Outils de Recherche Opérationnelle en Génie

MTH 8414

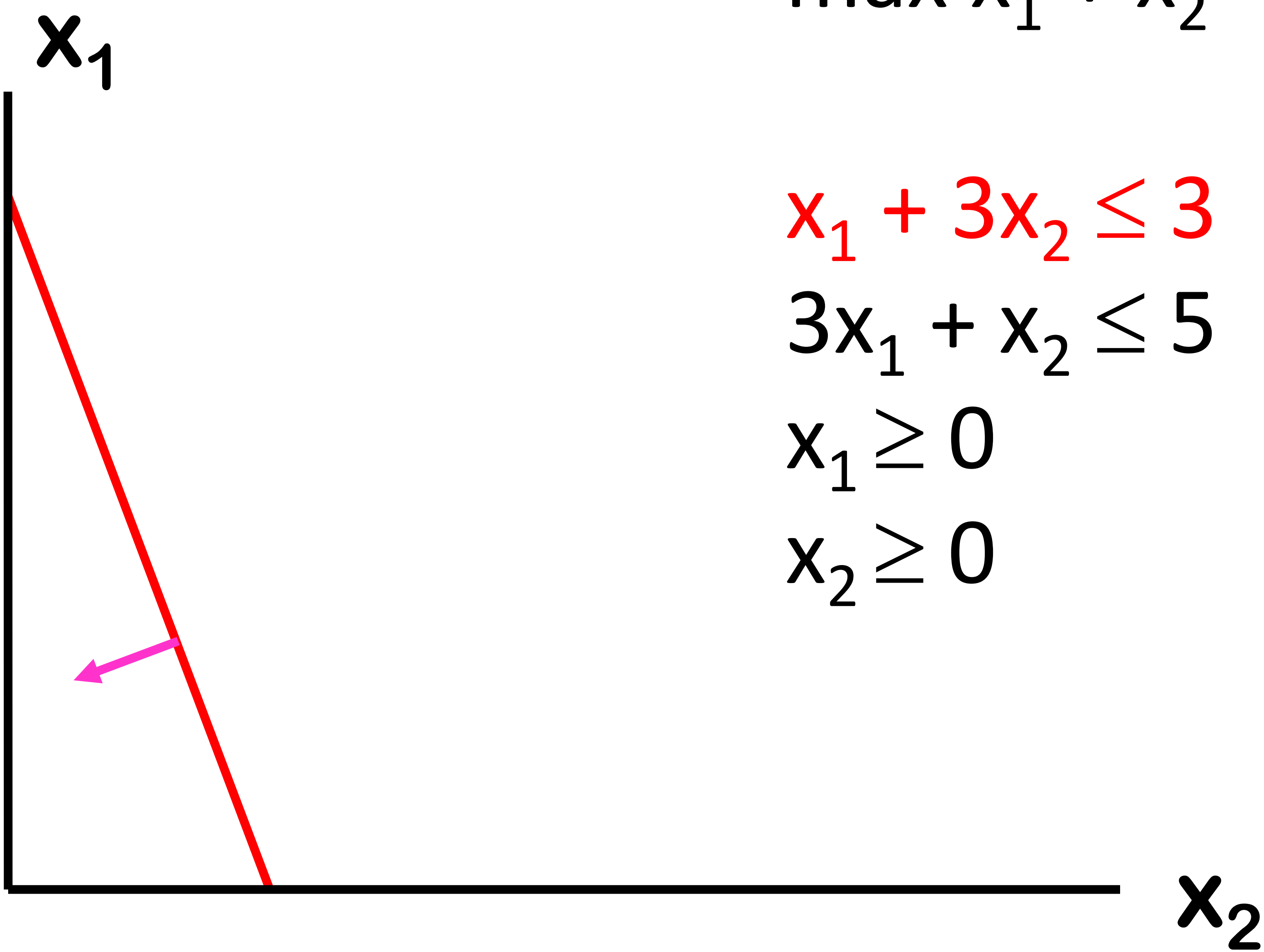
La dualité

Soit un modèle linéaire

$$\text{maximise } x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

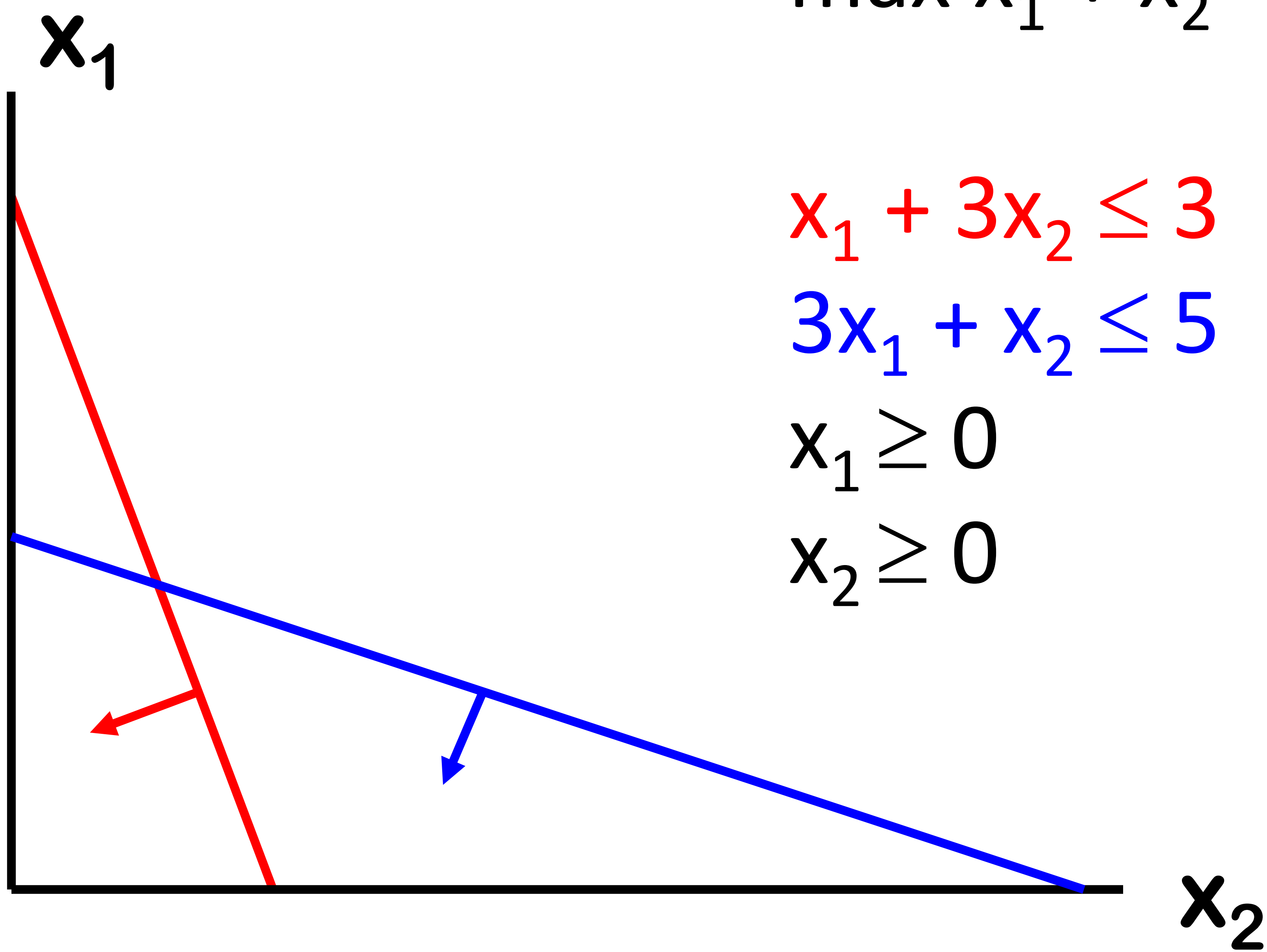
Soit un modèle linéaire



$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Soit un modèle linéaire



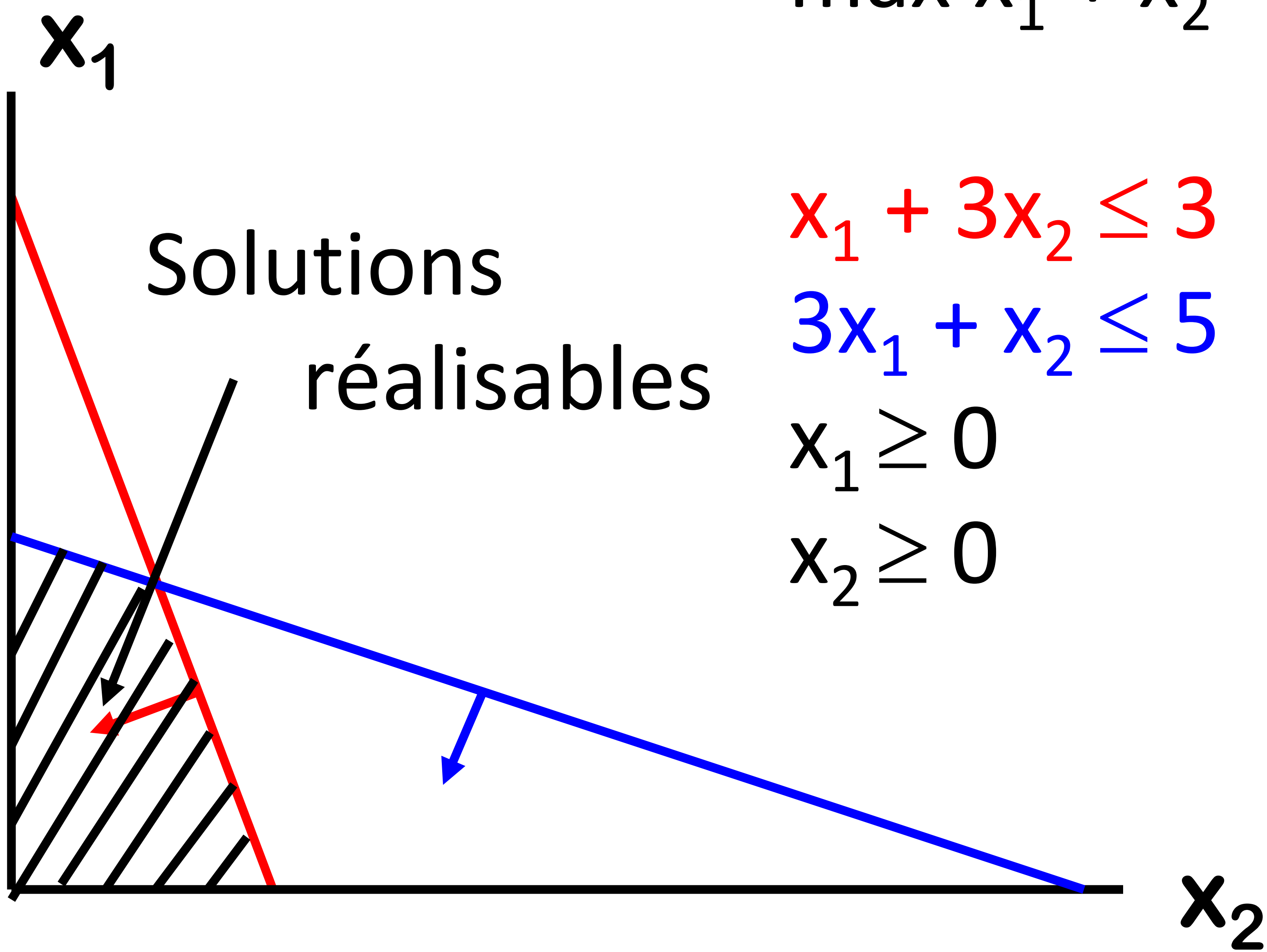
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Soit un modèle linéaire

$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



Soit un modèle linéaire

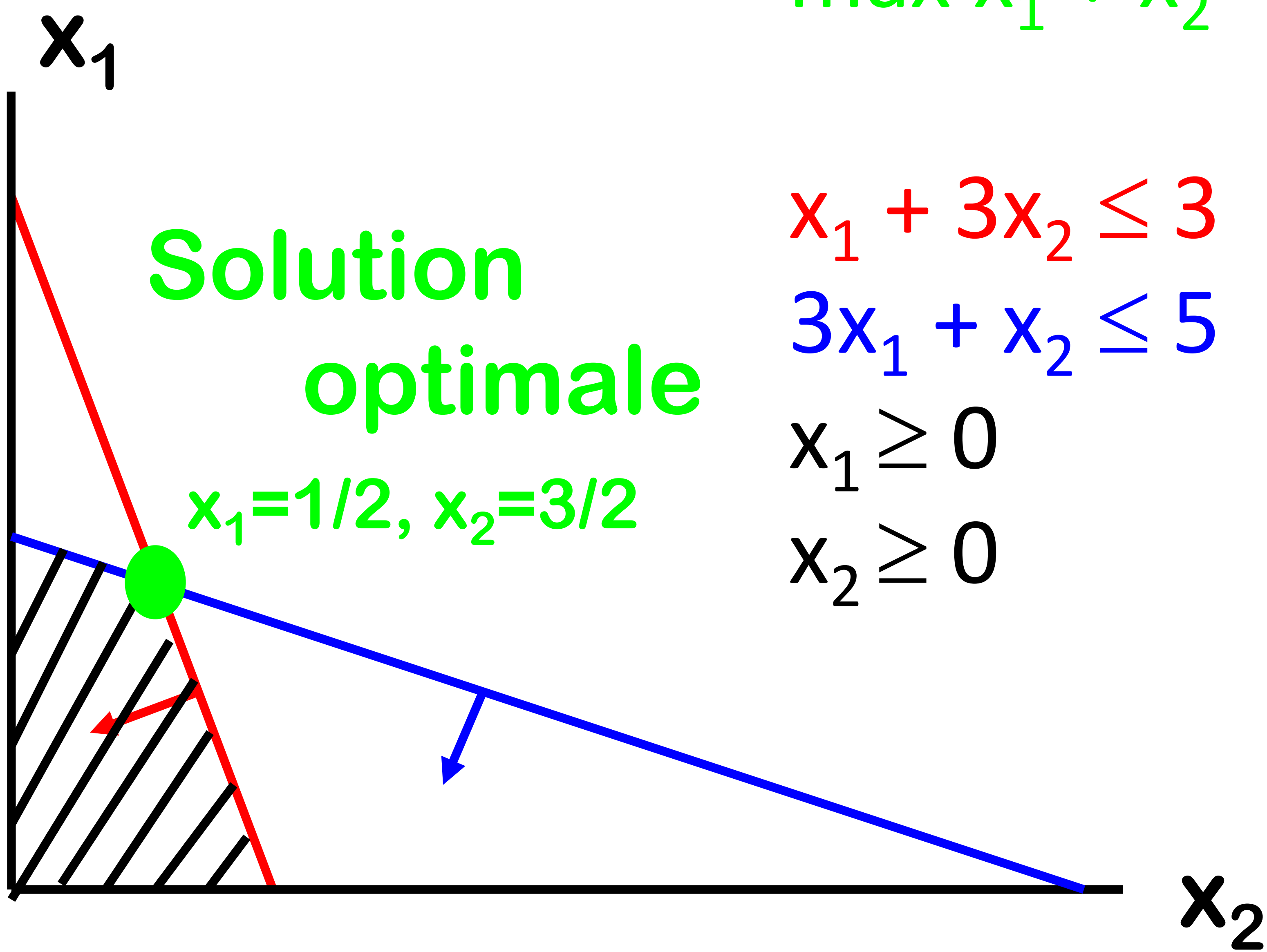
$$\max x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$



Pouvez-vous prouver l'optimalité?

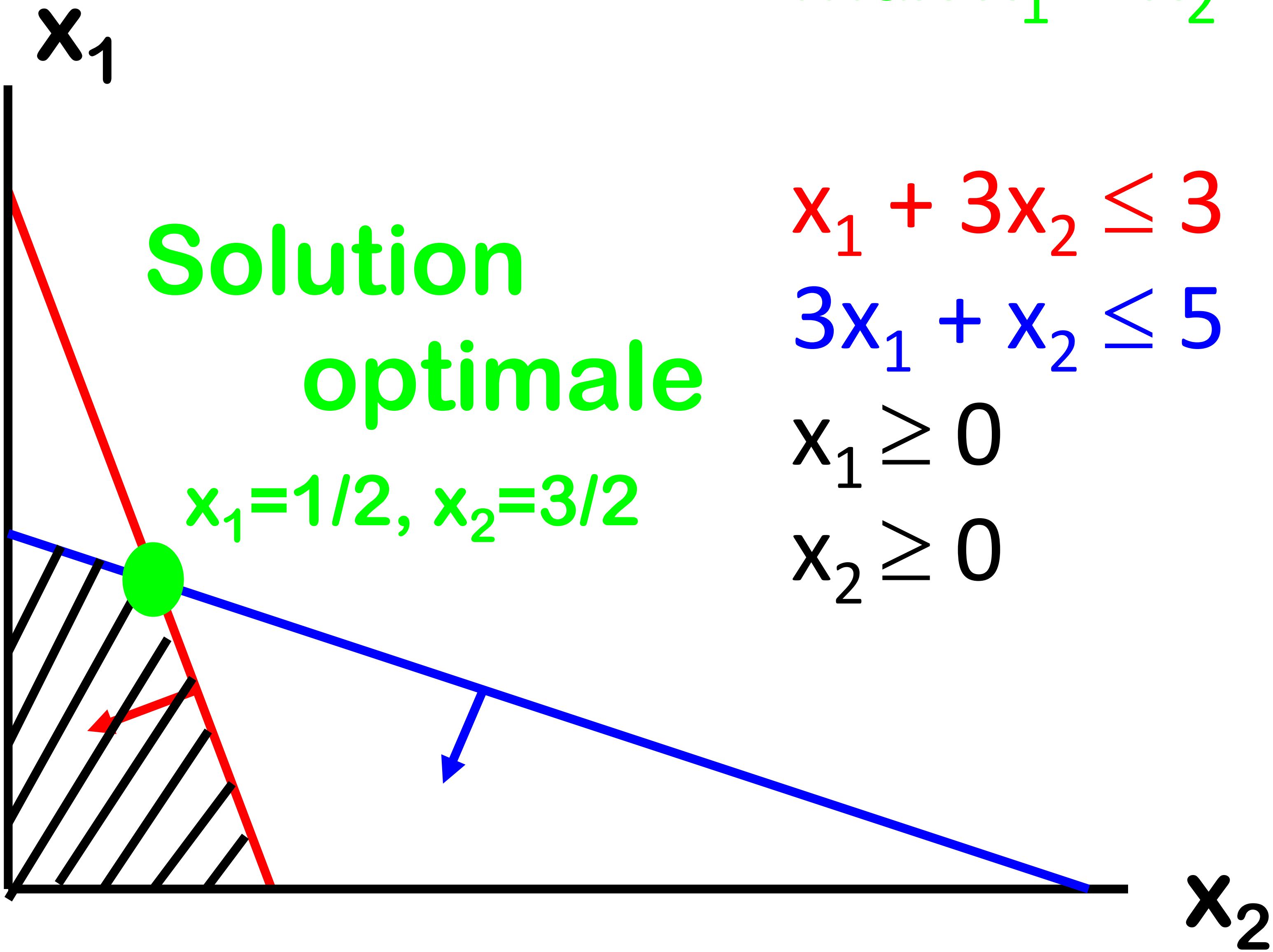
$$\max\ x_1 + x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0$$

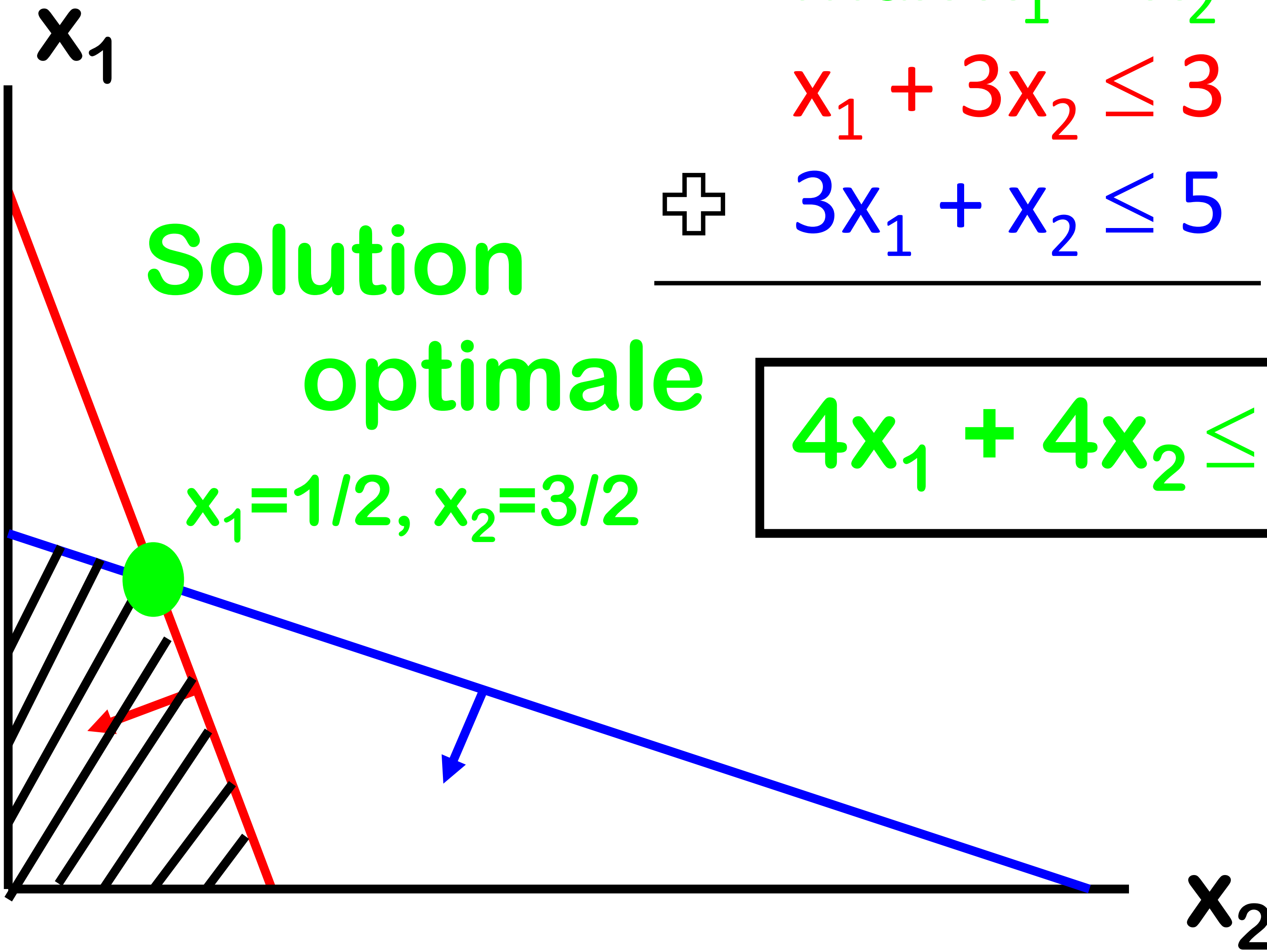
$$x_2 \geq 0$$



Pouvez-vous prouver l'optimalité?

$$\max\ x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{rl}
 & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
+ & 3x_1 + x_2 \leq 5 \\
\hline
 & \boxed{4x_1 + 4x_2 \leq 8}
\end{array}
$$

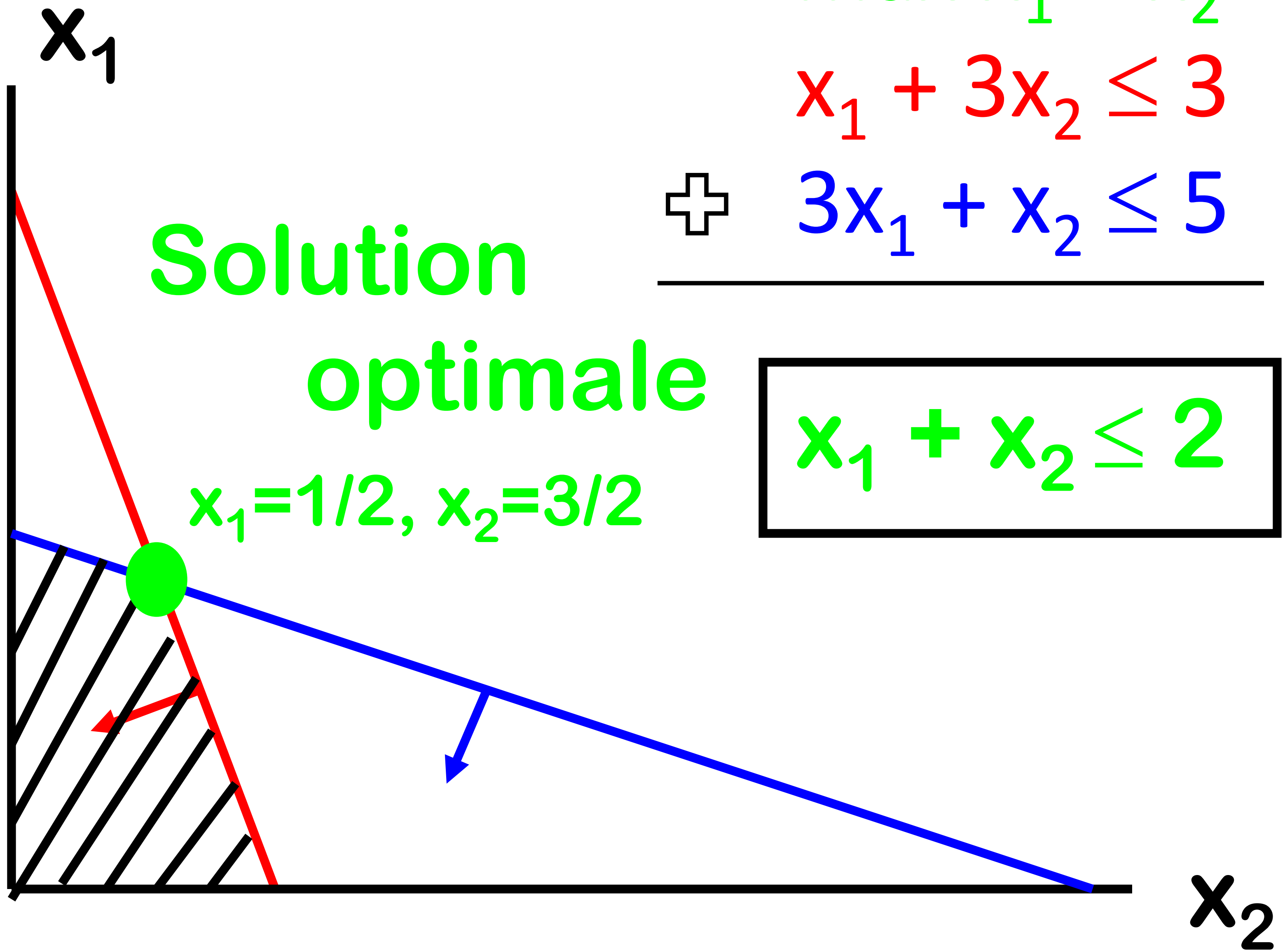


Pouvez-vous prouver l'optimalité?

$$\max\ x_1 + x_2$$

$$
\begin{array}{rl}
 & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
+ & 3x_1 + x_2 \leq 5 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 2}$$



Un autre programme linéaire

maximise $x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$4x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_1=1,\ x_2=1,$ Optimale ?

Un autre programme linéaire

maximise $x_1 + x_2$

$(x_1 + 2x_2 \leq 3\ )$ $\quad *3$

$(4x_1 + x_2 \leq 5\ )$ $\quad *1$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$7x_1 + 7x_2 \leq 14$

⊟ $x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1=1,\ x_2=1,$ Optimale !

Un autre programme linéaire

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

maximise $x_1 + x_2 \leq 7x_1 + 7x_2 \leq 14$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$4x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

La “preuve” est une borne supérieure sur l’objectif.

On veut donc construire une équation qui, tout en étant minimale, est toujours plus grande que n’importe quelle solution réalisable.

Si la borne = la solution obtenue alors celle si est optimale.

Recherche systématique de la preuve d'optimalité

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

$$\text{maximise } x_1 + x_2$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad * \; y_1$$
$$4x_1 + x_2 \leq 5 \quad * \; y_2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

On introduit des multiplicateurs pour chaque contrainte du problème

Recherche systématique de la preuve d'optimalité

$$\text{maximise } x_1 + x_2$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

$$x_1 + 2x_2 \boxed{\leq} 3 \quad * \; y_1$$

$$4x_1 + x_2 \boxed{\leq} 5 \quad * \; y_2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

On définit leur signe: elles doivent être positives pour ne pas changer le sens des inégalités.

Recherche systématique de la preuve d'optimalité

$$\text{maximise } x_1 + x_2$$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{array}} \begin{array}{l} \leq 3 \quad * \; y_1 \\ \leq 5 \quad * \; y_2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

Les coefficients de l'expression doivent être plus grands que ceux de l'objectif pour garantir une valeur toujours supérieure à celle de la fonction objectif

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$
$$2y_1 + y_2 \geq 1$$

Recherche systématique de la preuve d'optimalité

maximise $x_1 + x_2$

On cherche la plus petite borne supérieure pour ce problème

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad * \; y_1$$
$$4x_1 + x_2 \leq 5 \quad * \; y_2$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

On minimise la valeur de la borne.

minimise $3y_1+5y_2$

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$
$$2y_1+y_2 \geq 1$$

L'un est le dual de l'autre

$$\max\ x_1+x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$4x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Primal

Dualité

$$\min\ 3y_1+5y_2$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 1$$
$$2y_1+y_2 \geq 1$$
$$y_1 \geq 0$$
$$y_2 \geq 0$$

Dual

La dualité faible (solutions réalisables)

$$\max x_1+x_2 \quad \leq \quad \min 3y_1+5y_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad\qquad y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5 \qquad\qquad 2y_1+y_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad\qquad y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0 \qquad\qquad y_2 \geq 0$$

Primal　　　　　　　　Dual

La dualité forte (solutions optimales)

École Polytechnique Montréal

$$\max x_1 + x_2 \quad = \quad \min 3y_1 + 5y_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad\qquad y_1 + 4y_2 \geq 1$$

$$4x_1 + x_2 \leq 5 \qquad\qquad 2y_1 + y_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad\qquad y_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0 \qquad\qquad y_2 \geq 0$$

Primal Dual

La Dualité

- Le concept de la dualité est FONDAMENTAL en PL

- Il permet entre autres:
  - de réduire le nombre de contraintes;
  - l'obtention d'une structure plus efficace pour la résolution du problème;
  - de concevoir des méthodes de décomposition performantes.

- Il fournit essentiellement l'information sur la sensibilité de la solution optimale par rapport aux changements dans:
  - l'objectif,
  - les coefficients des contraintes,
  - les constantes du terme de droite,
  - l'addition de nouvelles variables,
  - l'addition de nouvelles contraintes.

La Dualité

Soit le problème PRIMAL

$$\begin{aligned} Max\ \ & z = c^t x \\ \text{s.c.}\ \ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

Alors son DUAL est

$$\begin{aligned} Min\ \ & z' = b^t y \\ \text{s.c.}\ \ & A^t y \ge c \\ & y \ge 0 \end{aligned}$$

Exemple

Primal

$$Max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.c.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dual

$$Min \quad z' = 3y_1 + 8y_2 + 4y_3$$

s.c.

$$y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 2$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Exemple (suite)

- Si on regarde la forme matricielle…

Primal

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 3 \end{matrix} & \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & 8 & 4 \end{matrix} & \end{array}$$

Théorème 1 (dualité faible)

- Soient *E* l'ensemble des solutions réalisables du primal et *E'* l'ensemble des solutions réalisables du dual. Alors:

$$\forall x \in E \textbf{ et } \forall y \in E'$$

$$\textbf{on a } c^t x \leq b^t y \qquad (\textbf{i.e. } z \leq z')$$

Corollaire du théorème 1

Si un P.L. n'admet pas de solution optimale finie (il est non borné), alors son dual n'admet aucune solution réalisable (la réciproque est fausse).

Théorème 2 (dualité forte)

- S'il existe une solution x^* du primal et une solution y^* du dual telles que $c^t x^* = b^t x^*$ alors ces solutions sont optimales pour leurs problèmes respectifs.

Théorème de dualité forte

- Si le problème primal et son dual admettent chacun au moins une solution réalisable, soit z la valeur de l'objectif du primal et z' la valeur de l'objectif du dual, alors:
  - a) z et z' ont une valeur optimale finie.
  - b) max z = min z'

Exemple

Primal

$$\begin{aligned} &Max \quad 2400x_1 + 4000x_2 \\ &\text{s.c.} \\ &\qquad 10x_1 + 40x_2 \leq 4000 \\ &\qquad 20x_1 + 20x_2 \leq 2600 \\ &\qquad 30x_1 + 10x_2 \leq 2700 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} &Min \quad 4000y_1 + 2600y_2 + 2700y_3 \\ &\text{s.c.} \\ &\qquad 10y_1 + 20y_2 + 30y_3 \geq 2400 \\ &\qquad 40y_1 + 20y_2 + 10y_3 \geq 4000 \end{aligned}$$

Résultats

Primal

	Valeur	Coût réduit
X_1	40	0
X_2	90	0
Contrainte	**Écart**	**Coût Marg.**
1	0	53.3
2	0	93.3
3	600	0

Dual

	Valeur	Coût réduit
Y_1	53.3	0
Y_2	93.3	0
Y_3	0	600
Contrainte	**Écart**	**Coût Marg.**
1	0	-40
2	0	-90

Que remarquez-vous ?

Le dual du dual = …

Variables duales et coûts réduits

Le **prix (ou variable) dual** pour chaque contrainte:

- indique l'effet sur l'objectif si on augmente d'une unité le côté droit de la contrainte.
- est aussi appelé coût marginal (shadow price) pour indiquer le montant que l'on serait prêt à payer pour une unité additionnelle de la ressource correspondante.
- Équivaut à la valeur optimale donnée à la variable associé dans le problème dual.

Le coût réduit pour chaque variable.

- Indique de combien on devrait augmenter le coefficient d'une variable pour qu'il devienne profitable de rendre cette variable positive.
- Indique la pénalité (par unité) à payer pour forcer la variable dans la solution.
- Équivaux à l'écart de la contrainte dual associé à cette variable.

Les coûts réduits ne sont valables que dans un intervalle spécifié dans l'analyse de sensibilité (range analysis).

Transformation

Primal	Dual
Min $c^T x$ s.à.: $Ax \geq b$ $x \geq 0$	Max $b^T \lambda$ s.à. : $A^T \lambda \leq c$ $\lambda \geq 0$
Min $c^T x$ s.à. : $Ax = b$ $x \geq 0$	Max $b^T \lambda$ s.à. : $A^T \lambda \leq c$ λ (libre)

Transformation

Résumé

max	min
i^{eme} contrainte $=$	$y_i \in R$
$x_j \in R$	j^{eme} contrainte $=$
$x_j \geq 0$	j^{eme} contrainte $\geq$
$x_j \leq 0$	j^{eme} contrainte $\leq$
i^{eme} contrainte $\leq$	$y_i \geq 0$
i^{eme} contrainte $\geq$	$y_i \leq 0$