Outils de Recherche Opérationnelle en Génie

MTH 8414A

La programmation linéaire: Introduction

Motivation

- La programmation linéaire fut développée au cours de la Seconde Guerre mondiale.
  - L'objectif était d'allouer plus intelligemment les ressources de l'armé.
  - Le terme « programmation » est employé avec le sens de « plan ».
- La PL peut résoudre un VASTE nombre de problèmes (modèle de transport, allocation de ressources, théorie des jeux, tarifications, etc.)
- Le développement de la théorie et des algorithmes est une des avancées scientifiques importantes du 20e siècle
  - avec l'accélération des ordinateurs, la vitesse de résolution est améliorée par un facteur de 1 milliard en 15 ans...
- Impact majeur :
  - économique : des centaines de millions de $ dans l'industrie aérienne
  - santé : traitement en radiothérapie

Formulation d’un modèle PL

- Variable de décisions
  - Des variables mathématiques représentant des décisions

- Fonction Objectif
  - Une équation linéaire qui quantifie un objectif
  - L’objectif le plus fréquent des entreprises est de maximiser les profits.
  - Pour un département de service, on essaie souvent de minimiser les coûts d’opération.

- Contrainte
  - Des équations linéaires qui restreignent les variables de décisions.

Formulation d'un modèle PL

Max/min $\quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

subject to:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m$$

x_j = variables de décision
b_i = terme de droite
c_j = coefficients de la fonction objectif
a_{ij} = coefficients des contraintes

Un exemple

- Un fabricant de … assemble deux produits (A et B)

- Ses ressources sont limitées à:
  - 1000 unités de matériel.
  - 40 heures de production par semaine.

- Le profit est de
  - 8$ pour une unité de A.
  - 5$ pour une unité de B.

Un exemple

- Variable de décision:
  - X_1 = Prodution (hebdo) de produit A
  - X_2 = Prodution (hebdo) de produit B
- Fonction objectif:
  - maximiser le profit hebdomadaire
- Contraintes
  - Produit A consomme 2 unités de matière et 3 minutes de temps.
  - Produit B consomme 1 unité de matière et 4 unités de temps.
  - Pas plus de 700 produits au total par semaine (stockage)
  - Nombre de A ne doit pas dépasser de plus de 350 le nombre de B.

Un exemple

- Le plan de production actuel prévoit:
  - Produire le plus possible de A (le plus profitable)
  - Utiliser les ressources disponibles pour produire du B, tout en respectant les règles.

Le plan consiste donc à produire:

Produit A = 450 unités

Produit B = 100 unités

Profit = 4100$ hebdo

8(450) + 5(100)

Modélisation en PL

Max $8X_1 + 5X_2$ (profit hebdo)

sujet à

$2X_1 + 1X_2 \leq 1000$ (Matière dispo)

$X_1 + 4X_2 \leq 2400$ (Temps dispo)

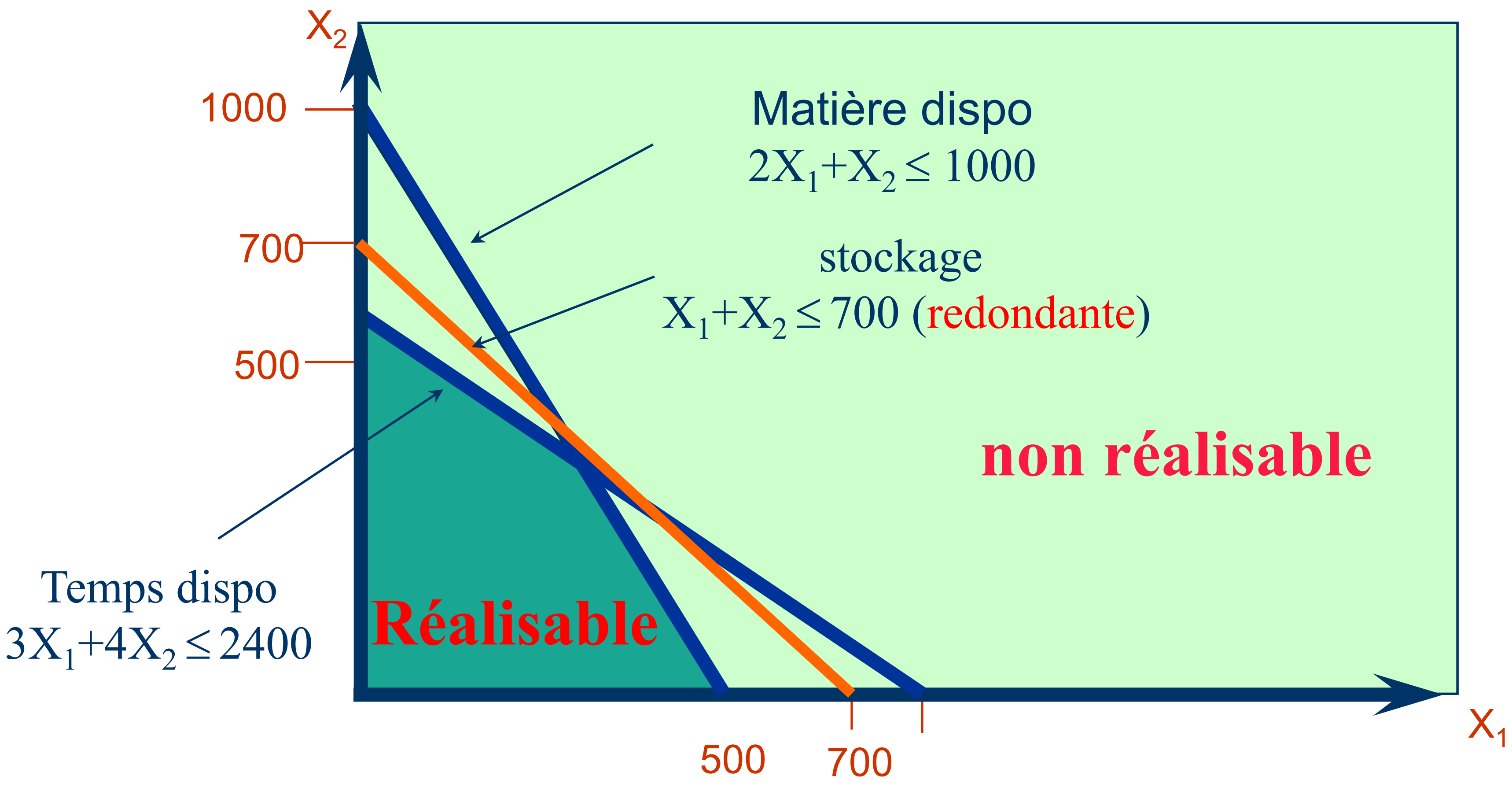
$X_1 + X_2 \leq 700$ (Stockage)

$X_1 - X_2 \leq 350$ (Mélange)

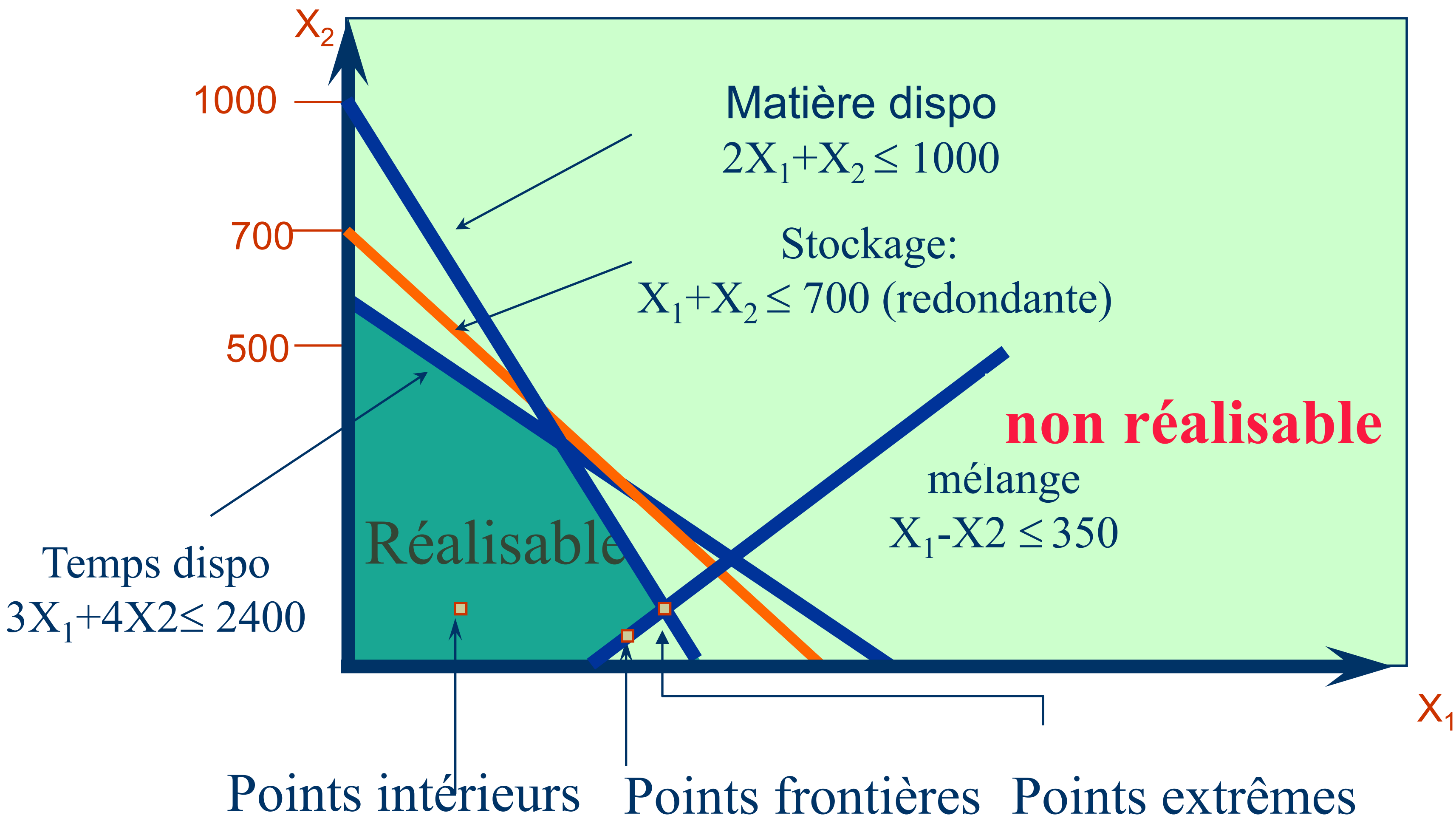
$X_j >= 0, \; j = 1,2$ (Non negativité)

Résolution graphique

Résolution graphique

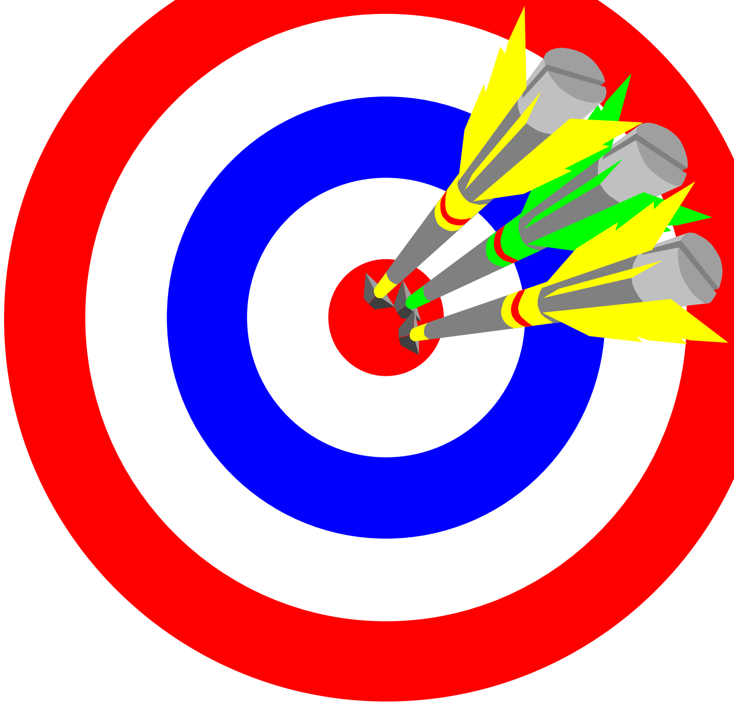


Résolution graphique



- **Trois types de points réalisables**

Trouver une solution optimale

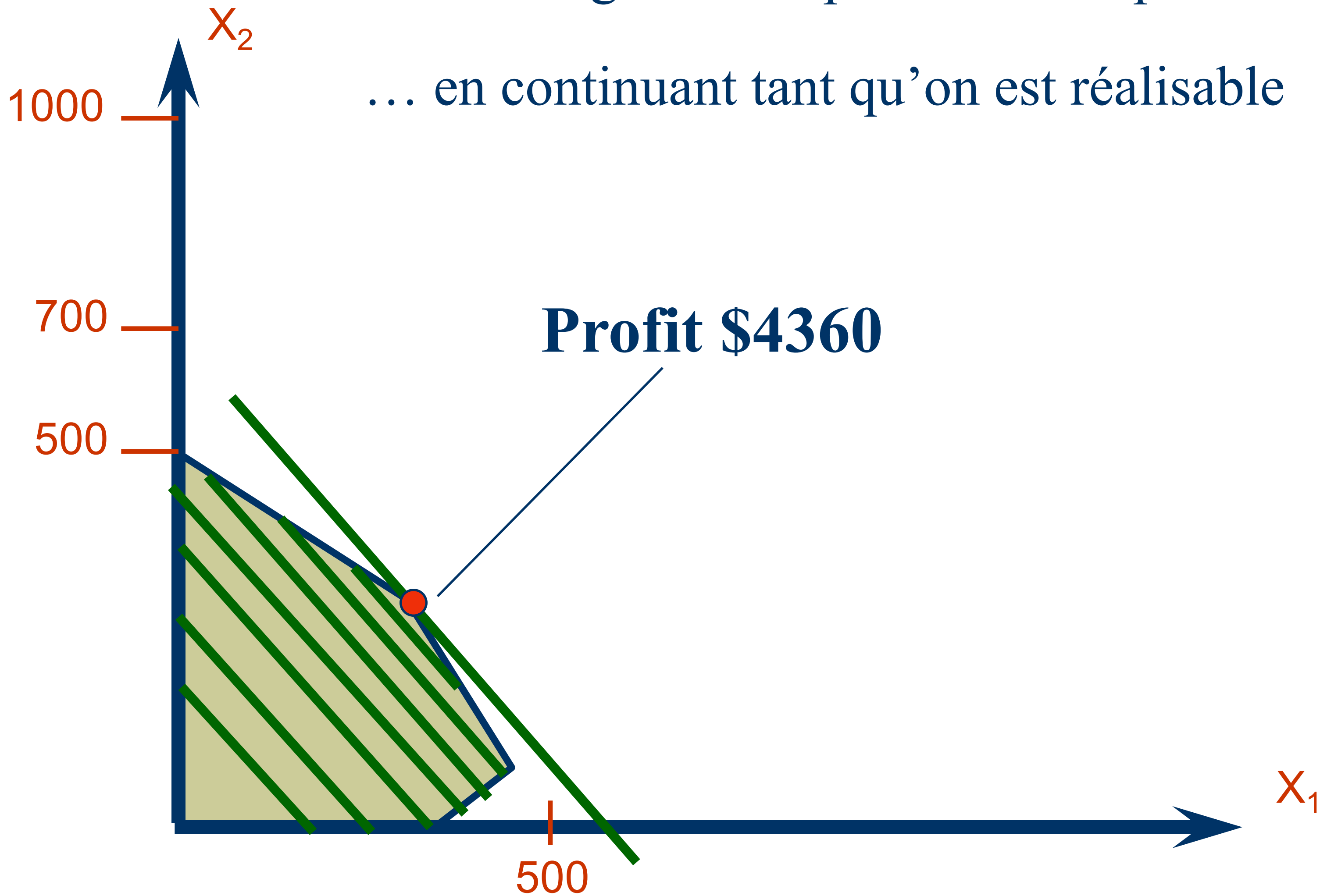


Trouver une solution optimale

Débuter avec un profit arbitraire, disons $2,000...

Ensuite on augmente le profit si c'est possible

… en continuant tant qu'on est réalisable



La solution optimale…

Produit A = 320 unités

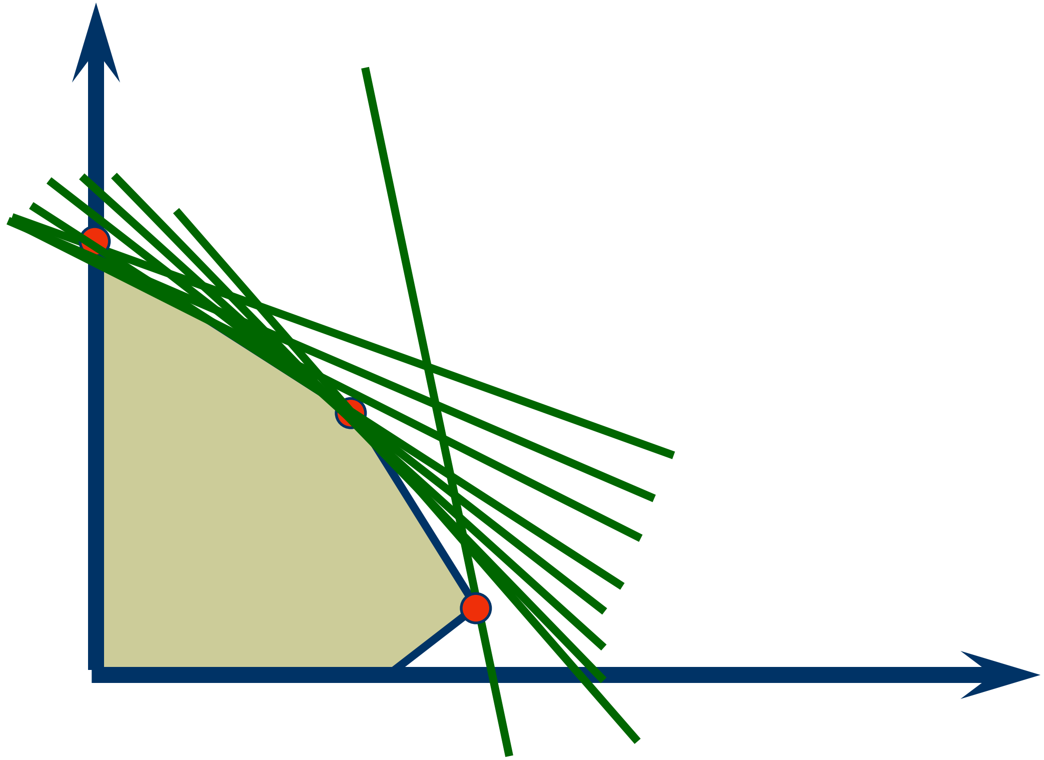
Produit B = 360 unités

Profit = 4360$

- Cette solution utilise tout le matériel et le temps disponible
- La production est de 680 (non 700).
- Produit B dépasse A par 40 unités.

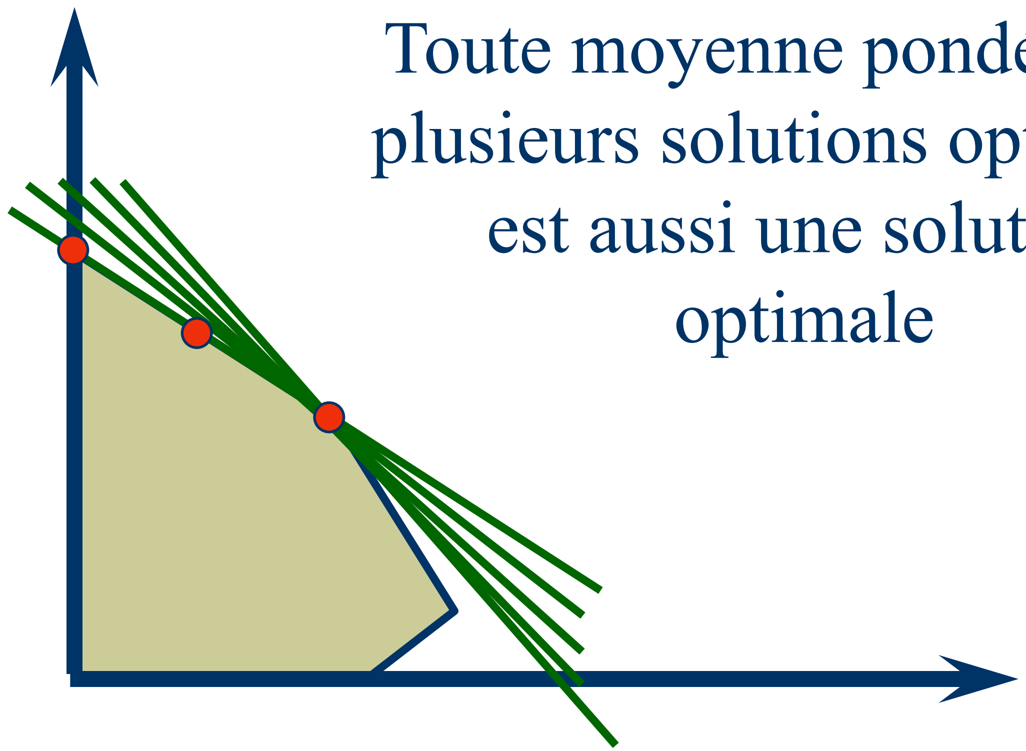
Le rôle des points extrêmes…

Si un programme linéaire à une solution optimale, alors au moins un point extrême est optimal.



Plusieurs solutions optimales

Si plusieurs solutions optimales existent alors la fonction objectif doit être parallèle à au moins une des contraintes



Toute moyenne pondérée de plusieurs solutions optimales est aussi une solution optimale

L’analyse de sensibilité

- Est-ce que la solution optimale est sensible aux paramètres du problème ?

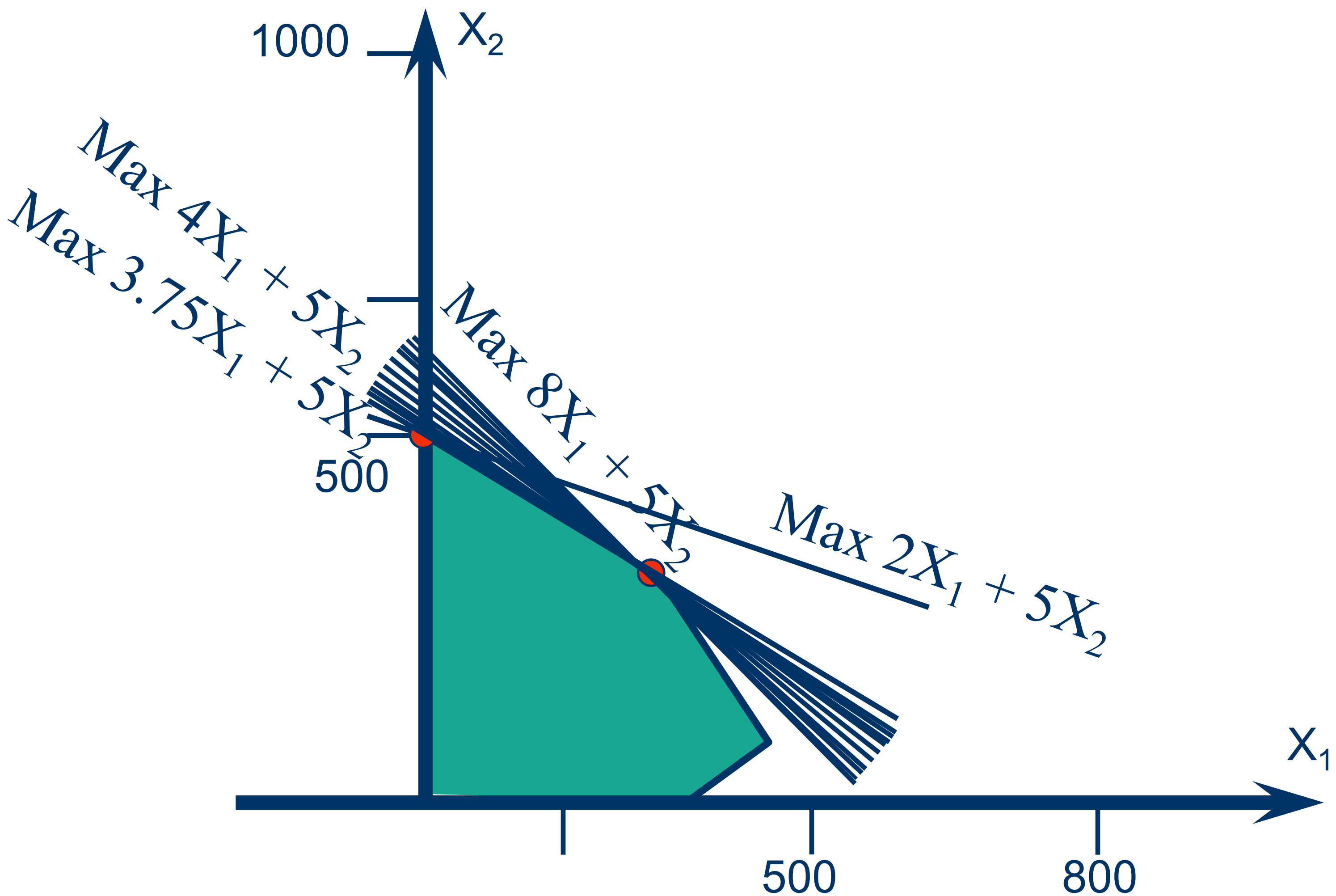
- Pourquoi se poser cette question ?
  - Les paramètres utilisés ne sont que des estimations
  - Dans un environnement dynamique, ceux-ci peuvent changer régulièrement.
  - Une analyse de scénarios (what-if) peut permettre de proposer des changements aux paramètres.

Analyse de sensibilité (objectif)

Intervalle d'optimalité

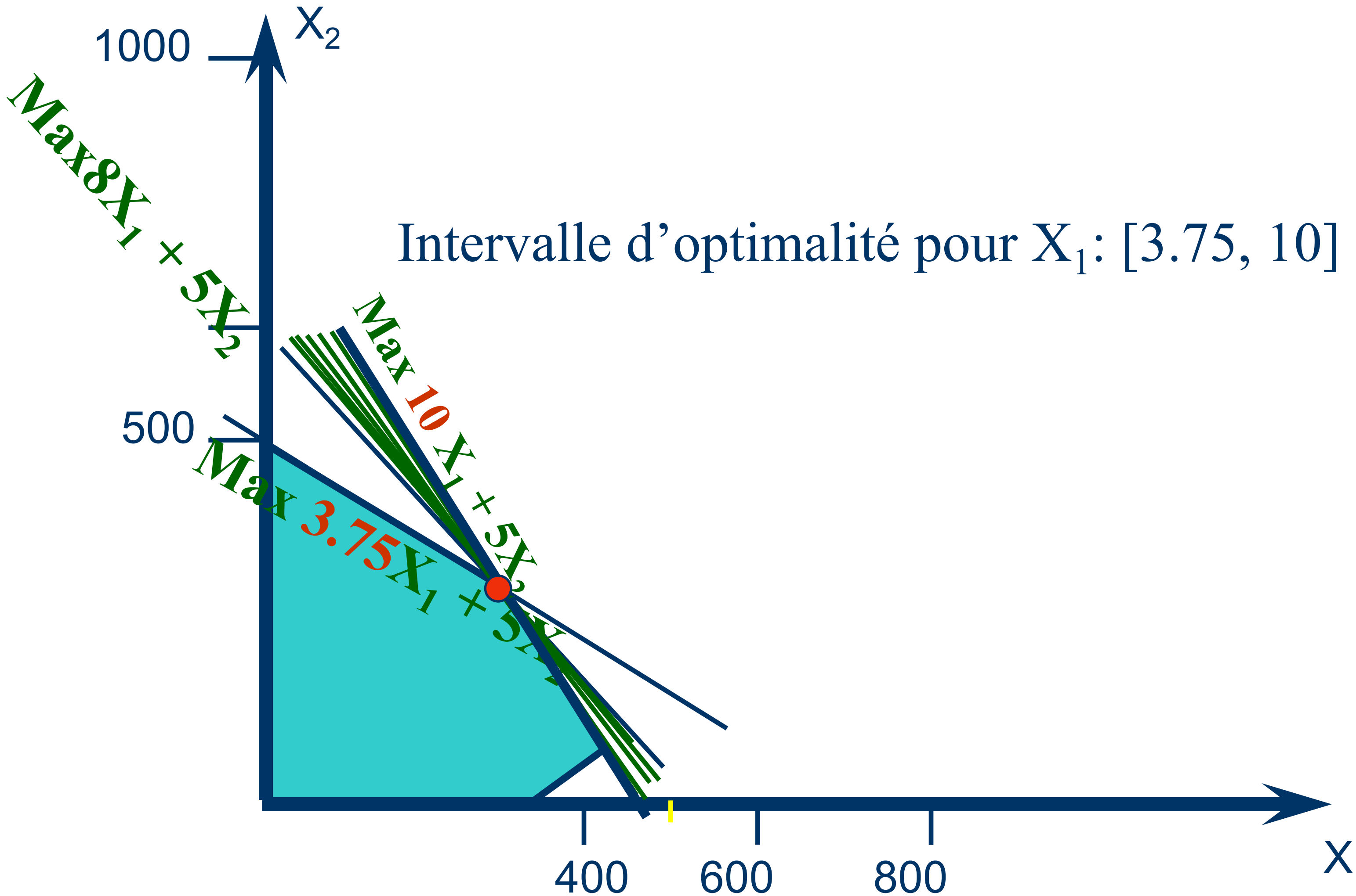
- La **solution** optimale demeurera inchangée tant que:
  - Un coefficient de la fonction objectif demeure dans son **intervalle d'optimalité;**
    - Rien d'autre ne change.
- La **valeur** de cette solution changera si:
  - Le coefficient qui a changé multiplie une variable dont la valeur optimale est non nulle.

Analyse sensibilité (objectif)



Analyse sensibilité (objectif)

Intervalle d'optimalité pour X_1: [3.75, 10]



Analyse de sensibilité (objectif)

- Coûts réduits

  En assumant que rien d'autre ne change dans les paramètres, le coût réduit d'une variable qui vaut 0 dans la solution optimale est:

  - L'inverse de l'augmentation du coefficient de l'objectif de la variable X_j ($-\Delta C_j$) nécessaire pour que la variable devienne positive dans la solution optimale.
  - OU, c'est le changement à la valeur de l'objectif pour chaque unité d'augmentation de X_j (nulle).

- Écart complémentaire

  Pour une solution optimale, soit la variable vaut 0, soit c'est son coût réduit qui vaut 0.

Analyse sensibilité (termes de droite)

- L'analyse de sensibilité du terme de droite des contraintes est utile pour répondre aux questions suivantes:
  - En conservant tous les paramètres inchangés, de combien l'objectif de la solution optimale changerait si on modifiait le terme de droite d'une contrainte.
  - Pour combien d'unité supplémentaire (ou de moins) est-ce que la solution optimale demeurerait la même ?

Analyse sensibilité (termes de droite)

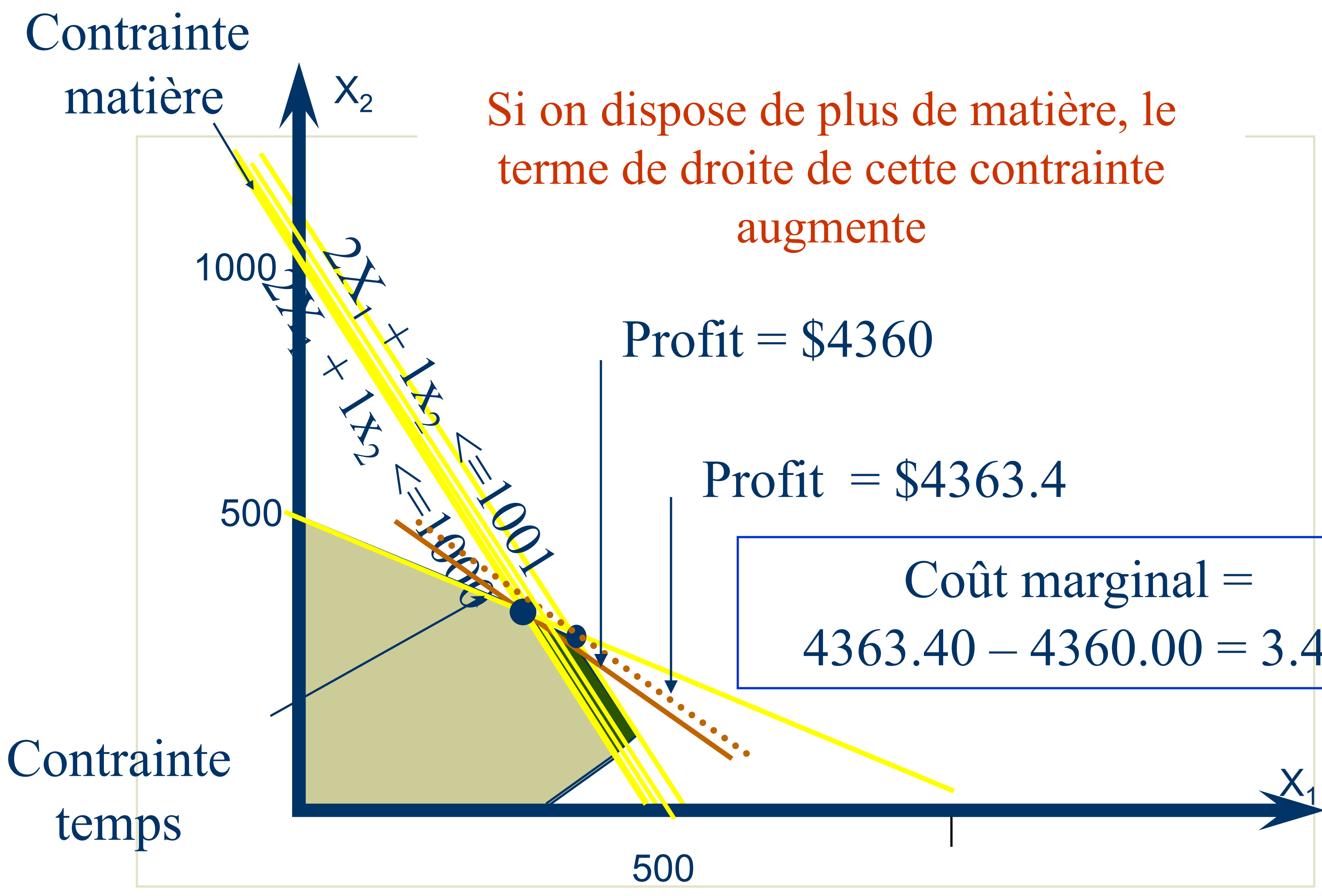
- Tout changement au terme de droite d'une contrainte active (qui touche la solution optimale) entraînera une modification de la solution optimale.

- Tout changement au terme de droite d'une contrainte inactive qui est plus petite que l'écart entre la solution et cette contrainte n'entrainera pas de modification à la solution optimale.

Coûts marginaux

- En assumant que rien d’autre ne change dans les paramètres, l’augmentation de la valeur de l’objectif pour chaque augmentation d’une unité du terme de droite d’une contrainte est nommée le coût marginal de cette contrainte

Coût marginal (graphique)

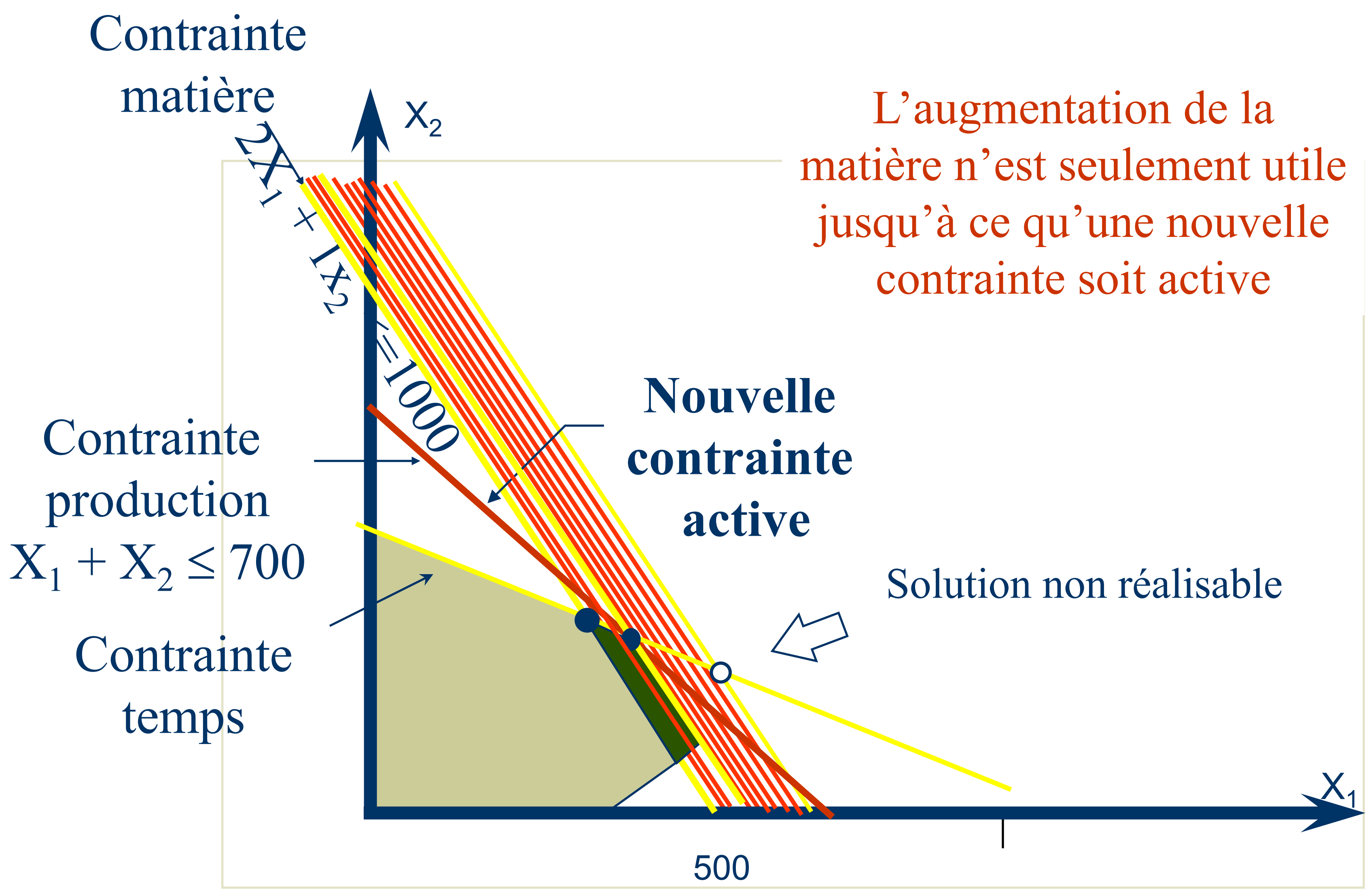


Coût marginal =
4363.40 – 4360.00 = 3.40

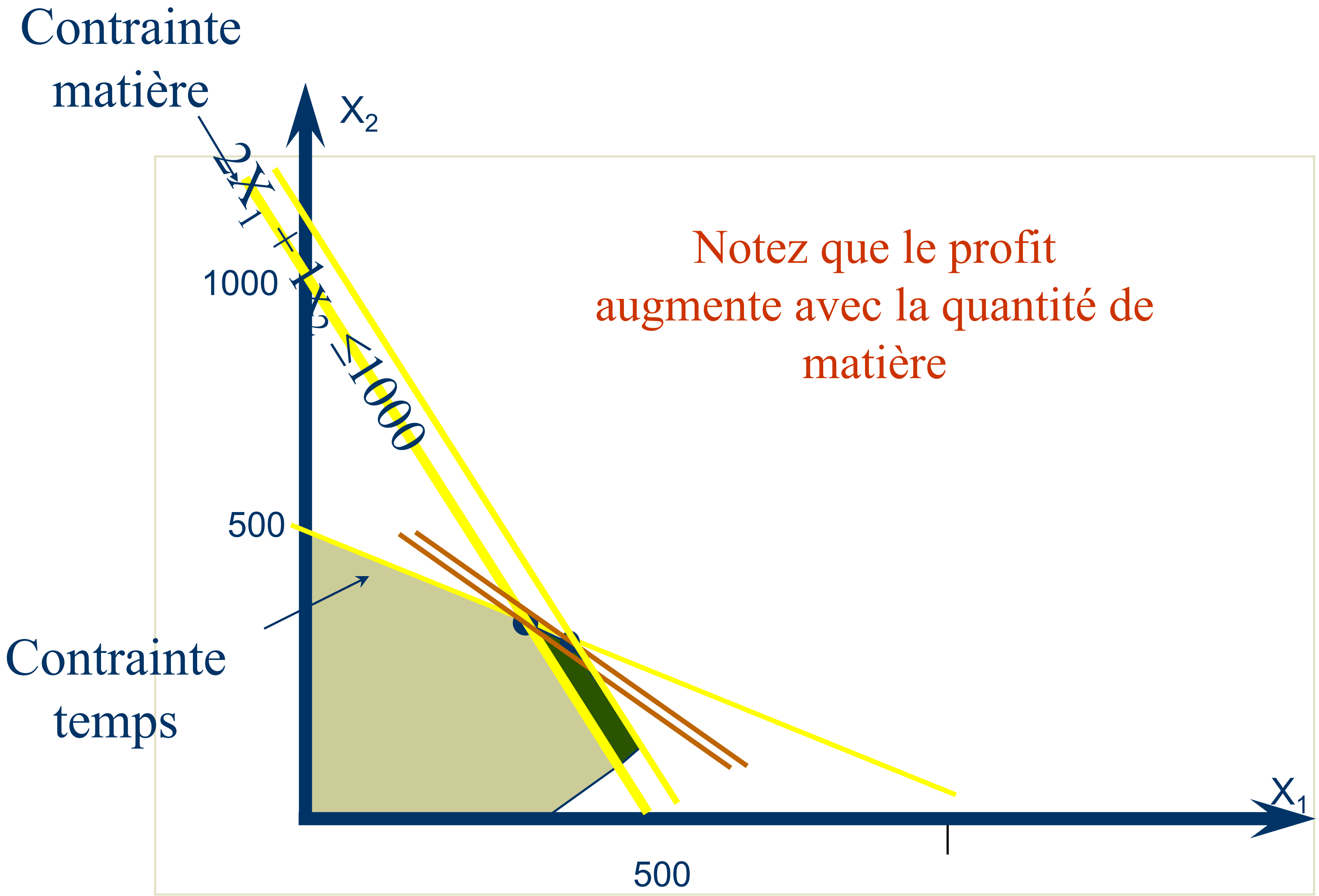
Intervalle de réalisabilité

- En assumant que rien ne change dans les paramètres, **l'intervalle de réalisabilité** est défini comme:
  - L'intervalle dans lequel le terme de droite d'une contrainte peut varier, sans que le coût réduit n'en soit affecté.
  - Dans cet intervalle, la fonction objective varie comme suite: Obj = Obj + CoutRed * Modif.

Intervalle de réalisabilité

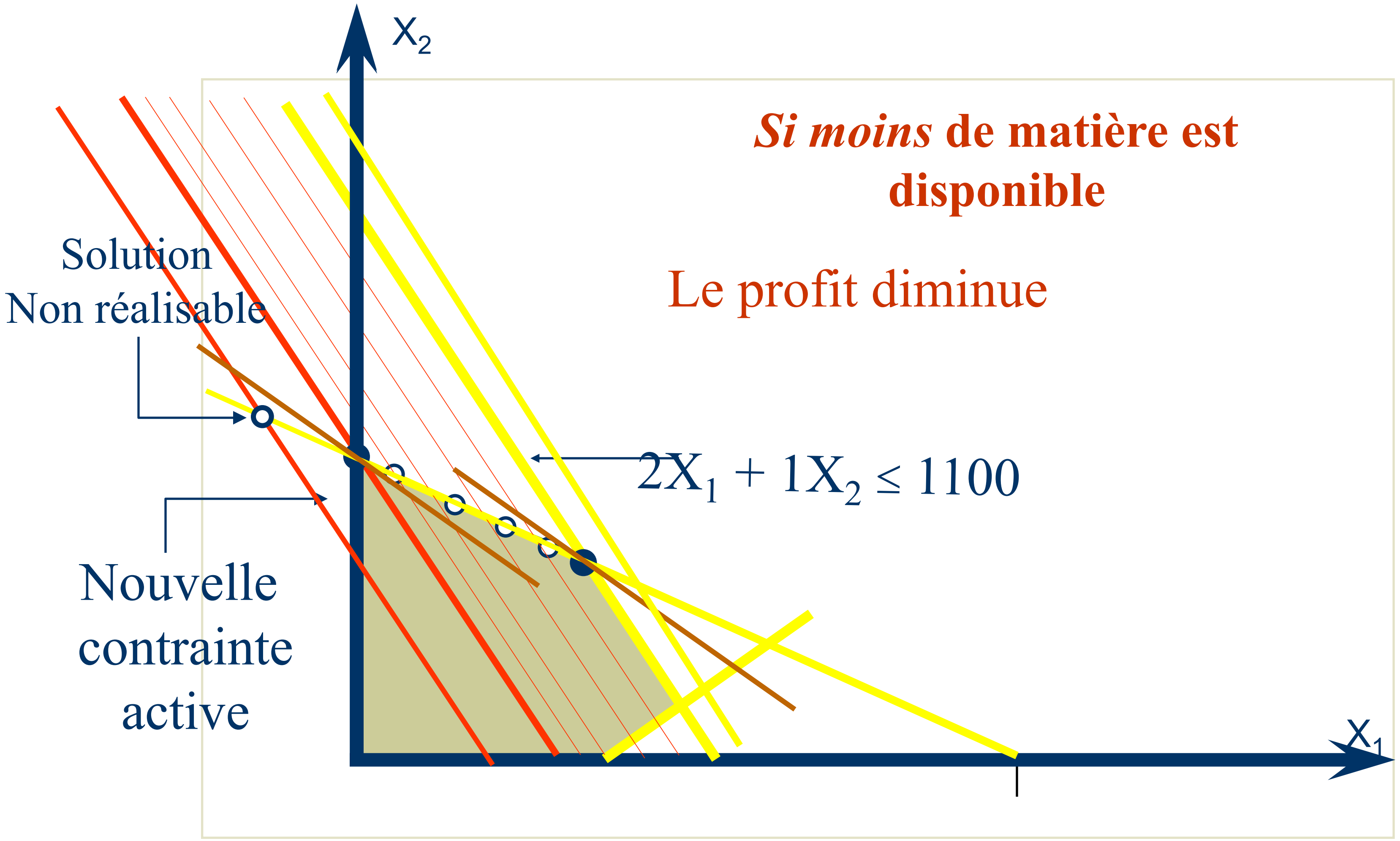


Intervalle de réalisabilité



Notez que le profit augmente avec la quantité de matière

Intervalle de réalisabilité



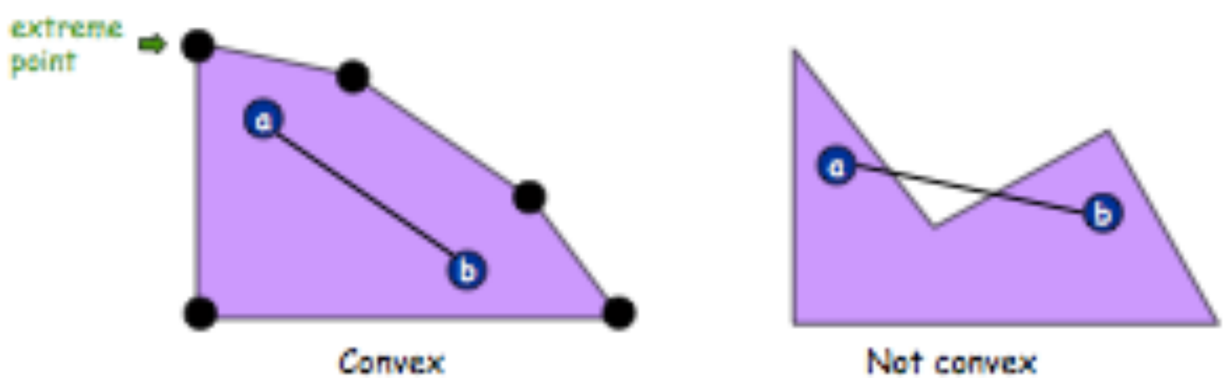
Changement post-optimalité

- Ajouter une contrainte.
- Retirer une contrainte.
- Ajouter une variable.
- Effacer une variable.
- Changement des les coefficients de gauche des contraintes.

Résolution par le simplex

- Les inégalités représentent des plans (en 2D) ou des hyperplans.
- Un ensemble d'inégalités permet de construire un espace réalisable borné que l'on appelle un polygone convexe (2D) ou polyèdre convexe.

- Un rappel sur la convexité :
  - Soit a et b deux solutions réalisables d'un polyèdre convexe, alors (a+b)/2 est aussi une solution de ce polyèdre

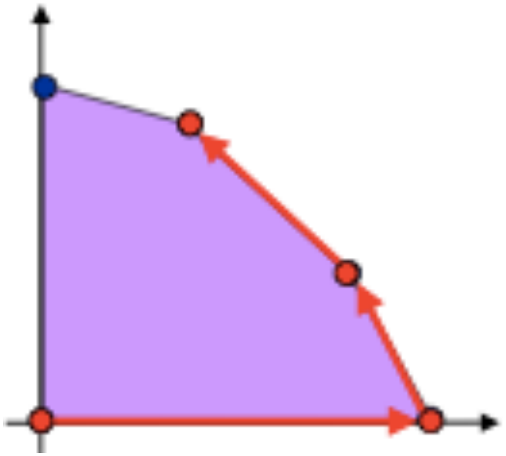


Encore un peu de géométrie...

- La propriété des points extrêmes nous dit que si un polyèdre (P) contient une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est située sur un point extrême.
- La bonne nouvelle : on ne peut que considérer les points extrêmes :-)
- La mauvaise nouvelle : Le nombre de points extrêmes peut-être exponentiellement élevé par rapport au nombre de variables de décision.
- Le prix de consolation : la convexité garantit que les optimums locaux sont des optimaux globaux.
  - C'est-à-dire qu'un point extrême est optimal si tous ses voisins sont pires que lui.
  - Mais attention aux plateaux…

L’algorithme du simplexe (Dantzig, 1947)

- Développé juste après la Seconde Guerre mondiale
- Utilisé pour planifier le pont aérien de Berlin en 1948.
- Les grandes lignes de l’algorithme :
  - La recherche démarre d’un point extrême
  - Elle se déplace (pivot) vers un point extrême voisin
  - On répète jusqu’à l’obtention de la solution optimale



Problèmes rencontrés en PL.

- La programmation linéaire est un outil de modélisation et de résolution très puissant.

- Par contre, dans certaines situations, on peut rencontrer certaines difficultés…
  - Solutions optimales multiples
  - Phénomène de dégénérescence et cyclage
  - Solution réalisable inexistante
  - Solution non bornée

Solutions optimales multiples

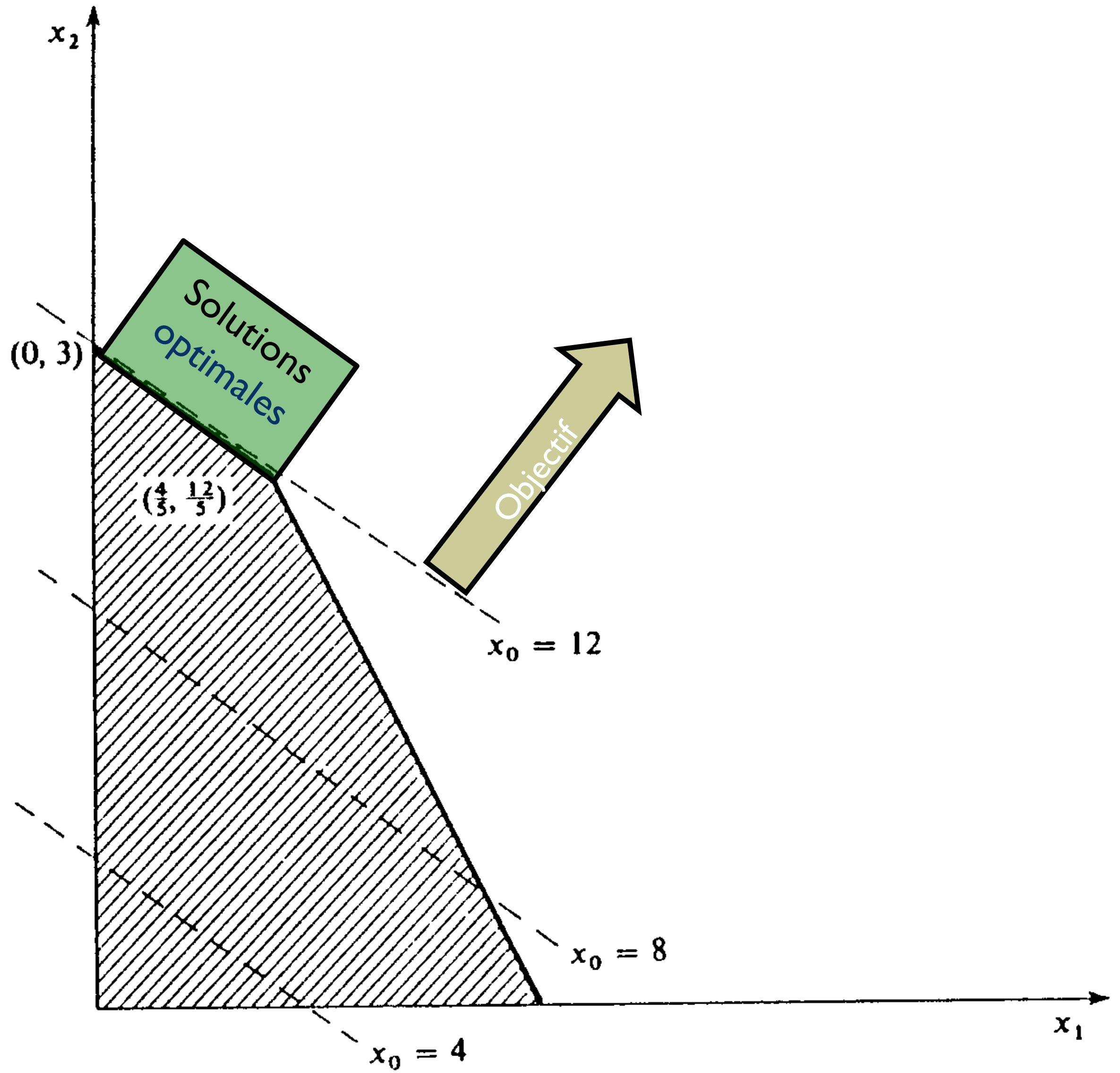
- Soit le problème linéaire suivant:

$$\text{Max} \quad z = 3x_1 + 4x_2$$

sujet à:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & \leq & 10 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Solutions optimales multiples



Solutions optimales multiples

- La fonction objectif tracée au niveau optimal coïncide avec la droite (contrainte): $3x_1 + 4x_2 = 12$
- Tous les points sur le segment de droite joignant (0,3) à $(\frac{4}{5}, \frac{12}{5})$ représentent des solutions optimales i.e.:

$$3x_1^* + 4x_2^* = 12$$
$$0 \leq x_1^* \leq 4/5$$
$$12/5 \leq x_2^* \leq 3$$
$$z^* = 12$$

Solutions réalisables inexistantes

- Soit le programme linéaire suivant:

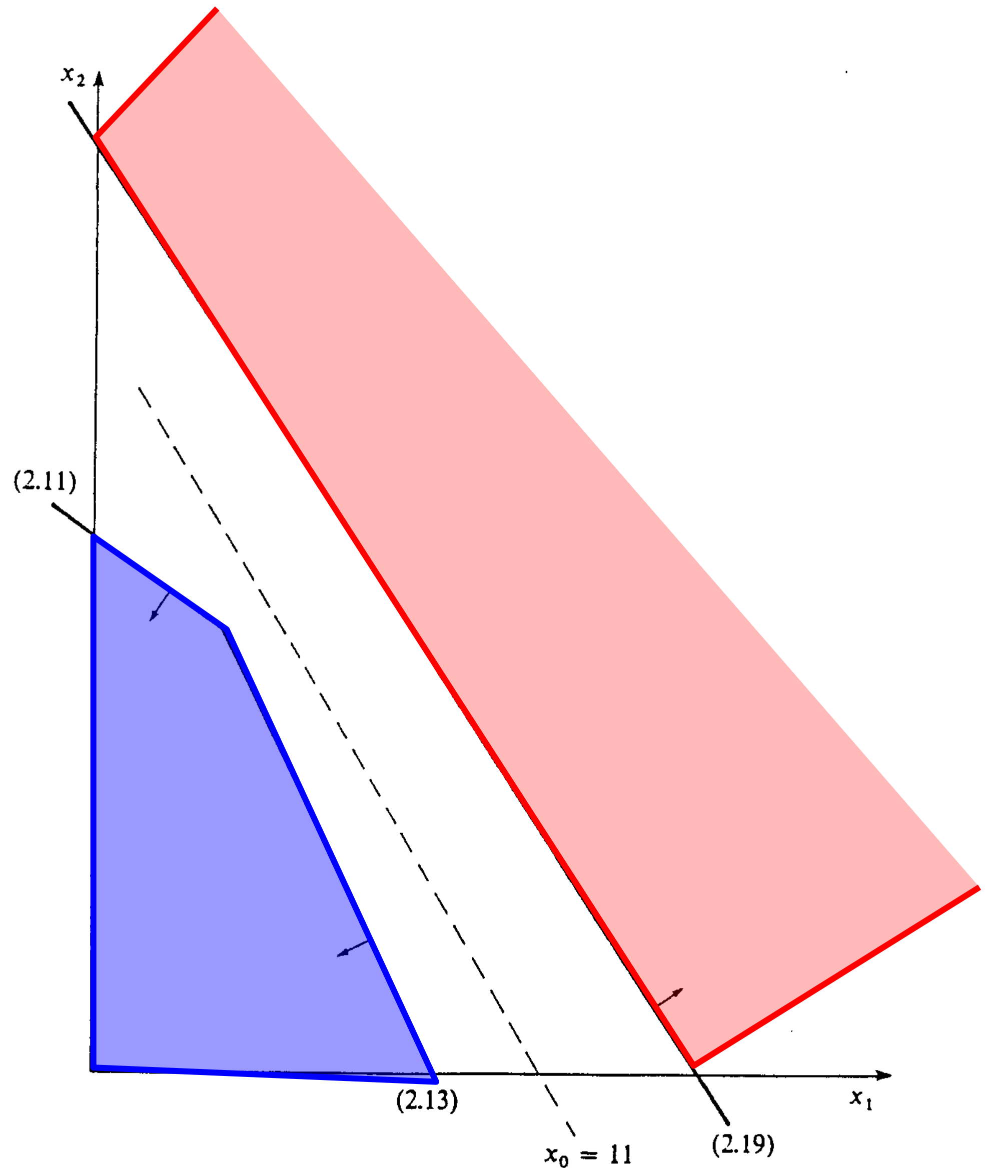
$$\text{Max} \quad x_0 = 4x_1 + 3x_2$$

Sujet à:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 &\leq 12 \qquad (2.11)\\
x_1 + x_2 &\geq 4 \qquad (2.19)\\
4x_1 + 2x_2 &\leq 8 \qquad (2.13)\\
x_1 &\geq 0\\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Solutions réalisables inexistantes

- Il n’existe pas de point qui satisfasse toutes les contraintes simultanément.

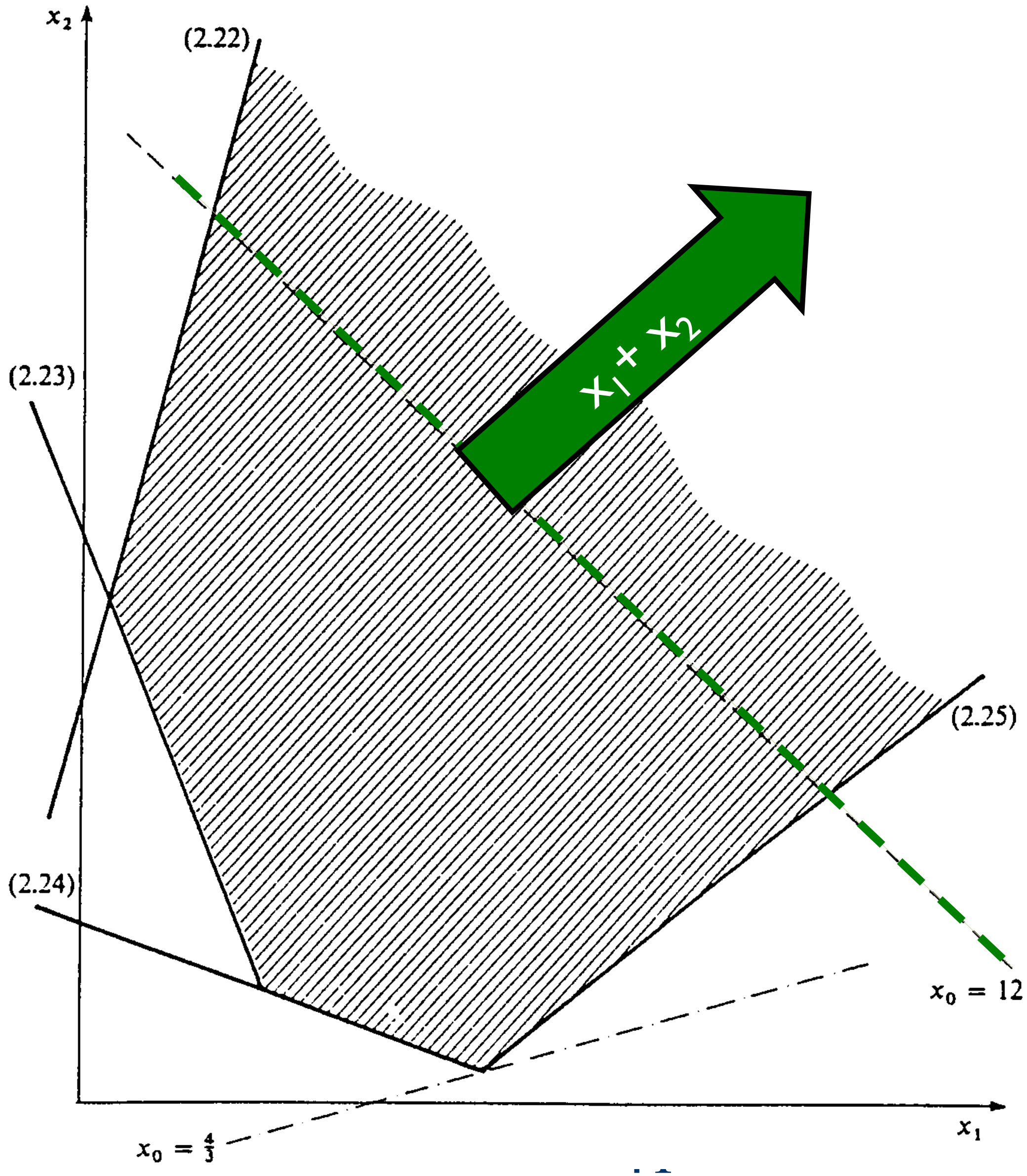


Problème de PL non borné

- Soit le programme linéaire suivant:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{Max} & z & = & x_1 & + & x_2 & & & (2.21) \\
\text{Sujet à:} & & & & & & & & \\
& & & -4x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & (2.22) \\
& & & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 & (2.23) \\
& & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 4 & (2.24) \\
& & & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 & (2.25) \\
& & & & & x_1 & \geq & 0 & \\
& & & & & x_2 & \geq & 0. &
\end{array}
$$

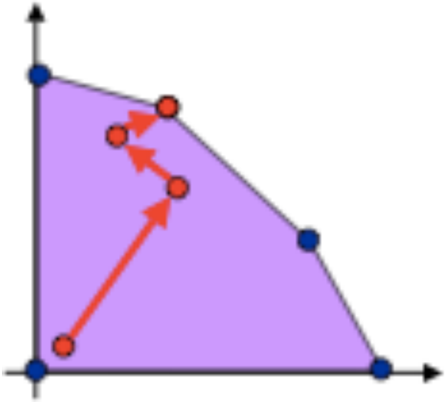
Problème de PL non borné



Pas de solution optimale

D' autres algorithmes pour résoudre les PLs

- Il existes d'autres algorithmes pour résoudre des programmes linéaires, en particulier les méthodes de points intérieurs
  - En théorie ces méthodes converge dans un temps polynomial (elles devrait donc bcp plus efficaces que le simplex)



- En pratique elles fonctionnent mieux que l'espaces est plus «lisse» alors que le simplexe semble plus efficaces quand les arrêtes sont plus prononcées.

Exemple : le problème du brasseur

École Polytechnique Montréal

- Une petite micro-brasserie produit 2 types de produit (une Ale et une Bière). Suite à une sécheresse, la production doit être limitée par le manque de ressources en céréales (maïs, houblon, malte).
- Le tableau suivant donne les recettes utilisées pour la production, ainsi que les ressources disponibles et le profit associé à chaque produit.

Bière	Mais (lb)	Houblon(on)	Malte(lb)	Profit($)
Ale	5	4	35	10
Bière	15	4	20	23
Quantité	480	160	1190	

- Comment le brasseur peut-il maximiser son profit ?
  - Ne faire que de l'Ale ?
  - Ne faire que de la Bière ?
  - 7,5 barils d'Ale et 29,5 barils de Bière ?
  - 12 barils d'Ale et 28 barils de Bière ?

Exemple : le problème du brasseur

- Trouver le mélange optimal
- De combien peuvent varier les prix sans qu'il ne faille changer le plan de production.
- De quelle matière première devrait négocier davantage de volume.
- De quelle matière première pourrait-on réduire le volume (et de combien).
- Que se passe-t-il si le prix de la bière monte à 30 $?