Outils de Recherche Opérationnelle en Génie
MTH 8414

Problèmes de flux dans les réseaux

Concepts de base

- **Réseau:** *G(N,A)*

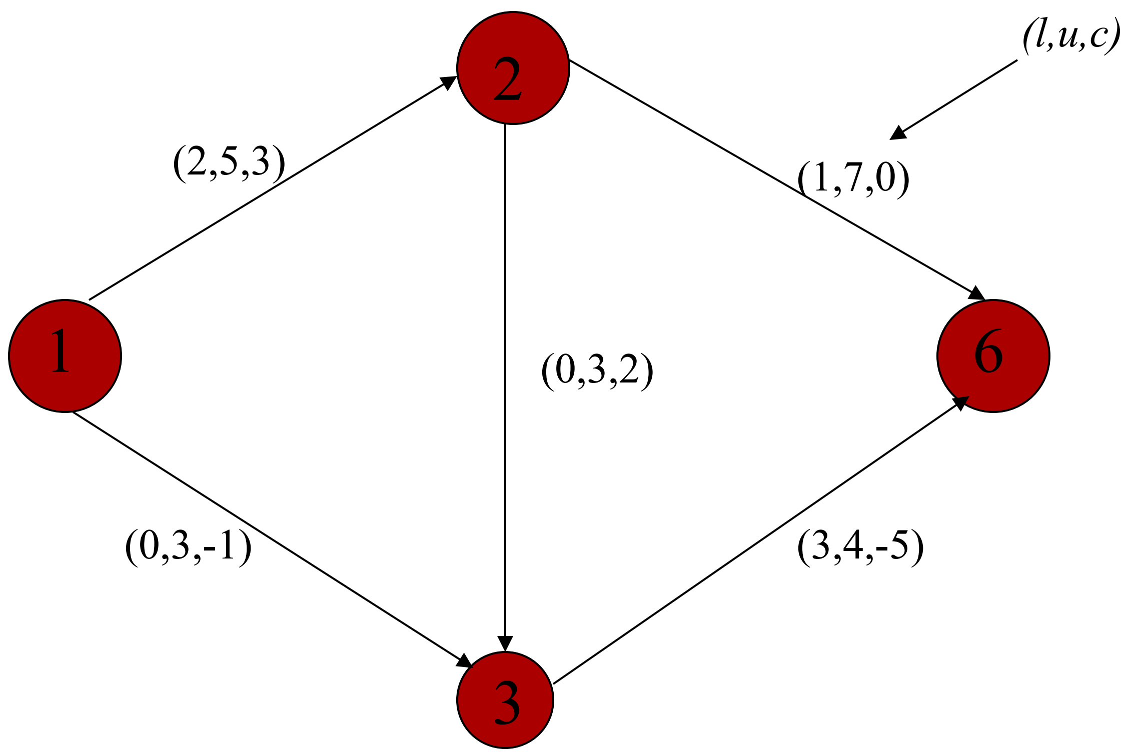
  Graphe orienté où *N* désigne l'ensemble des nœuds et *A* l'ensemble des arcs du réseau sur lequel il y a possibilité de faire circuler du flux.

- **Notation:**

  - x_{ij} : le flux circulant sur l'arc (i, j).
  - c_{ij} : le coût unitaire du flux sur l'arc (i, j).
  - u_{ij} : la capacité de l'arc (i, j) correspondant à une borne supérieure sur x_{ij}.
  - l_{ij} : une borne inférieure sur x_{ij} (avec $0 \le l_{ij} \le u_{ij}$).

Exemple:

- À l'arc *(i,j)* est associé le triplet (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}).
- À un nœud i est associée une demande d_i
- Par exemple pour l'arc (1,2), le triplet associé (2,5,3) indique l_{12}=2, u_{12}=5 et c_{12}=3.



Caractéristiques des problèmes de flux.

- À chaque nœud $i \in N$,

$$B_i = \{j \in N : (j,i) \in A\} \leftarrow \text{Prédécesseurs de } i$$
$$P_i = \{j \in N : (i,j) \in A\} \leftarrow \text{Successeurs de } i$$

- les contraintes de conservation de flux associées aux nœuds du réseau:

  – nœud source s
  – nœud intermédiaire i
  – nœud destination t

Problème de flux à coût minimum d'une source *s'* à une destination *t*. (Minimum Cost Flow)

- Considérant un réseau où un coût unitaire est spécifié pour chaque arc et où une quantité *d* de flux doit être déplacée d'un nœud source ***s'*** à un nœud destination ***t***, nous voulons déterminer la quantité de flux $\boldsymbol{x_{ij}}$ à faire passer sur chaque arc $\boldsymbol{(i,j) \in A}$ pour un coût total minimum.

Modèle pour le MCF

- Soit *d* la quantité de flux à déplacer de *s*'à *t*.

$$(MCF): \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

Sujet à:

(conservation de flux)

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ji} = \begin{cases} d & \text{si} \quad i = s \\ 0 & \text{si} \quad i \in N \quad i \neq s, t \\ -d & \text{si} \quad i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A.$$

- En nous référant à la formulation (MCF) de ce problème, nous pouvons formuler plusieurs autres problèmes de flux.

Exemple MCF

- Une compagnie va produire le même produit dans deux usines différentes.
- Le produit doit être envoyé à deux entrepôts.
  - L'usine 1 peut envoyer une quantité illimitée à l'entrepôt 1 par train et
  - l'usine 2 peut envoyer une quantité illimitée à l'entrepôt 2 par train.
- On peut utiliser aussi des camions pour transporter jusqu'à 50 unités de produit de chaque usine à un centre de distribution.
- Du centre de distribution (D), on peut transporter jusqu'à 50 unités de produit vers chaque entrepôt.

Exemple MCF (suite)

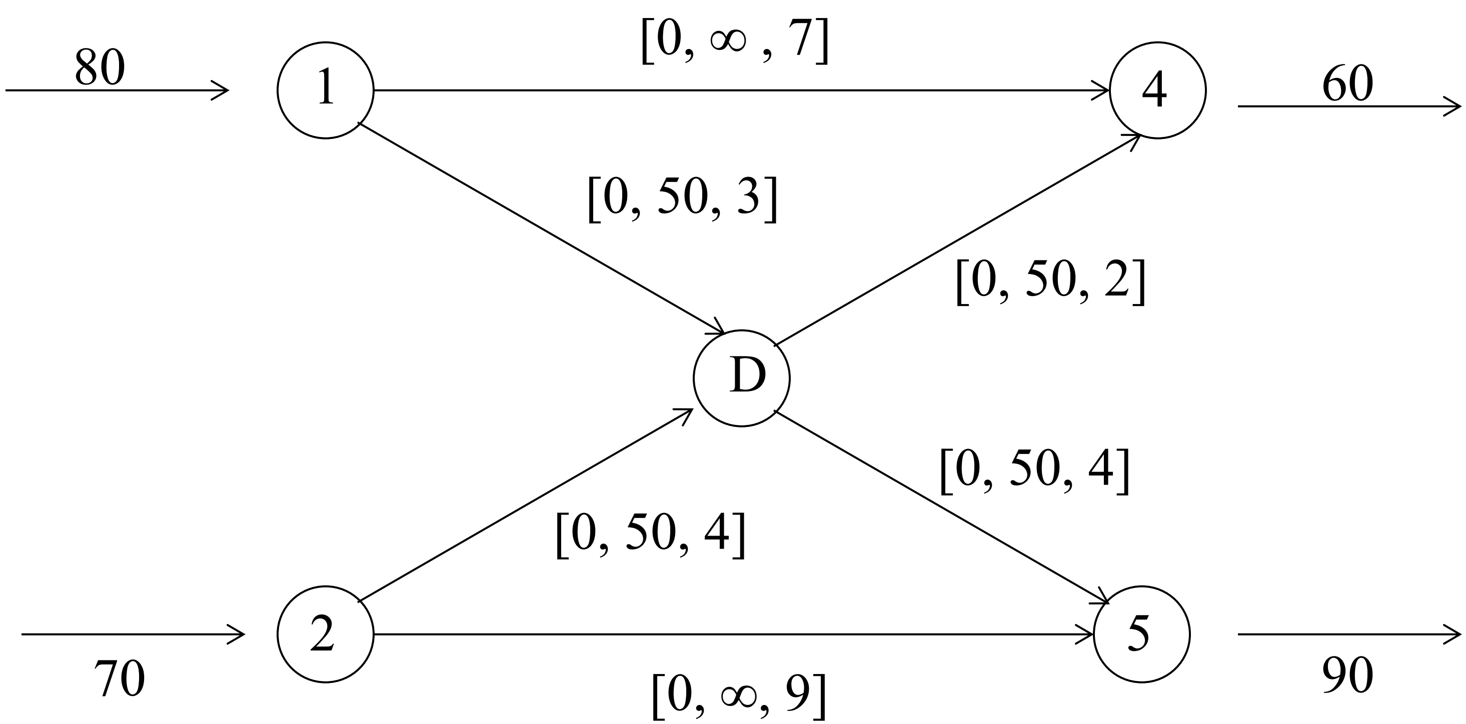
- Le coût de transport par unité de produit pour chaque solution, les quantités de produits fabriqués à chaque usine (U1 et U2) et la quantité de produits requise à chaque entrepôt (E1 et E2) sont:

	D	$E1$	$E2$	Total produit
$U1$	3	7	--	80
$U2$	4	--	9	70
D	--	2	4	--
Requis	--	60	90	150

- Formuler ce problème comme un problème de flux à coût minimum avec deux nœuds sources et deux nœuds destinations.

Exemple MCF (suite)

- **Modélisation:**
  - Le réseau correspondant est le suivant où U_1=1, U_2 =2, D =3, E_1=4 et E_2 =5 avec la notation [l_{ij}, u_{ij},c_{ij}] sur les arcs.



Exemple MCF (suite)

- Le modèle mathématique du problème de FCM s'écrit:

$$\text{Min :} \quad 3x_{13} + 7x_{14} + 4x_{23} + 9x_{25} + 2x_{34} + 4x_{35}$$

Sujet à :

$$x_{13} + x_{14} = 80$$
$$x_{23} + x_{25} = 70$$
$$x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0$$
$$x_{14} + x_{34} = 60$$
$$x_{25} + x_{35} = 90$$
$$x_{13} \leq 50$$
$$x_{23} \leq 50$$
$$x_{34} \leq 50$$
$$x_{35} \leq 50$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A.$$

Quelques problèmes de flux

Problème du plus court chemin d'une source *s* à une destination *t*. (Shortest Path Problem)

- Pour ce problème, une distance (ou longueur) est associée à chaque arc. Si nous considérons les distances des arcs comme les coûts associés au flux sur les arcs, alors le problème du plus court chemin de s à t peut se formuler comme un problème de flux à coût minimum pour déplacer 1 (une) unité de flux de s à t .

Modèle pour le SPP

- Le problème se formule comme suit :

$$(PCC): \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

Sujet à :

(conservation de flux)

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = s \\ 0 & \text{si} \quad i \neq s,t \\ -1 & \text{si} \quad i = t \end{cases} \qquad \forall i \in N$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in A$$

Dans cette formulation, c_{ij} représente la distance (longueur) de l'arc *(i,j)*. De plus, $l_{ij} = 0 \ \forall \ (i,j) \in A$, et les contraintes de capacité $x_{ij} \leq u_{ij}$ sont inutiles. La solution obtenue avec le simplexe est entière.

Exemple SPP

- Au début de la première année (d'une période de 5 ans) vous achetez une voiture neuve au coût de 12 000$. Le coût d'entretien annuel d'une voiture de ce type dépend de son âge au début de l'année considérée te qu'indiqué ici:

Âge de la voiture au début de l'année	Coût d'entretien annuel
0	2 000$
1	4 000 $
2	5 000 $
3	9 000 $
4	12 000 $

Exemple SPP (suite)

- Pour éviter de payer des coûts d'entretien élevés avec une voiture plus vieille, vous pouvez la vendre pour en acheter une neuve. Le prix de revente de la voiture dépend aussi de son âge tel qu'indiqué ici :

Âge de la voiture au début de l'année	Prix de revente
1	7 000$
2	6 000 $
3	2 000 $
4	1 000 $
5	0 $

Exemple SPP (suite)

- Pour simplifier le problème, supposons que le prix d'achat d'une voiture neuve reste toujours égal à 12 000 $.

- Votre objectif est de minimiser votre coût net total (les coûts d'achats + les coûts d'entretien - les revenus de revente) au cours des 5 prochaines années (i.e., jusqu'à la fin de la cinquième année).

- Formuler ce problème comme un problème de plus court chemin en représentant le réseau associé et en déterminant le coût associé à chaque arc.

Exemple SPP (suite)

- **Modélisation mathématique**

  – Le réseau a 6 nœuds: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  – Le nœud i est le début de l'année i .

  – Pour $i < j$, un arc (i,j) correspond à l'achat d'une voiture neuve au début de l'année i et la gardant jusqu'au début de l'année j.

Exemple SPP (suite)

- La longueur de l'arc ***(i,j)*** est le coût net total encouru pour la possession et l'utilisation d'une voiture du début de l'année ***i*** au début de l'année ***j*** si une voiture neuve est achetée au début de l'année ***i*** et cette voiture est revendue pour une voiture neuve au début de l'année ***j***. (les coûts sont en milliers $).

- c_{ij} = coût d'entretien durant les années ***i, i+1, … , j-1***

  \+ coût d'achat d'une voiture au début de l'année ***i***

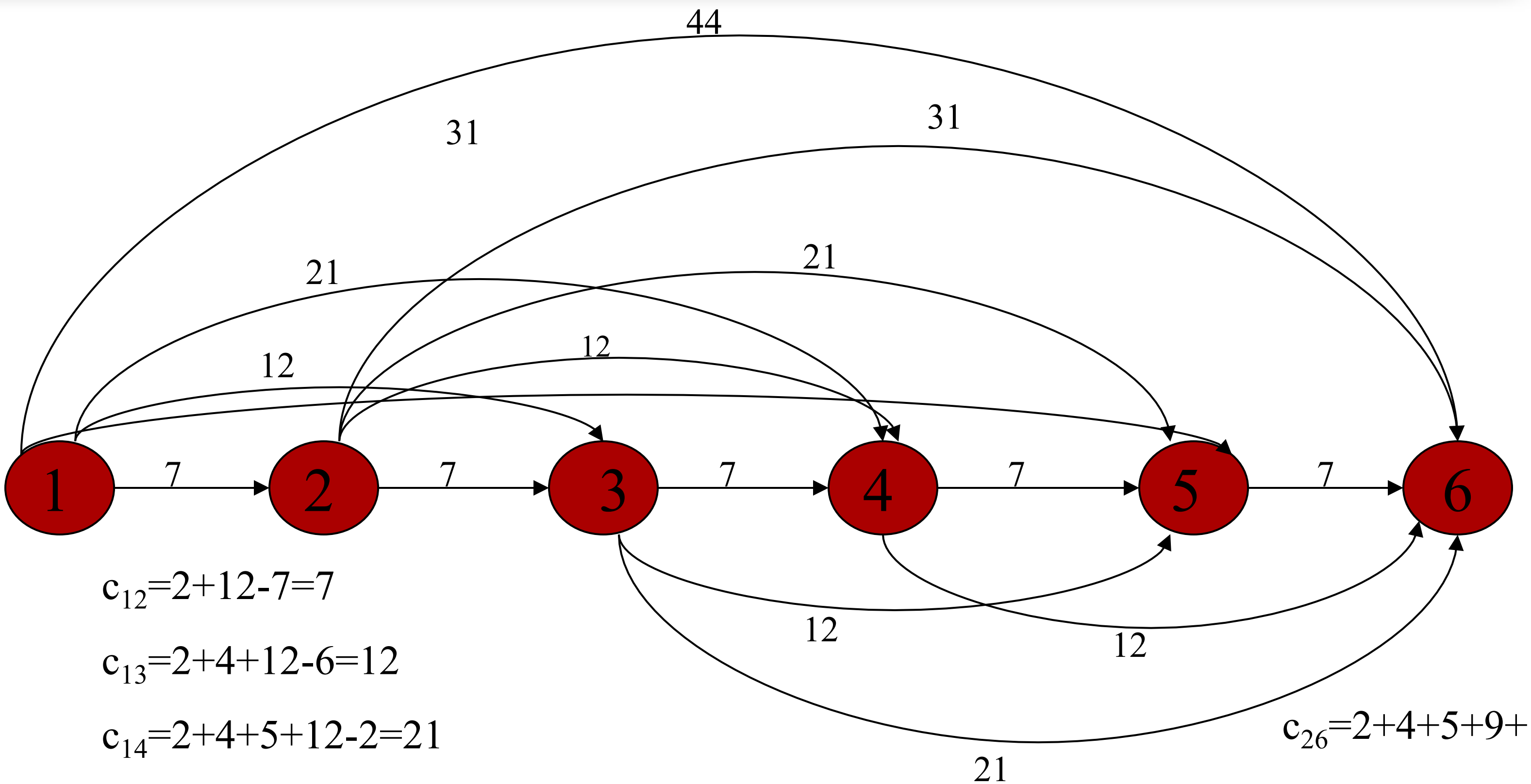
  \- revenus de revente au début de l'année ***j***

Exemple SPP (suite)

- **Variable de décision**

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si une voiture neuve est achetée au début de} \\ & \text{l'année } i \text{ et gardée jusqu'au début de l'année } j. \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple SPP (suite)



c_{12}=2+12-7=7

c_{13}=2+4+12-6=12

c_{14}=2+4+5+12-2=21

c_{15}=2+4+5+9+12-1=31

c_{16}=2+4+5+9+12+12-0=44

c_{23}=2+12-7=7

c_{24}=2+4+12-6=12

c_{25}=2+4+5+12-2=21

c_{26}=2+4+5+9+12-1=31

c_{34}=2+12-7=7

c_{35}=2+4+12-6=12

c_{36}=2+4+5+12-2=21

c_{45}=2+12-7=7

c_{46}=2+4+12-6=12

c_{56}=2+12-7=7

Exemple SPP (suite)

Le modèle mathématique s'écrit :

$$(PCC): \text{ Min } \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

Sujet à :

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1, 6, \forall i \in N \\ -1 & \text{si } i = 6 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A.$$

Quelques problèmes de flux

Problème de flux maximal (FM) d'une source *s* à une destination *t*. (Maximum Flow)

- Soit un réseau où $l_{ij} = 0 \ \forall \ (i,j) \in A$, l'objectif est de déterminer la quantité maximale de flux qu'il est possible d'acheminer d'un nœud source ***s*** à un nœud destination ***t*** du réseau (maximiser $\boldsymbol{x_{ts}}$)

Modèle mathématique pour le MF

- On formule le problème de MF comme un problème de MCF en ajoutant un arc fictif de la destination ***t*** vers la source ***s*** et dont les coûts sont spécifiés comme suit:

$$\text{Cout d'un arc} = \begin{cases} c_{ij} = 0, & \forall (i, j) \in A \\ c_{ts} = 1 \end{cases}$$

- Ici on « maximise » $\boldsymbol{x_{ts}}$

Modèle mathématique pour le MF

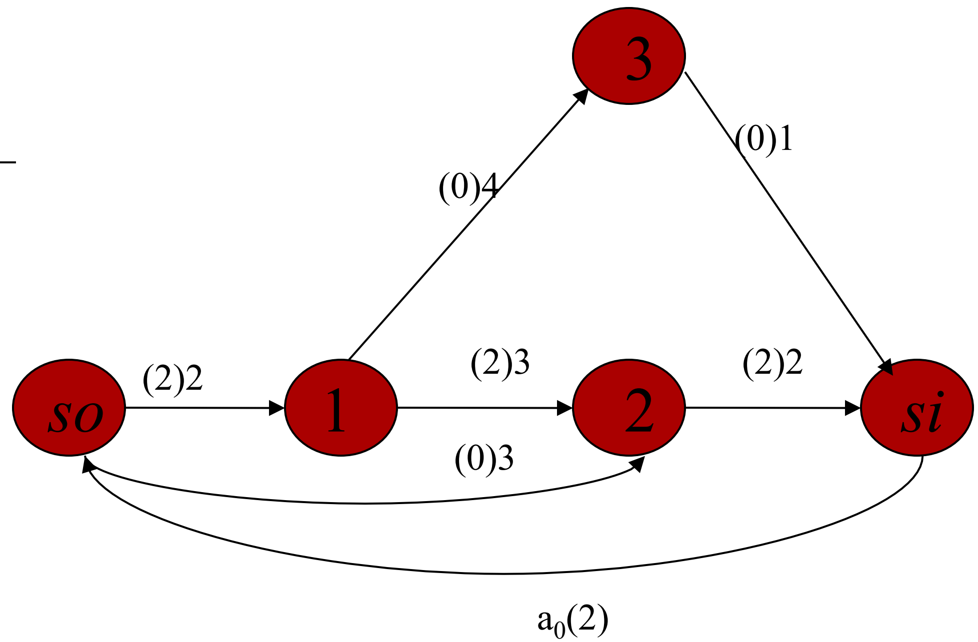
$$
(MF):\begin{cases}
\text{Max } c_{ts}x_{ts} \\
\text{Sujet à :} \\
\text{(Conservation de flux)} \\
\qquad \sum_{j\in P_i} x_{ij} - \sum_{j\in B_i} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \\
\text{(Capacité)} \\
\qquad 0 \le x_{ij} \le u_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in A \\
\qquad 0 \le x_{ts} \le \infty.
\end{cases}
$$

Exemple de MF

- Big Oil veut expédier la quantité maximale de pétrole (par heure) via pipeline à partir du nœud $\boldsymbol{s_0}$ au nœud $\boldsymbol{s_i}$ dans la figure ci-dessous qui décrit le réseau de distribution.
- Les arcs dans la figure représentent les pipelines de différents diamètres.
- Le nombre maximum de barils de pétrole (millions de barils par heure) pouvant être pompé au travers de chaque arc est donné dans le tableau.
- Formuler ce problème comme un problème de MF pour déterminer le nombre maximum de barils de pétrole par heure qui doit être expédié de $\boldsymbol{s_0}$ à $\boldsymbol{s_i}$.
- (N.B.: les valeurs entre parenthèses sur les arcs représentent une solution réalisable).

Exemple de MF (suite)

ARC	CAPACITÉ
$(so,1)$	2
$(so,2)$	3
$(1,2)$	3
$(1,3)$	4
$(3,si)$	1
$(2,si)$	2



Exemple de MF (suite)

- **Modélisation mathématique**

- Soit $\boldsymbol{x_0}$: le flux sur l'arc artificiel $\boldsymbol{(s_i, s_0)}$
- Soit $\boldsymbol{x_{ij}}$: millions de barils de pétrole par heure qui pourront passer sur l'arc $\boldsymbol{(i, j)}$ du pipeline.

Modèle mathématique

$$\text{FM: } \max \quad z = x_o$$

sujet à:

(Contraintes de capacité)

$$
\begin{aligned}
x_{so,1} &\leq 2\\
x_{so,2} &\leq 3\\
x_{12} &\leq 3\\
x_{2,si} &\leq 2\\
x_{13} &\leq 4\\
x_{3,si} &\leq 1
\end{aligned}
$$

(Contraintes de conservation de flux)

$$
\begin{aligned}
x_o &= x_{so,1} + x_{so,2} && \text{(Noeud } so\text{)}\\
x_{so,1} &= x_{12} + x_{13} && \text{(Noeud 1)}\\
x_{so,2} + x_{12} &= x_{2,si} && \text{(Noeud 2)}\\
x_{13} &= x_{3,si} && \text{(Noeud 3)}\\
x_{3,si} + x_{2,si} &= x_0 && \text{(Noeud } si\text{)}\\
x_{ij} &\geq 0, \forall (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Problème de transport classique

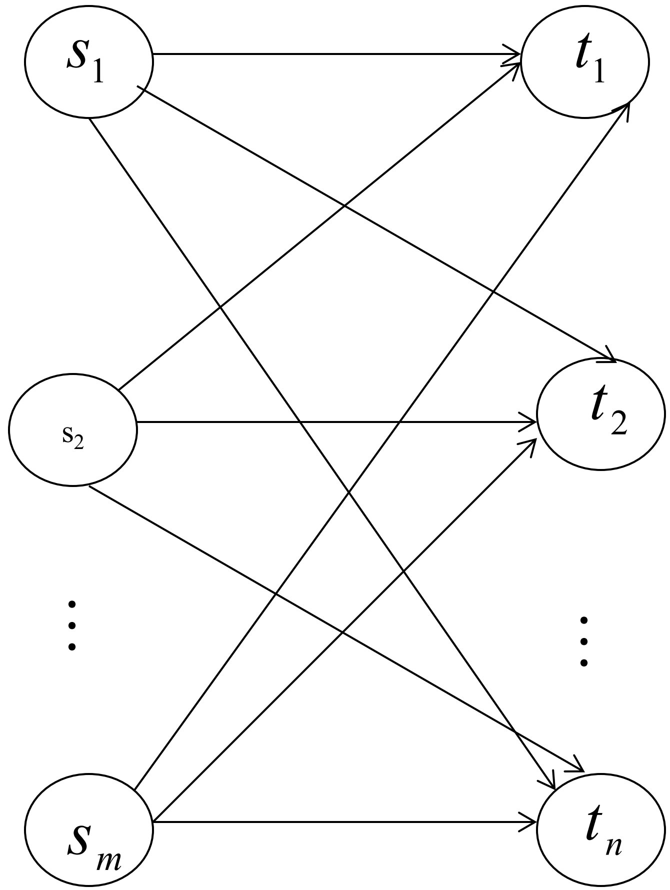
- Dans ce problème, nous considérons plusieurs sources et plusieurs destinations, et il n'y a pas de nœuds intermédiaires.
- Ainsi ***N*** est partitionné en deux ensembles: ***S*** l'ensemble des nœuds source et ***T*** l'ensemble de nœuds destination:

$$N = S \cup T \qquad (\text{et } S \cap T = \emptyset).$$

- De plus, l'ensemble A est constitué des arcs reliant les sources aux destinations. Un arc existe entre chaque pair source-destination:

$$A = \{\, (i, j) : i \in S,\ j \in T \,\}.$$

Problème de transport (exemple)



Problème de transport

- Supposons qu'il y a $\boldsymbol{m}$ sources et $\boldsymbol{n}$ destinations.
- Dénotons par
  - $\boldsymbol{x_{ij}}$ le flux sur l'arc $\boldsymbol{(s_i, t_j)}$,
  - $\boldsymbol{O_i}$ la quantité disponible à $\boldsymbol{s_i}$
  - $\boldsymbol{d_j}$ la quantité requise à $\boldsymbol{t_j}$.
  - $\boldsymbol{c_{ij}}$ le coût unitaire de transport sur l'arc $\boldsymbol{(s_i, t_j)}$.

- Formulons le problème de transport (PT) où nous devons déterminer la quantité à transporter de chaque origine à chaque destination en respectant les disponibilités et en satisfaisant les demandes de façon à minimiser le coût total de transport.

Modèle mathématique

$$(TP) \quad \min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujet à:} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 0_i, \quad 1 \le i \le m \quad \text{(disponibilités)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad 1 \le j \le n \quad \text{(demandes)}$$

$$x_{ij} \ge 0$$

Quelques problèmes de flux

Problème d'affectation (Assignment Problem)

- Le problème d'affectation peut s'énoncer comme suit:
- Étant donné ***n*** candidats pour remplir ***n*** postes, et des coûts d'affectation des candidats aux postes, déterminer l'affectation de chaque candidat à un et un seul poste pour minimiser le coût total des affectations.

- Soit c_{ij} le coût d'affecter le candidat ***i*** au poste ***j***. Les variables de décision x_{ij} sont spécifiées comme suit:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est affecté à } j \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Modèle pour le AP

- Formulons le problème pour trouver l'affectation des candidats aux postes minimisant le coût total.

$$
\begin{aligned}
(AP) \quad \min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{sujet à :} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & , \quad & 1 \le i \le n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & , \quad & 1 \le j \le n \\
& x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 & , \quad & 1 \le i \le n, \quad 1 \le j \le n.
\end{aligned}
$$

Propriété intéressante

- Ce problème *(AP)* est un cas particulier du problème de transport (*TP*) où

$$m = n, \quad 0_i = 1 \; (1 \leq i \leq n)$$

- et

$$d_j = 1 \; (1 \leq j \leq n)$$

- Les sources de disponibilité sont les candidats et les destinations sont les postes.
- Puisque la solution optimale obtenue pour un problème de transport avec le simplexe est entière, nous pouvons remplacer les contraintes

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \qquad \text{par} \qquad x_{ij} \geq 0.$$

Exemple AP

- Machineco possède 4 machines et 4 tâches doivent être accomplies. Chaque machine doit être assignée à accomplir une seule tâche. Le temps requis de démarrage de chaque machine pour accomplir chaque tâche est donné dans la table ci-dessous. Machineco veut minimiser le temps total de « *setup* » nécessaire pour accomplir les 4 tâches. Formuler un problème de PL pour résoudre ce problème.

	TEMPS (Heures)			
	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Machine 1	14	5	8	7
Machine 2	2	12	6	5
Machine 3	7	8	3	9
Machine 4	2	4	6	10

Exemple (AP) Suite)

- **Modélisation mathématique**

Soit :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si machine } i \text{ est assignée à} \\ & \text{satisfaire les demandes de} \\ & \text{la tâche } j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple AP (suite)

$$PA : \min z = 14x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 2x_{21} + 12x_{22} + 6x_{23} + 5x_{24}$$
$$+ 7x_{31} + 8x_{32} + 3x_{33} + 9x_{34} + 2x_{41} + 4x_{42} + 6x_{43} + 10x_{44}$$

Sujet à :

(Contraintes sur les machines)

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

(Contraintes sur les jobs)

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{or} \quad x_{ij} = 1, \ \forall (i, j) \in A$$

Autres problèmes de flux

- Il existe d'autres problèmes de flux ou la solution d'un programme linéaire ne donne pas nécessairement une solution entière…
- Flux généralisé
- Multiflux

flux maximal généralisé

École Polytechnique Montréal

$$(FMG): \quad \max \quad v_s$$

Sujet à :

(conservation de flux)

$$\sum_{j \in P_i} x_{ij} - \sum_{j \in B_i} r_{ji} x_{ji} = \begin{cases} v_s & \text{si} \quad i = s \\ 0 & \text{si} \quad i \in N \quad i \neq s, t, \\ -v_t & \text{si} \quad i = t \end{cases}$$

(capacité)

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A.$$

Multiflux (ou flux à plusieurs commodités)

- Soit k l'indice des commodités

$$(MF): \quad \min \quad \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^{k} x_{ij}^{k}$$

Sujet à :

(conservation de flux)

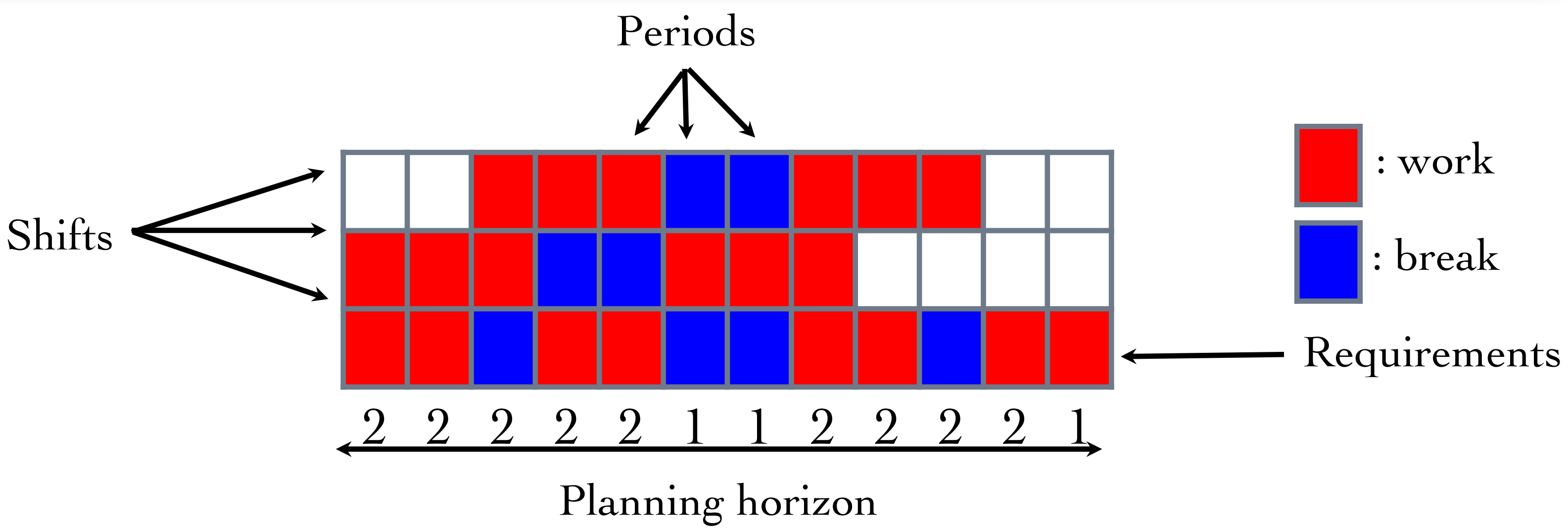
$$\sum_{j\in P_i} x_{ij}^{k} - \sum_{j\in B_i} x_{ji}^{k} = \left\{ \; b_i^k \quad \forall i \text{ et } k \right.$$

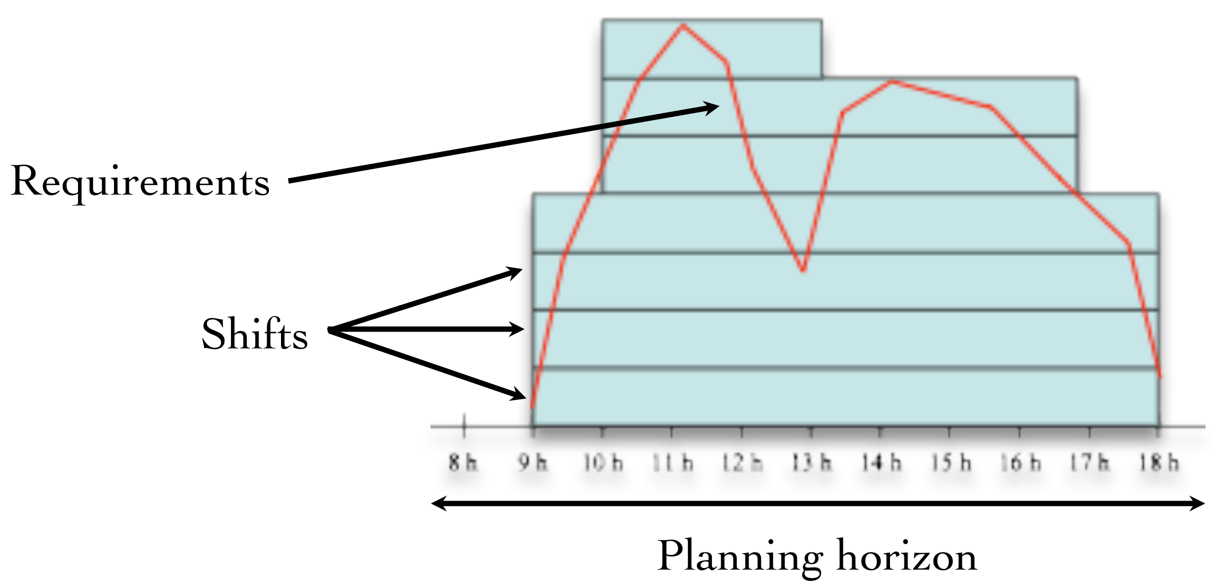
(capacité)

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{r} x_{ij}^{k} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A$$

$$0 \leq x_{ij}^{k} \leq u_{ij}^{k} \quad \forall (i, j) \in A \text{ et } k.$$

Exercice: construction de quarts de travail





Exercice: construction de quarts de travail

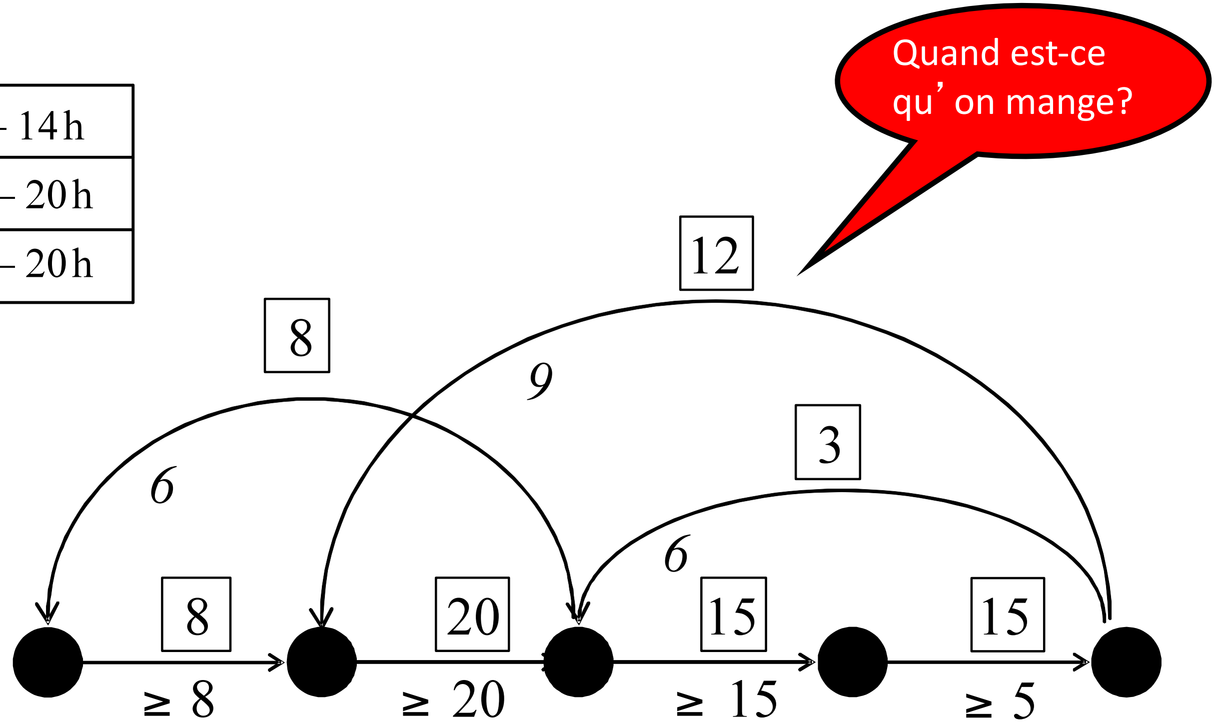
- Supposons un problème plus simple avec 4 plages de temps et 3 quarts de travail.
  - Trois quarts de travail: A(8h-14h), B(11h-20h), C(14h-20h)
  - Demande en personnel:
    - 8h à 11h: 8
    - 11h à 14h: 20
    - 14h à 17h: 15
    - 17h à 20h: 5

Modélisation avec un réseau ?

- On peut le résoudre par un algorithme de flot.
- La charge se traduit par un flux minimal sur l'arc associé à chaque plage de temps.
- À chaque quart de travail est associé un arc, partant du pas de temps final vers le pas de temps initial, de coût , ici égal à sa durée par simplification.
- Le flux faisable de coût minimum (valeurs encadrées) donne alors la planification optimale.

Un problème simple?

Quart A	8h – 14h
Quart B	11h – 20h
Quart C	14h – 20h



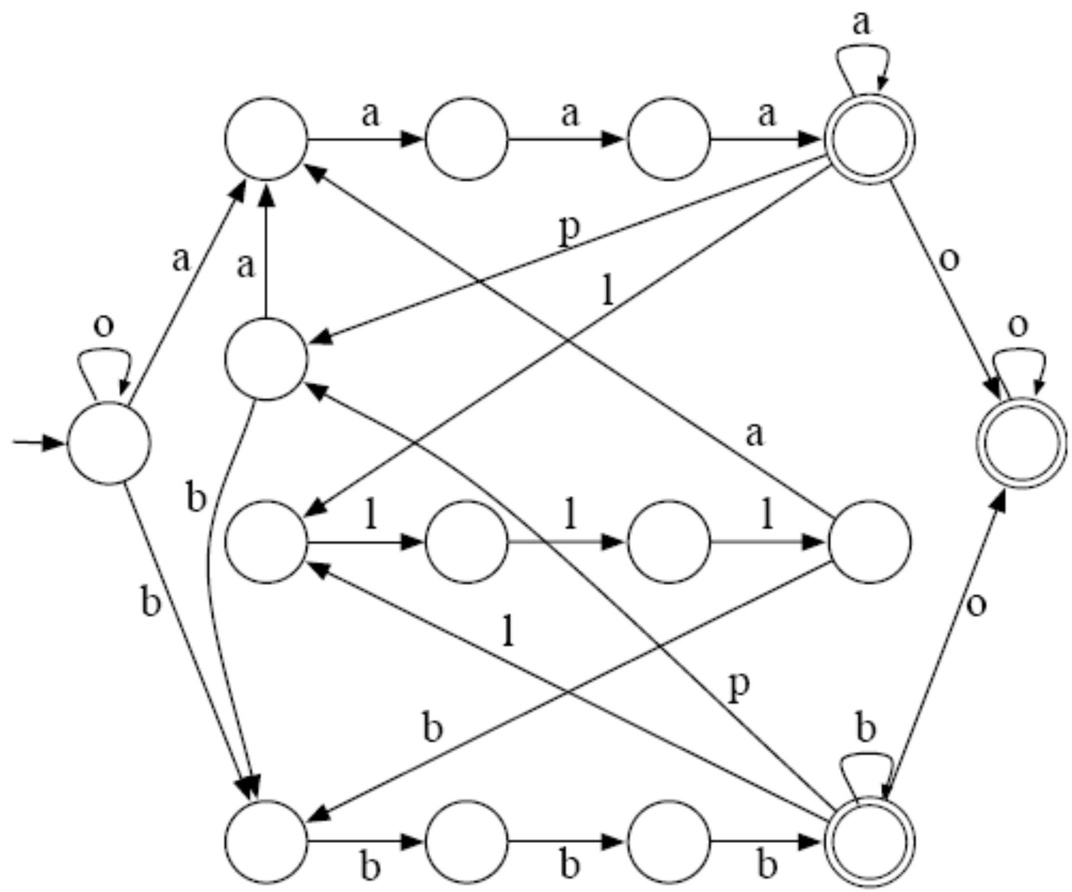
Horaire	8h – 11h	11h – 14h	14h – 17h	17h – 20h
Charge	8	20	15	5

Complexifions un peu le problème

- Il y a deux activités de travail (a,b), des pauses (p), un repas (l)et du repos (r).
- Si un employé commence une activité de travail, il doit la continuer pour au moins une heure.
- Il faut prendre une pause ou un repas entre deux activités différentes.
- On ne peut pas enchaîner deux pauses.
- Un employé débute et termine sa journée au repos.

Complexifions un peu le problème

- Le réseau suivant assure le respect des règles précédentes



- Quelles règles manque-t-il pour avoir une description cohérente de la journée de travail ?

Quelques résultats

Modèles d'affectation

$\lvert C \rvert$	$\lvert V \rvert$	MIP *MIP Value*	 *MIP Time*
29871	4040	172,6670	2142,17
56743	5104	>	>
56743	5104	>	>
45983	4704	152,2240	3610,00
40447	4360	171,9930	3610,01
40447	4360	137,5180	3616,57
45887	4608	>	>
56743	5104	>	>
36175	4156	182,5370	3607,76
45983	4704	149,1810	3611,72

Modèle réseau

$\lvert C \rvert$	$\lvert V \rvert$	MIP *MIP Value*	 *MIP Time*
1491	1856	172,6670	1,03
2719	3976	164,1370	40,09
2719	3976	169,0120	64,64
2183	3144	133,3830	46,39
1915	2728	145,4640	14,03
1915	2728	135,2180	3,28
2183	3144	150,6810	5,99
2719	3976	148,0470	131,77
1759	2416	182,5370	16,14
2183	3144	147,5030	20,22