# Outils de Recherche Opérationnelle en Génie

# MTH 8414

Astuce de modélisation en Programmation Linéaire

# Résumé

- Les problèmes ne se présentent pas toujours sous une forme qui soit naturellement linéaire.

- Toutefois comme la PL est une technique très efficace, il est souvent avantageux de « reformuler » un problème de manière à ce qu'il soit linéaire.

- On présente donc ici quelques trucs et astuces en vrac…

- À noter que leur efficacité dépend de chaque solveur et de leur capacité à effectuer un prétraitement sur les modèles.

- Cette section est tirée du chapitre 6 du livre AIMMS-modeling.

# Valeur absolue

- Soit le problème linéaire suivant (le signe : $\gtrless$ signifie <= ou >=)

$$\textbf{Minimize:} \quad \sum_{j \in J} c_j |x_j| \qquad c_j > 0$$

$$\textbf{Subject to:} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \quad \mathit{free}$$

- La valeur absolue n’étant pas une fonction linéaire, il faut trouver une manière de s’en débarrasser…

# Valeur absolue

- Pour ce faire on va remplacer chaque variable $x_j$ par deux autres variables $x_j^+$ et $x_j^-$ qui représente les parties positives et négatives de chaque variable.

- Pour ce faire on applique la substitution suivante:

$$
\begin{aligned}
x_j &= x_j^+ - x_j^- \\
|x_j| &= x_j^+ + x_j^- \\
x_j^+, x_j^- &\geq 0
\end{aligned}
$$

- Ce qui nous donne le modèle suivant:

**Minimize:** $$\sum_{j \in J} c_j (x_j^+ + x_j^-) \qquad c_j > 0$$

**Subject to:**

$$\sum_{j \in J} a_{ij} (x_j^+ - x_j^-) \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j^+, x_j^- \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

# Valeur absolue

- La valeur optimale de ces deux modèles si pour chaque *j* au moins une des deux valeurs de $x_j^+$ et $x_j^-$ est 0.
- Dans ce cas $x_j^+ = x_j$ si $x_j >= 0$ et $-x_j^- = x_j$ si $x_j <= 0$

- Dans le cas ou $x_j^+$ et $x_j^- > 0$ pour un certain *j*,
  - définissions $d = \min(x_j^+, x_j^-)$, $d$ est donc $> 0$
  - Soustrayons $d$ de $x_j^+$ et de $x_j^-$
  - Ceci ne change en rien la valeur de $x_j = x_j^+ - x_j^-$
  - Mais la valeur de $|x_j| = x_j^+ + x_j^-$ est réduite de $2d$
  - Ce qui contredit le fait que la solution était optimale, puisqu'il est possible de la réduire de $2d$.

- *Sous quelle condition la technique précédente est-elle valide ?*

# Valeur absolue: un exemple

- La valeur absolue représente souvent une *déviation* (un écart positif ou négatif) par rapport à une cible souhaitée.

- Prenons l'exemple d'une régression linéaire:
  - On veut déterminer la droite qui permet le mieux possible d'expliquer un ensemble de points ($v_j$,$w_j$).
  - Les coefficients de la droite sont donnés par *a* et *b* de sorte que *w = av+b* (*a* est la pente de la droite et b est l'ordonnée à l'origine).
  - Le problème de la régression linéaire est posé comme suit:

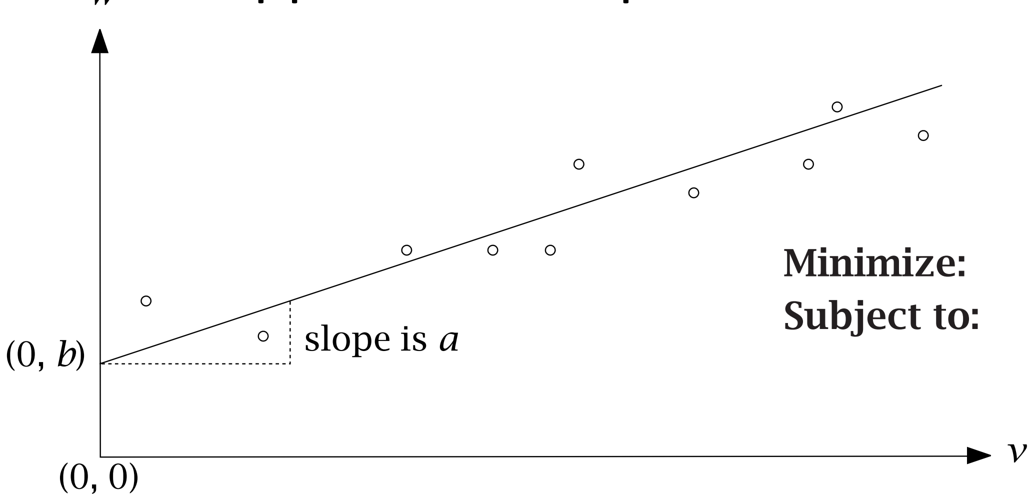
**Minimize:** $f(z)$

**Subject to:**

$$w_j = av_j + b - z_j \qquad \forall j \in J$$

# Valeur absolue: un exemple

- Dans ce modèle $z_j$ représente la différence entre $av_j+b$ (la prédiction de la droite) et $w_j$ (l'observation réelle). C'est en quelque sorte l'erreur d'approximation par une droite.




**Minimize:** $f(z)$

**Subject to:** $w_j = av_j + b - z_j \qquad \forall j \in J$

- On minimise f(z), une fonction de l'erreur qui peut être:
  - La somme des carrés $$f(z) = \sum_{j \in J} z_j^2$$
  - La somme des valeurs absolues $$f(z) = \sum_{j \in J} |z_j|$$
  - L'erreur maximale $$f(z) = \max_{j \in J} |z_j|$$

# Objectif minimax

- Considérer le modèle suivant (le signe : $\gtrless$ signifie <= ou >=)

**Minimize:** $$\max_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} x_j$$

**Subject to:**

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Si par exemple on a K = {1,2,3} et J = {1,2} alors l'objectif sera
  - Minimiser Max( $c_{11}x_1 + c_{12}x_2$, $c_{21}x_1 + c_{22}x_2$, $c_{31}x_1 + c_{32}x_2$)

- On retrouve ce type de problème lorsqu'on veut réduire le pire cas, comme l'erreur maximum, la violation maximale, etc.

# Objectif minimax

- Encore une fois, on peut linéariser cet objectif en ajoutant une nouvelle variable: la valeur du coût maximum:

$$z = \max_{k \in K} \sum_{j \in J} c_{kj} x_j$$

- Toutefois l'opération *max* doit disparaitre, on doit donc plutôt introduire cette variable à travers des contraintes liantes nécessaires:

**Minimize:** $z$

**Subject to:**

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$\sum_{j \in J} c_{kj} x_j \leq z \qquad \forall k \in K$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- En minimisant z, on s'assure de minimiser les |K| objectifs. De plus, on garantit que *z* est égal au maximum des coûts (pourquoi ?)

# Objectif fractionnaire

- Considérons le modèle suivant:

**Minimize:**

$$\Big(\sum_{j\in J} c_j x_j + \alpha\Big) \Big/ \Big(\sum_{j\in J} d_j x_j + \beta\Big)$$

**Subject to:**

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Ici nous avons un ratio de deux termes linéaires, et tout le reste du modèle est linéaire. Il faut donc transformer l'objectif.
- On retrouve ce genre de modèle lorsqu'on traite des données financières par exemple (taux de rendement).

# Objectif fractionnaire

- Encore une fois, nous introduirons des variables supplémentaires afin de linéariser le modèle.
  - Supposons sans perte de généralité que le dénominateur soit positif (sinon il faut inverser les inégalités)
  - Nous utiliserons les variables $t$ et $y_i$ défini comme suit: $y_j = tx_j$
- On substitue l'inégalité ci-dessous dans le modèle originel.

$$t = 1/(\sum_{j\in J} d_j x_j + \beta) \Longrightarrow$$

**Minimize:**

$$\sum_{j\in J} c_j x_j t + \alpha t$$

**Subject to:**

$$\sum_{j\in J} a_{ij} x_j \gtrless b_i \qquad \forall i \in I$$

$$\sum_{j\in J} d_j x_j t + \beta t = 1$$

$$t > 0$$

$$x_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

# Objectif fractionnaire

- Ensuite on multiplie chaque côté des contraintes originelles par *t* *($t >= 0$)* et on réécrit le modèle en terme de $y_j$ et de $t$ (où $y_j = tx_j$).

**Minimize:**

$$\sum_{j \in J} c_j y_j + \alpha t$$

**Subject to:**

$$\sum_{j \in J} a_{ij} y_j \gtrless b_i t \qquad \forall i \in I$$

$$\sum_{j \in J} d_j y_j + \beta t = 1$$

$$t > 0$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j \in J$$

- Finalement on permet à $t$ d'être >=0 plutôt que >0 afin d'obtenir un programme linéaire.
- Les valeurs de $x_j$ peuvent être obtenus de la solution optimale en divisant $y_j$ par $t$