est le segment de l'axe des réels allant de $-R$ à $-\epsilon$
- C_ϵ est le demi-cercle défini par $|z| = \epsilon$, $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

b) Exprimez l'intégrale $\oint_{\Gamma_{R,\epsilon}} f(z)\,dz$ comme une somme de quatre intégrales complexes et déterminez ce que devient chaque intégrale lorsque $R \to \infty$.

c) Considérez l'expression obtenue à l'étape b) en prenant la limite lorsque $R \to \infty$. Regroupez les intégrales de cette expression de façon judicieuse puis prenez la limite lorsque $\epsilon \to 0$.

d) Trouvez la valeur de l'intégrale de Dirichlet en utilisant les résultats obtenus aux étapes a) et c).

6 Exercices sur les systèmes linéaires en temps discret

1. Soit le système défini par l'équation aux différences

$$y(n) = a\, y(n-1) + x(n) - x(n-1),\ n \in \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante.

a) Utiliser la méthode des itérations pour montrer que

$$\begin{aligned} y(n) &= T(x(n)), \\ &= a^{n+1} y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} \left(x(k) - x(k-1) \right). \end{aligned}$$

Ce système est-il causal ? Justifier votre réponse.

b) Montrer que le système est linéaire seulement si $y(-1) = 0$, ce qu'on supposera vrai dans la suite.

c) Montrer qu'il suffit de supposer que $x(n) = 0$ pour $n < 0$ pour que le système soit stationnaire, c.a.d. que $T(x(n-m)) = y(n-m)$ pour tout $n \geq 0$ et $0 \leq m \leq n$.

d) Montrer que la réponse impulsionnelle h du système est donnée par

$$h(n) = \begin{cases} a^n - a^{n-1} \text{ si } & n \geq 1, \\ 1 \text{ si } & n = 0, \end{cases}$$

et vérifier que $T(x(n)) = (h * x)(n)$.

e) Montrer que ce système stable si $|a| < 1$.

f) Montrer que la fonction de transfert est donnée

$$H(z) = \frac{z-1}{z-a}.$$

g) Montrer que si $x(n) = 0$ pour tout $n < 0$, alors

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(x(n-k) - x(n-k-1) \right).$$

h) Soient $\ell(\mathbb{Z})$ et $\ell(\mathbb{N})$ les espaces des suites infinies à valeurs complexes définies sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ respectivement (donc de la forme $(..., x(-1), x(0), x(1), ...)$ et $(x(0), x(1), x(2), ...)$). Le résultat du g) ci-dessus définit un système linéaire stationnaire $\tilde{T}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell(\mathbb{Z}) &\to \ell(\mathbb{Z}) \\ x(n) &\mapsto y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \left(x(n-k) - x(n-k-1) \right). \end{aligned}$$

Soulignons que les opérateurs T et $\tilde{T}$ ne diffèrent que par leur demaine de définition puisque

$$\begin{aligned} T : \ell(\mathbb{N}) &\to \ell(\mathbb{N}) \\ x(n) &\mapsto y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \left(x(n-k) - x(n-k-1)\right). \end{aligned}$$

Si on définit la suite $x_+ : \ell(\mathbb{N}) \to \ell(\mathbb{N})$ par $x_+(n) = x(n)$ pour $n \geq 0$ (x et x_+ diffèrent par leur domaine de définition mais ont les mêmes valeurs pour $n \geq 0$), alors le SLS $\tilde{T}$ satisfait $\tilde{T}(x(n)) = T(x_+(n)),\ n \geq 0$, pour toute suite $x(n) \in \ell(\mathbb{Z})$ telle que $x(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

Montrer que les suites $z^n \in \ell(\mathbb{Z})$, où $z \in \mathbb{C}$ est une constante, satisfont

$$\tilde{T}(z^n) = H(z)\, z^n \text{ pour } |z| > |a|,$$

où $H(z)$ est la fonction de transfert. On dit alors que z^n est une fonction propre de $\tilde{T}$, et que $H(z)$ est la valeur propre associée.

2. Pour le système de différence avant, défini par $T(x(n)) = x(n+1) - x(n)$
   a) Montrez la linéarité
   b) Montrez la stationnarité
   c) Calculez la réponse impulsionnelle
   d) Vérifiez que $T(x(n)) = (h_T * x)(n)$
   e) Le système est-il causal ? Est-il stable ?
   f) Déterminez la fonction de transfert

3. Pour le système de moyenne mobile défini par $T(x(n)) = \frac{1}{M+N+1} \sum_{k=-M}^{N} x(n-k)$, $M, N \in \mathbb{N}$ et $M \leq N$
   a) Montrez la linéarité
   b) Montrez la stationnarité
   c) Calculez la réponse impulsionnelle
   d) Vérifiez que $T(x(n)) = (h_T * x)(n)$
   e) Le système est-il causal ? Est-il stable ?
   f) Déterminez la fonction de transfert

4. Démontrez les propriétés suivantes du produit de convolution :

a) $f * g = g * f$ (commutativité)

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (associativité)

c) $f * \delta = f$ (élément neutre)

d) $(x * u)(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

5. Calculez la convolution $(f * g)(n)$ si

a) $f(n) = \alpha^n u(n)$, $g(n) = \beta^n$; pour quelles valeurs de α et β la convolution est-elle définie ?

b) $f(n) = u(n-1)$ et $g(n) = n\, u(n)$

6. Considérons un SLS discret dont la réponse impulsionnelle est $h(n) = u(n)$, où u est la fonction échelon.

a) Utilisez la convolution pour calculer la réponse $y(n)$ du système au signal $x(n)$ si

(i) $x(n) = u(n-1)$

(ii) $x(n) = \delta(n-1) + \delta(n+1)$

(iii) $x(n) = u(n+N) + u(n-N)$, où $N \in \mathbb{N}$.

b) Déterminez la fonction de transfert du système.

7. Considérons un SLS discret dont la réponse impulsionnelle est $h(n) = u(n)\alpha^n$, où u est la fonction échelon et $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Le système est-il causal ?

b) Pour quelles valeurs de α le système est-il stable ?

c) Utilisez la convolution pour calculer la réponse $y(n)$ du système au signal $x(n)$ si

(i) $x(n) = u(n)$

(ii) $x(n) = \dfrac{(-1)^n \alpha^n}{n}$, pour $n > 0$ ($x(0) = 0$), où $\alpha \in \mathbb{C}$; quelle est $\lim_{n\to\infty} y(n)$ dans ce cas ?

d) Déterminez la fonction de transfert du système.

6.1 Réponses aux exercices sur systèmes linéaires en temps discret

1.

2. c) $h_T(n) = \delta(n+1) - \delta(n)$ e) non ; oui f) $H(z) = z - 1$

3. c) $h_T(n) = \frac{1}{M+N+1}(u(n+M) - u(n-N) = \frac{1}{M+N+1}\begin{cases} 1 & \text{si } -M \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ e) non ; oui f) $H(z) = \sum_{k=-M}^{N} z^{-k}$

5. a) $(f * g)(n) = \frac{\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}$ si $|\alpha| < |\beta|$ b) $(f * g)(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$

6. a) (i) $y(n) = n$

   (ii) $y(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq n < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   (iii) $y(n) = \begin{cases} 2N+1 & \text{si } n \geq N \\ N+n+1 & \text{si } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   b) $H(z) = \frac{z}{z-1}$ pour $|z| > 1$

7. a) Oui

   b) Stable si $|\alpha| < 1$

   (i) $y(n) = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

   (ii) $y(n) = \alpha^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \alpha^k}{k} \Rightarrow \alpha^n \ln(1/2)$ lorsque $n \to \infty$.

   c) $H(z) = \frac{z}{z-\alpha}$

7 Exercices sur la transformée en z

1. Calculez la transformée en z de chacune des fonctions suivantes.

   a) $f(n) = n$

   b) $f(n) = n^2 + 1$

   c) $f(n) = \dfrac{1}{2n+1}$

   d) $f(n) = 1 - (-5)^n$

   e) $f(n) = ne^{-4n}$

   f) $f(n) = e^{-n} - u(n-1) + e^{-(n-1)}u(n-1)$

   g) $f(n) = n^2 c^n$

   h) $f(n) = \dfrac{1}{n}$ pour $n > 0$ et $f(0) = 0$

   i) $f(n) = \dfrac{c^n}{n!}$

   j) $f(n) = 2n - 3(n-1)u(n-1)$

   k) $f(n) = r^n \cos(an)$

   l) $f(n) = r^n \sin(an)$

   m) $f(n) = n^3 + 1$

   n) $f(n) = (n-2)^2 u(n-2)$

   o) $f(n) = 3^n n^2$

2. Démontrez les propriétés suivantes de la transformée en z. On note $F(z) = Z(f(n))$.

   a) $Z\left(n(n+1)f(n)\right) = z^2 F''(z)$

   b) $Z\left(n^2 f(n)\right) = zF'(z) + z^2 F''(z)$

   c) $Z\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kf(k)\right) = -\dfrac{z^2}{z-1}F'(z)$

3. Calculez la transformée en z inverse des fonctions suivantes.

   a) $F(z) = \dfrac{2}{z^2(z+2)^2}$

   b) $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$

   c) $F(z) = \dfrac{z^2}{z^2 - z + 1}$

   d) $F(z) = \dfrac{2z^3}{(z-2)^3}$

e) $F(z) = \dfrac{z^2}{(z-c)^4}$

f) $F(z) = \dfrac{z^2-3z}{(z+1)^2}$

g) $F(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^2(z-2)}$

h) $F(z) = \dfrac{z+5}{z(z-5)^2}$

i) $F(z) = \dfrac{3z^2-4}{z(z-2)^2}$

j) $F(z) = \dfrac{z^2+2}{z(2z+1)^2}$

4. Résolvez les équations de récurrence suivantes à l'aide de la tranformée en z.

   a) $f(n+1) - 3f(n) = 4$ avec $f(0) = 1$

   b) $f(n+1) - 3f(n) = 3^n$ avec $f(0) = 2$

   c) $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = n^2$ avec $f(0) = 3$ et $f(1) = 1$

   d) $2f(n+3) - 3f(n+2) + f(n)$avec $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ et $f(2) = -4$

   e) $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ ($f(n)$ *est la suite de Fibonacci.*)

   f) $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 1$ avec $F90) = 1$ et $f(1) = f(2) = 0$

   g) $f(n+4) - 4f(n+3) + 6f(n+2) - 4f(n+1) + f(n) = n$ avec $f(0) = f(3) = 0$ et $f(1) = f(2) = 1$

   h) $f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0$ avec $f(0) = A$ et $f(1) = B$

   i) $f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = n2^n$ avec $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$

   j) $f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n) = 10^n$ avec $f(0) = 0, f(1) = 1$

5. Considérez un système linéaire discret décrit par l'équation de récurrence suivante :

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = x(n+1) - x(n).$$

   a) Trouvez la fonction de transfert du système.

   b) Trouvez la réponse du système au signal entrant $x(n) = 2^n u(n)$.

   Rappel : $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

6. Considérez un système linéaire discret modélisé par l'équation

$$2y(n+2) - 3y(n+1) + y(n) = x(n+2) - x(n+1).$$

a) Déterminez la fonction de transfert de ce système.
b) Déterminez la réponse impulsionnelle du système.
c) Utilisez une convolution pour trouver la réponse $y(n)$ du système au signal entrant $x(n) = u(n)$. Que devient $y(n)$ lorsque $n \to \infty$?

7. Considérez un système linéaire discret modélisé par l'équation

$$y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = x(n+1) + 4x(n).$$

a) Déterminez la fonction de transfert de ce système.
b) Déterminez la réponse impulsionnelle du système.
c) Utilisez une convolution pour trouver la réponse du système au signal entrant $x(n) = 2^n u(n)$.

Indice : $\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{a}{(a-1)^2}\,(a^n[(n+1)(a-1)-1]+1)$ *et* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

7.1 Réponses aux exercices sur la transformée en z

1. a) $\frac{z}{(z-1)^2}$
   b) $\frac{z(z^2-z+2)}{(z-1)^3}$
   c) $\sqrt{z}\operatorname{arctanh}(1/\sqrt{z})$
   d) $\frac{6z}{(z-1)(z+5)}$
   e) $\frac{ze^{-4}}{(z-e^{-4})^2}$
   f) $\frac{ez^2-ez-e+1}{(z-1)(ez-1)}$
   g) $\frac{cz(z+c)}{(z-c)^3}$
   h) $\ln(z/(z-1))$, $|z|>1$
   i) $e^{c/z}$
   j) $\frac{2z-3}{(z-1)^2}$
   k) $\frac{(z-r\cos(a))z}{z^2-2rz\cos(a)+r^2}$
   l) $\frac{rz\sin(a)}{z^2-2rz\cos(a)+r^2}$
   m) $\frac{4z^2(z^2-2z+7)}{(z-1)^4}$
   n) $\frac{z+1}{z(z-1)^3}$
   o) $\frac{3z(z+3)}{(z-3)^3}$
3. a) $(-1)^n(n-3)2^{n-3}u(n-3)$
   b) $\frac{1}{2}(-1)^n(2^n-2)u(n-1)$
   c) $\cos(\pi n/3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\pi n/3)$
   d) $2^n(n^2+3n+2)$
   e) $\frac{1}{6}n(n^2-1)c^{n-2}$
   f) $(-1)^n(4n+1)$
   g) $2^{n+2}-n-3$
   h) $\frac{1}{25}(2n5^n-3\cdot 5^n)u(n-1)$
   i) $2^n(n+1)u(n-1)$
   j) $(-1)^{n+1}n2^{-(n+1)}$
4. a) $3^{n+1}-2$
   b) $3^n(2+\frac{1}{3}n)$
   c) $\frac{1}{12}(n^4-4n^3+5n^2-26n+36)$

d) $-\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{3} - 3n$

e) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

f) $\frac{1}{6}(n^3 - 7n + 6)$

g) $\frac{1}{120}n(n-3)(n^3 - 7n^2 + 14n - 68)$

h) $A(1-n) + Bn$

i) $\frac{31}{27}(-1)^n - \frac{4}{27}2^n + \frac{1}{9}n2^n - \frac{2}{9}n$

j) $\frac{1}{64}10^n - \frac{1}{64}2^n - \frac{9}{16}n2^n$

5. a) $\frac{1}{z-2}$

   b) $n2^{n-1}u(n)$

6. a) $\frac{z}{2z-1}$

   b) $\frac{1}{2^{n+1}}u(n)$

   c) $\frac{1}{2^{n+1}} + 1 \to 1$

7. a) $\frac{z+4}{(z-2)^2}$

   b) $2^n\left(\frac{3}{2}n - 1\right)u(n)$

   c)

8 Exercices sur la distribution delta de Dirac

1. Montrez que la suite de fonctions définie par $\phi_n(t) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2t^2}$ vérifie la propriété
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) f(t)\, dt = f(0)$$
pour toute fonction continue f.
2. Montrez que $\delta(a\,t) = \dfrac{1}{|a|}\,\delta(t)$ (au sens des distributions) pour tout $a > 0$.
3. Montrez que $\delta(-t) = \delta(t)$ (au sens des distributions).
4. Montrez que $\delta(t^2 - a^2) = \dfrac{1}{2a}[\delta(t+a) + \delta(t-a)]$ (au sens des distributions) pour tout $a > 0$.
5. Montrez que $\delta(t) = -t\,\delta'(t)$ (au sens des distributions) .
6. Soit $t_0 > 0$. Donnez un sens à l'intégrale
$$J = \int_a^{\infty} \delta(t - t_0) f(t)\, dt$$
puis montrez que $J = f(t_0)$ si $a < t_0$ et $J = 0$ si $a > t_0$.
7. Un *peigne de Dirac* est une distribution de la forme
$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT),$$
où T est un nombre réel positif. Une telle distribution sert à modéliser une suite d'impulsions à des intervalles de T.

   Calculez la transformée de Laplace du peigne de Dirac suivant :
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n).$$
   Donnez votre réponse sous la forme la plus simple possible. Pour quelles valeurs de s la transformée est-elle définie ?

   Réponse : $\frac{e^s}{e^s - 1}$ pour $\mathrm{Re}(s) > 0$
8. Montrez que la suite de fonctions définie par $\delta_n(t) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2t^2}$, où $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, satisfait les propriétés
$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(t) = 0,\ t \neq 0,$$
et
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_n(t)\, dt = 1,$$
où $a < 0$ et $b > 0$ sont des constantes.

9. Soit δ_n un modèle du delta de Dirac qui satisfait $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \delta_n(x)\,dx = 1$ pour tout $a < 0$ et $b > 0$. On associe à δ_n une approximation u_n de la fonction échelon u définie par $u_n(x) := \int_{-\infty}^{x} \delta_n(t)\,dt$. La fonction u_n satisfait $u_n \to u$ si $n \to \infty$. On définit

$$I_n := \int_a^b \delta_n(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

où φ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui satisfait $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que

$$I_n = u_n(b)\,\varphi(b) - u_n(a)\,\varphi(a) - \int_a^b u_n(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

b) Déduire du a) que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \varphi(0).$$

9 Exercices sur les systèmes en temps continu

1. Soit le système défini par l'équation différentielle

$$y' - a\,y = x(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante.

a) Utiliser la méthode du facteur intégrant pour montrer que

$$\begin{aligned} y(t) &= T(x(t)), \\ &= y(0)\,e^{a\,t} + \int_0^t e^{a\,(t-\theta)} x(\theta)\,d\theta. \end{aligned}$$

Ce système est-il causal ? Justifier votre réponse.

b) Montrer que le système est linéaire seulement si $y(0) = 0$, ce qu'on supposera vrai dans la suite.

c) Montrer qu'il suffit de supposer que $x(t) = 0$ pour $t < 0$ pour que le système soit stationnaire, c.a.d. que $T(x(t-\tau)) = y(t-\tau)$ pour tout $t \geq 0$ et $0 \leq \tau \leq t$.

d) On définit l'opérateur $\tilde{T}$ par

$$\tilde{T}(x(t)) = \int_{-\infty}^t e^{a\,(t-\theta)} x(\theta)\,d\theta,$$

qui agit sur des fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors que T agit sur des fonctions $x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$. Si on définit la fonction $x_+(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $x_+(t) = x(t)$ pour $t \geq 0$ (x et $x+$ diffèrent par leur domaine de définition mais leurs valeurs sont égales pour $t \geq 0$), alors on a l'identité $\tilde{T}(x(t)) = T(x_+(t)),\ t \geq 0$, pour toute fonction $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x(t) = 0$ pour $t < 0$. On peut vérifier que $\tilde{T}$ est aussi linéaire et stationnaire.

Montrer que la réponse impulsionnelle h de l'opérateur $\tilde{T}$ est donnée par

$$h(t) = e^{a\,t}\,u(t),$$

où u désigne la fonction échelon, puis vérifier que $(h * x)(t) = \tilde{T}(x(t))$.

e) Montrer que les fonctions $e^{s\,t}$, où $s \in \mathbb{C}$ est une constante, satisfont

$$\tilde{T}(e^{s\,t}) = H(s)\,e^{s\,t},$$

où $H(s)$ est la transformée de Laplace de h. On dit que $e^{s\,t}$ est une fonction propre de $\tilde{T}$ et que $H(s)$ est la valeur propre associé.

10 Exercices sur la transformée de Laplace

1. Montrez que la transformée de Laplace est linéaire, c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\} = a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}.$$

2. Montrez que $\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$, où a est une constante.
3. Montrez que $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)$.
4. Montrez que $\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$. Prenez pour acquis qu'il est possible d'interchanger les opérations de dérivation et d'intégration si nécessaire.
5. Montrez que si f est de type exponentiel α et g est de type exponentiel β alors fg est de type exponentiel $\alpha+\beta$.
6. Sans la calculer explicitement, déterminez pour quelles valeurs de s la transformée de Laplace $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$ est définie.

   a) $f(t) = e^{-10t}$
   b) $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$
   c) $f(t) = \dfrac{t^2}{t+1}$
   d) $f(t) = e^{\sqrt{t}}$
   e) $f(t) = t5^t$
   f) $f(t) = t^k 2^t$, où k est un entier positif
   g) $f(t) = t^2 + e^{2t}$
   h) $f(t) = t\sin$

7. Utilisez les propriétés de la transformée de Laplace ainsi que les formule pour les transformées usuelles pour calculer la transformée inverse des fonction suivantes.

   a) $F(s) = \dfrac{e^{-s/2}}{s} + \dfrac{e^{-2s}}{s+4}$
   b) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$
   c) $F(s) = \dfrac{5}{(s-5)^5}$
   d) $F(s) = \dfrac{s}{s^2+9} + \dfrac{1}{(s^2+9)^2}$
   e) $F(s) = \dfrac{1}{s^3} - \dfrac{2}{s(s^2-1)}$

f) $F(s) = \dfrac{s^2}{(s-1)^2(s+1)}$

8. Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$y''(t) + 4y(t) = tu(t), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

9. Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$y''(t) - y(t) = \cos t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

10. Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = u(t)e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

11. Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$y''(t) + y'(t) = u(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

12. Résolvez l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformée de Laplace :

$$y''(t) - 4y(t) = 1 + \delta(t-4), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

13. Trouvez la fonction de transfert correspondant aux équations différentielles suivantes. Supposez que toutes les conditions initiales sont nulles.

    a) $y''(t) + y'(t) = x(t)$
    b) $y''(t) - y(t) = x'(t)$ Rép. : $\frac{s}{s^2-1}$
    c) $y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2x(t) - x'(t)$ Rép. : $\frac{2-s}{(s^2-1)(s+2)}$

14. Déterminez la réponse impulsionnelle pour les équations de l'exercice précédent.

    a) $y''(t) + y'(t) = x(t)$
    b) $y''(t) - y(t) = x'(t)$
    c) $y'''(t) + 2y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 2x(t) - x'(t)$

15. Démontrez les propriétés suivantes de la convolution :

    a) $f * \delta = f$.
    b) $f * g = g * f$.
    c) $f * (g * h) = (f * g) * h$.

16. Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez la convolution de f avec elle-même, c'est-à-dire $(f * f)(t)$. Esquissez aussi le graphe de la fonction $f * f$.

17. Soit les fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

a) Calculez la convolution $f * g$ à partir de la définition.

b) Calculez la convolution $f * g$ à l'aide du théorème de convolution pour la transformée de Laplace.

c) Laquelle des deux méthodes vous semble la plus simple ?

18. Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculez la convolution $(f * u_1)(t)$, où $u_1(t) = 1$ si $t > 1$ et 0 sinon, de deux façons :

a) À partir de la définition de la convolution.

b) En utilisant le théorème de convolution pour la transformée de Laplace.

c) Esquissez les graphes de f, u_1 et $f * u_1$ sur un même système d'axes.

19. **Une preuve très simple du théorème de convolution pour la transformée de Laplace (TL) :** Considérons un système linéaire stationnaire (SLS) causal qui agit sur des signaux $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $x(t) = 0$ pour $t < 0$. La sortie $y(t)$ du système prend donc la forme $y(t) = (x * h)(t)$, où h est la réponse impulsionnelle du SLS, c'est-à-dire

$$y(t) = \int_0^\infty x(\theta)\, h(t-\theta)\, d\theta.$$

En appliquant la transformée de Laplace (TL) à cette identité et en utilisant sa linéarité, on obtient directement

$$Y(s) = \int_0^\infty x(\theta)\, \mathcal{L}(h(t-\theta))\, d\theta,$$

où $Y(s) := \mathcal{L}(y(t))$.

a) Montrer que $\mathcal{L}(h(t-\theta)) = e^{-s\theta} H(s)$, où $H(s) := \mathcal{L}(h(t))$.

b) En déduire que $Y(s) = H(s)\, X(s)$.

20. Calculez la transformée de Laplace inverse de

$$F(s) = e^{-s} + \frac{e^{-2s}}{s-2} + \frac{s}{(s-2)^2}.$$

21. On considère un système linéaire stationnaire modélisé par l'équation différentielle

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t).$$

Déterminez la réponse du système au signal entrant $x(t) = e^{-t}u(t)$.

22. On considère un système linéaire stationnaire modélisé par l'équation différentielle de l'exercice 13 a). Déterminez la réponse du système au signal entrant $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

23. On considère un système linéaire stationnaire modélisé par l'équation différentielle de l'exercice 13 b). Déterminez la réponse du système au signal entrant $x(t) = e^{-t}u(t)$.

24. On considère un système linéaire stationnaire modélisé par l'équation différentielle de l'exercice 13 c). Déterminez la réponse du système au signal entrant $x(t) = u(t)$.

25. On considère un système linéaire stationnaire dont la fonction de transfert est

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + C},$$

où C est une constante réelle. On dit que le système est *stable* si sa réponse impulsionnelle tend à zéro lorsque $t \to \infty$.

Déterminez toutes les valeurs de C pour lesquelles le système est stable.

10.1 Réponses aux exercices sur la transformée de Laplace

6. a) $\mathrm{Re}(s) > -10$
   b) $\mathrm{Re}(s) > 0$
   c) $\mathrm{Re}(s) > 0$
   d) $\mathrm{Re}(s) > 0$
   e) $\mathrm{Re}(s) > \ln(5)$
   f) $\mathrm{Re}(s) > \ln(2)$
   g) $\mathrm{Re}(s) > 2$
   h) $\mathrm{Re}(s) > 0$
7. a) $u(t-1/2) + u(t-2)e^{-4t+8}$
   b) $2e^{-2t} - e^{-t}$
   c) $\frac{5}{24}t^4e^{5t}$
   d) $\frac{1}{54}\sin(3t) - \frac{1}{18}\cos(2t)(t-18)$
   e) $\frac{1}{2}t^2 + 2 - \cosh t$
   f) $\frac{1}{4}\left(e^{-t} + e^t(2t+3)\right)$
8. $\frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin(2t)$
9. $\frac{1}{2}(\cosh t - \cos t)$
10. $\frac{1}{3}(e^{-2t} - \cosh t + 2\sinh t)$
11. $2e^{-t} + t - 1$
12. $y(t) = \frac{1}{2}\sinh(2t-8)u(t-4) + \frac{1}{4}\cosh(2t) - \frac{1}{4}$
13. a) $\frac{1}{s(s+1)}$
    b) $1 - e^{-t}$
    c) $\cosh t$
    d) $\frac{1}{3}(4e^{-2t} - 4\cosh t + 5\sinh t)$
15. $(f*f)(t) = (2+t)[u(t+2) - u(t)] + (2-t)[u(t) - u(t-2)]$
16. $(f*g)(t) = (1-e^{-t})[u(t) - u(t-1)] + (e^{1-t} - e^{-t})u(t-1)$
17. $(f*u_1)(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3[u(t-1) - u(t-2)] + \frac{1}{3}u(t-2)$
19. $\delta(t-1) + (2t+1)e^{2t} + e^{2t-4}u(t-2)$
20. $(t-1)e^{-t} + e^{-2t}$
21. $(u(t) - u(t-1)(e^{-t} + t - 1) + u(t-1)(e^{-t} - e^{1-t} + 1)$

22. $\frac{1}{4}(e^{2t}+2t-1)e^{-t}u(t)$
23. $\frac{1}{6}u(t)(e^{t}+9e^{-t}-4e^{-2t}-6)$
24. $C>0$

11 Exercices sur les séries de Fourier

1. Soit f et g deux fonctions de période $2L$ qui satisfont aux conditions du théorème de Dirichlet.

   a) Montrez que
   $$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\overline{d_n},$$
   où c_n et d_n sont les coefficients de la série de Fourier complexes de f et g respectivement. Utiliser l'orthogonalité des fonctions $e_n(x) := e^{in\pi x/L}$, soit
   $$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e_n^*(x)e_m(x)dx = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   b) Montrez comment on peut déduire l'identité de Parseval du résultat prouvé en a).

2. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]-L,L[$. On considère la série trigonométrique
   $$s_N(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\cos(n\pi x/L) + \beta_n\sin(n\pi x/L).$$
   Montrez que la distance entre les fonctions f et s_N, définie par
   $$\int_{-L}^{L} [f(x)-s_N(x)]^2\,dx,$$
   est minimale lorsque les coefficients α_n et β_n sont les coefficients de Fourier de f.

   Vous utiliserez les conditions d'orthogonalité
   $$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos(n\pi x/L)\cos(m\pi x/L) = \delta_{n,m},$$
   $$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin(n\pi x/L)\sin(m\pi x/L) = \delta_{n,m},$$
   où δ désigne le delta de Kronecker ($\delta_{n,m}=0$ si $n\neq m$ et $\delta_{n,n}=1$).

3. Soit $\hat{s}_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de f. Montrez que $f - \hat{s}_N$ est orthogonale à toute combinaison linéaire des fonctions $\cos(n\pi x/L)$ et $\sin(n\pi x/L)$ pour $n = 0, .., N$. Autrement dit, montrez que

$$\langle f - \hat{s}_N, s_N \rangle := \int_{-L}^{L} [f(x) - \hat{s}_N(x)] s_N(x)\, dx = 0.$$

   Remarque : Ceci montre que $\hat{s}_N$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace engendré par les fonctions $\cos(n\pi x/L)$ et $\sin(n\pi x/L)$ pour $n = 0, .., N$.

4. On définit une onde carrée en prolongeant de façon périodique la fonction f définie sur $]-\pi, \pi[$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

   a) Déterminez la série de Fourier de f sous forme réelle.

   b) Déterminez la série de Fourier de f sous forme complexe.

   c) Vers quelle valeur les séries trouvées en a) et b) convergent-elles lorsque $x = 0$? $x = \pi/2$? $x = -1$?

5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi]$.

   a) On considère un prolongement périodique pair de période 2π de la fonction f. Calculez la série de Fourier de la fonction périodique résultante d'abord sous forme réelle, puis sous forme complexe.

   b) On considère un prolongement périodique impair de période 2π de la fonction f. Calculez la série de Fourier de la fonction périodique résultante d'abord sous forme réelle, puis sous forme complexe.

6. Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$\begin{cases} x + 1/2, & -1/2 \leq x \leq 0 \\ 1/2 - x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Trouvez la série de Fourier de f sous forme réelle.

   b) Trouvez la série de Fourier de f' (sous forme réelle).

   c) Intégrez la série trouvée en a) terme à terme, de 0 à x. La série obtenue la série de Fourier de quelle fonction ?

7. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

a) Montrez que la série de Fourier de f est

$$s(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

b) Calculez la dérivée de la série s terme à terme. Cette dérivée est-elle égale à $f'(x)$ (là où cette dérivée existe) ? Sinon, pourquoi ?

c) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

d) Utiliser l'identité de Parseval pour montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

e) Intégrer la série de Fourier $s(x)$ et évaluer la fonction résultante en un point bien choisi pour montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

f) Montrer que la série de Fourier de f s'écrit aussi sous la forme complexe

$$s(x) = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1)}}{2k+1}.$$

8. On définit une fonction de période 2π en prolongeant de façon périodique la fonction f définie par $f(x) = x^2$ sur $]-\pi, \pi[$.

a) Montrez que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

sur $]-\pi, \pi[$.

b) Montrez que

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

sur $]-\pi, \pi[$.

c) Montrez que
$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(nx)$$
pour $-\pi \leq x \leq \pi$.

9. À l'aide des séries trouvées à l'exercice 8, calculez la somme des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \cdots$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \cdots$.

10. Sachant que
$$x - x^3 = \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin(n\pi x)$$
pour $-1 \leq x \leq 1$, évaluez les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

11. Soit la suite définie par $\delta_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\,x)$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.

a) Montrez que (δ_n) est une suite delta.

b) Montrez que $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ (au sens des distributions) pour $x \in]-\pi, \pi[$.

12. Soit la suite définie par $\delta_n(x) = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\pi x/L}$ pour $x \in]-L, L[$.

a) Montrez que (δ_n) est une suite delta.

b) Montrez que $\delta(x) = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi x/L}$ (au sens des distributions) pour $x \in]-L, L[$.

13. Une masse $m > 0$ glisse sur une surface horizontale. Une force de friction proportionnelle à sa vitesse s'oppose son mouvement. On applique une force périodique (une onde carrée) unidirectionelle à cette masse. Cette force est nulle pour les temps

$t < 0$ mais devient non-nulle pour $t \geq 0$. Plus précisément, la position $y(t)$ du système satisfait l'équation différentielle

$$\begin{cases} m\,y'' + \mu\,y' = m\left(-1 + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u(t - k\,\pi)\right), \; t > 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

où u désigne la fonction échelon et $\mu > 0$ est le coefficient de friction.

a) Utiliser la transformée de Laplace pour trouver la solution générale $y(t)$ de cette équation. Comment doit-on choisir les valeurs initiales $y(0)$ et $y'(0)$ pour que le mouvement de la masse soit périodique ?

b) Utiliser la série de Fourier (en version réelle) pour trouver la solution générale $y(t)$ de ce problème. Donner les composantes transitoires et permanentes de la solution.

11.1 Réponses au exercices sur les séries de Fourier

4. a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{n}$ b) $\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2n+1)ix}}{2n+1}$ c) $1/2\,;\,1\,;\,0$

5. a) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\,;\, -\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nix}}{4n^2-1}$
   b) $\sin(x)$, $(e^{i\,x} - e^{-i\,x})/(2i)$.

6. a) $\frac{1}{8} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n^2} \cos(n\pi x)$ b) $-\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n} \sin(n\pi x)$
   c) $\frac{x}{8} + \frac{2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n^3} \sin(n\pi x)$

7. b) $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos((2n+1)x)$; non ; f n'est pas continue

9. a) $-\frac{\pi^2}{12}$ b) $\frac{\pi^4}{90}$

10. $\frac{\pi^3}{32}$ b) $\frac{\pi^6}{945}$

12 Exercices sur les transformées de Fourier

1. Prouvez la propriété de linéarité de la transformée de Fourier : si f, g sont des fonctions définies sur $]-\infty, \infty[$ et si $a, b \in \mathbb{R}$ alors
$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}\{f\} + b\mathcal{F}\{g\}.$$

2. Prouvez la propriété suivante de la transformée de Fourier : si $\lim_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t) = 0$ pour $0 \le k \le n$ alors
$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}\right\} = (i\,\omega)^n \mathcal{F}\{f\}.$$

3. Prouvez la propriété suivante de la transformée de Fourier :
$$i^{\,n}\frac{d^n}{d\omega^n}\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{t^n f(t)\}.$$

4. Prouvez l'identité de Parseval pour la transformée de Fourier :
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega.$$

5. Prouvez la propriété de décalage de la transformée de Fourier : si $a \in \mathbb{R}$ alors
$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{i\,\omega a}\mathcal{F}\{f(t)\}.$$

6. Prouvez la propriété de symétrie de la transformée de Fourier : si $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$ alors
$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}(t)\right\} = f(-\omega).$$

7. Montrez que $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$ si $f(t) \in \mathbb{R}$ pour tout t.

8. Montrez que $\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{a}{a^2+\omega^2}$.

9. Montrez que $\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-\omega^2/4a}$.

10. Montrez que $\mathcal{F}\left\{\dfrac{1}{a^2+t^2}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,\dfrac{1}{a}\,e^{-a|\omega|}$.

11. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction f définie par
$$f(t) = \begin{cases} 1-t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

12. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 - a|t|, & |t| < 1/a \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}.$$

13. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 2t + 2}.$$

14. Trouvez la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 6t + 13}.$$

15. Calculez la transformée de Fourier de la fonction g définie par $g(t) = \dfrac{1}{t^4 + 4}$ et simplifiez votre réponse.

16. Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t), & |t| \leq \pi/2 \\ 0, & |t| > \pi/2. \end{cases}$$

   a) Montrez que la transformée de Fourier de f est

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\omega\pi/2)}{1 - \omega^2}.$$

   b) Évaluez l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(x\pi/2)}{(1 - x^2)^2} \, dx.$$

   c) Calculez la transformée de Fourier de la fonction g définie par

$$g(t) = \begin{cases} t\cos(t), & |t| \leq \pi/2 \\ 0, & |t| > \pi/2. \end{cases}$$

17. Sachant que la transformée de Fourier de la fonction définie par $f(t) = e^{-|t|}$ est

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \omega^2},$$

   a) déduisez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1 + \omega^2} \, d\omega = \pi e^{-|x|}.$$

b) évaluez l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2}\, d\omega.$$

c) calculez la transformée de Fourier de la fonction définie par $g(t) = te^{-|t|}$.

18. Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculez la transformée de Fourier de f

b) Calculez la convolution $(f * f)(t)$.

c) Calculez la transformée de Fourier de $f * f$.

19. Soit f la fonction définie par

$$f(t) = \mathcal{F}\left\{u(t+1) - u(t-1)\right\},$$

où u est la fonction échelon.

a) Montrez que $\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}$.

b) Utilisez la partie a) et les propriétés de la transformée de Fourier, pour calculer $\mathcal{F}\{g\}$, où

$$g(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

20. a) Calculez la transformée de Fourier de la fonction f définie par

$$f(t) = [u(t+1) - u(t-1)]t,$$

où u est la fonction échelon.

b) Calculez la convolution $(f * f)(t)$.

c) Calculez la transformée de Fourier de la fonction g définie par

$$g(t) = \begin{cases} t^3 - 6t - 4 & -2 \le t \le 0 \\ -t^3 + 6t - 4 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

21. Montrez que

$$\delta(t) \overset{d}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\omega$$

au sens des distributions.

12.1 Réponses aux exercices sur les transformées de Fourier

11. $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(\omega)-\omega\cos(\omega)}{\omega^3}$

12. Rép. : $\sqrt{\frac{2}{\pi}}a\left(\frac{1-\cos(\omega/a)}{\omega^2}\right)$

13. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-i\,\omega-|\omega|}$

14. $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}e^{3i\,\omega-2|\omega|}$

15. $\hat{g}(\omega)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2\pi}}{8}e^{\omega}(\cos\omega-\sin\omega), & \omega<0\\ \frac{\sqrt{2\pi}}{8}e^{-\omega}(\cos\omega+\sin\omega), & \omega\geq 0\end{cases}$

16. b) $\pi^2/4$ c) $\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi(\sin(\pi\omega/2)(\omega^2-1)+4\omega\cos(\pi\omega/2)}{(\omega^2-1)^2}$

17. b) $\pi/2$ c) $2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{(1+\omega^2)^2}$

18. a) $(f*f)(t)=\begin{cases}te^t, & 0\leq t\leq 1\\ (2-t)e^t, & 1\leq t\leq 2\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i\,(e^{1-i\,\omega})}{\omega+i}$

19. b) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{(\sin(\omega)-\omega\cos(\omega))}{\omega^3}$

20. a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{i(\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^2}$ b) $\begin{cases}\frac{t^3}{6}-t-\frac{2}{3}, & 0-2\leq t\leq 0\\ -\frac{t^3}{6}+t-\frac{2}{3}, & 0\leq t\leq 2\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$ c) $-\frac{12}{\pi}\frac{(\omega\cos(\omega)-\sin(\omega))^2}{\omega^4}$

13 Exercices sur le théorème d'échantillonnage

1. Soit $f(t) = \dfrac{e(t\sin(t)+\cos(t))-1}{t^2+1}$. Sachant que

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[u(\omega+1)-u(\omega)]e^{-\omega} + [u(\omega)-u(\omega-1)]e^{\omega},$$

déterminez la fréquence minimale d'échantillonnage pour que f puisse être reconstruite, puis écrivez explicitement la formule de reconstruction.

2. Soit $f(t) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{2\sin(2t)(1-t^2)-t(1+3\cos(t))}{t^3}$. Sachant que

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,[u(\omega)-u(\omega+2)]\omega(1+\omega) + [u(\omega)-u(\omega-2)]\omega(1-\omega),$$

déterminez la fréquence minimale d'échantillonnage pour que f puisse être reconstruite, puis écrivez explicitement la formule de reconstruction.

3. a) Calculez la transformée de Fourier de la fonction $H(t) = [u(t+10)-u(t)]\,(10+t) + [u(t)-u(t-10)]\,(10-t)$, où u est la fonction de Heaviside.
   b) Soit h la fonction définie par

$$h(t) = \frac{\sin^2(5t)}{t^2}.$$

   Montrez que h est à bande passante limitée. *Indice : utilisez le résultat de a).*
   c) Écrivez explicitement la formule de reconstruction pour $h(t)$.

4. a) Calculez la transformée de Fourier de la fonction $H(t) = [u(t+\pi/2)-u(t-\pi/2)]\cos(t)$, où u est la fonction de Heaviside.
   b) Soit h la fonction définie par

$$h(t) = \frac{\cos(\pi t/2)}{1-t^2}.$$

   Montrez que h est à bande passante limitée. *Indice : utilisez le résultat de a).*
   c) Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale pour que h puisse être reconstruite à l'aide de la formule donnée par le théorème d'échantillonnage ?
   d) Écrivez explicitement la formule de reconstruction pour $h(t)$.

13.1 Réponses aux exercices sur le théorème d'échantillonnage

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1+e(-1)^n}{\pi^2 n^2+1} \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi}$

2. $-\frac{2}{3}\frac{\sin(2t)}{2t} - \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{4(1+3(-1)^n)}{n^2\pi^2} \frac{\sin(2t-n\pi)}{2t-n\pi}$

3. a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ c) $25\frac{\sin(t)}{t} + \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{100\sin^2(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \frac{\sin(10t-n\pi)}{t-n\pi/10}$

4. a) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}$ c) π d) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(t-2n))}{\frac{\pi}{2}(t-2n)}$

14 Exercices sur la transformée de Laplace inverse

1. Calculez la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes.

   a) $F(s) = \dfrac{s}{s^4 + 2}$

   b) $F(s) = \dfrac{s}{s+10} + \dfrac{se^{-2s}}{(s+10)^2}$.

   c) $F(s) = \dfrac{e^{-10s}}{(s^2+1)^3}$

   d) $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)^3}$

   e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}$

   f) $F(s) = \dfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

   g) $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{((s+3)^2+9)^2}$

14.1 Réponses aux exercices sur la transformée de Laplace inverse

1. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(2^{-1/4}t)\sin(2^{-1/4}t)$

   b) $\delta(t) - 10e^{-10t} - u(t-2)e^{20-10t}(10-21)$

   c) $-\frac{1}{8}\left(3(t-10)\cos(t-10) + \sin(t-10)((t-10)^2-3)\right)u(t-10)$

   d) $2t^2e^t$

   e) $\frac{1}{4}t - \frac{1}{3}\sin(t) + \frac{1}{24}\sin(2t)$

   f) $t\cos(t)$

   g) $\frac{1}{54}e^{-3(t-3)}[\sin(3(t-3)) - 3(t-3)\cos(3(t-3))]u(t-3)$