Polytechnique Montréal

Analyse appliquée MTH2120

4 septembre 2017

Table des matières

Chapitre 0

Les nombres complexes

0.1 Rappels : ensembles de nombres

On note :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (entiers naturels)

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (nombres entiers)

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ avec } b \neq 0 \right\}$ (nombres rationnels [1])

$\mathbb{R} =$ l'ensemble des nombres réels.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Ces inclusions sont strictes. On note parfois $\mathbb{I}$ l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des irrationnels.

Remarque. Donner une définition rigoureuse des nombres réels s'avère plutôt compliqué et n'est pas nécessaire dans le cadre du cours MTH2120. De manière informelle, on peut dire que les nombres réels sont définis de façon à compléter l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, au sens où la limite de toute suite de rationnels est par définition un nombre réel (qui n'est pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$).

Par exemple, la suite de rationnels

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{14}{10} = 1.4, \frac{141}{100} = 1.41, \frac{1414}{1000} = 1.414, \frac{14142}{10000} = 1.4142, \ldots$$

a pour limite un nombre réel (non rationnel) noté $\sqrt{2}$.

D'autres nombres réels non rationnels célèbres : π, e et $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ (nombre d'or). On peut montrer que, dans un sens bien précis, la plupart des réels sont irrationnels.

1. Pour être précis, puisqu'un rationnel peut être représenté par une infinité de fractions a/b, $\mathbb{Q}$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalences de fractions, où deux fractions a/b et c/d sont équivalentes si et seulement si $ad = bc$.

0.2 Nombres complexes

Définitions.

- Un *nombre complexe* est une expression de la forme $a + bi$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et i est un nombre qui satisfait à $i^2 = -1$.
- La *partie réelle* du nombre complexe $z = a + bi$, notée $\mathrm{Re}(z)$, est le nombre réel a.
- La *partie imaginaire* du nombre complexe $z = a + bi$, notée $\mathrm{Im}(z)$, est le nombre réel b.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. En posant $b = 0$, on voit que $a + bi = a \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exemple

Si $z_1 = 2 + 3i$ alors $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ et $\mathrm{Im}(z_1) = 3$.

Si $z_2 = 1$ $(=1 + 0i)$ alors $\mathrm{Re}(z_2) = 1$ et $\mathrm{Im}(z_2) = 0$.

Si $z_3 = 4i$ $(=0 + 4i)$ alors $\mathrm{Re}(z_3) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_3) = 4$.

Remarque. On écrit parfois $i = \sqrt{-1}$ ou encore, pour les physicien, on utilise le symbole j au lieu de i.

0.3 Opérations entre les nombres complexes

- *Égalité :* deux nombres complexes $z = a + bi$ et $w = c + di$ sont égaux si et seulement si $a = c$ et $b = d$, c'est-à-dire que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.
- *Addition :* si $z = a + bi$ et $w = c + di$ alors on définit
$$z + w = (a + c) + (b + d)i.$$
- *Inverse additif :* si $z = a + bi$ alors $-z = -a - bi$.
- *Multplication :* si $z = a + bi$ et $w = c + di$ alors on définit
$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$
En pratique, on calcule le produit $(a+bi)(c+di)$ comme s'il s'agissait d'un produit de deux binômes, en utilisant la relation $i^2 = -1$.
- *Conjuguaison :* on définit le *conjugué* du nombre complexe $z = a+bi$, noté $\bar{z}$, par $\bar{z} = a-bi$. Autrement dit, la conjuguaison consiste à changer le signe de la partie imaginaire.
- *Division :* si $z, w \in \mathbb{C}$ alors on définit
$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}}.$$
Notons que $w\bar{w} \in \mathbb{R}$.

Exemples

1. Soit $z = 1 + i$ et $w = 2 - 3i$. Alors

$$\begin{aligned}
z + w &= (1+2) + (1-3)i = 3 - 2i. \\
zw &= (1+i)(2-3i) = (1)(2) + (1)(-3i) + (2)(i) + (i)(-3i) \\
&= 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 2 - 3(-1) + (-3+2)i = 5 - i. \\
\frac{z}{w} &= \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+2i-3}{4+6i-6i+9} = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.
\end{aligned}$$

2. $i^{51} = i \cdot i^{50} = i \cdot (i^2)^{25} = i(-1)^{25} = -i$.

Théorème 0.3.1. *Les propriétés habituelles : associativité, distributivité et commutativité sont encore valides pour l'addition et la multiplication de nombres complexes.*

Preuve. La preuve est omise. □

Théorème 0.3.2. *Pour tout nombre complexe z :*

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$.
2. $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Preuve. La preuve est demandée en exercice. □

Remarque. Notons que si $x \in \mathbb{R}$ alors $\bar{x} = x$. L'opération de conjuguaison est triviale pour les nombres réels.

Théorème 0.3.3. *Pour tous nombres complexes z et w :*

1. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$.
4. $\overline{(\bar{z})} = z$.

Preuve. La preuve est demandée en exercice. □

0.4 Quelques différences entre les nombres complexes et les nombres réels

- Toute équation polynomiale possède une solution dans $\mathbb{C}$. Ceci est faux dans $\mathbb{R}$: par exemple $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution réelle mais possède les solutions complexes $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ car $(2i)^2 = -4$.
- Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$, tandis qu'il y en a une sur $\mathbb{R}$ (≪ plus petit que ≫). On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes comme on le fait pour les nombres réels.

- Certaines règles d'arithmétique ne sont plus valides dans $\mathbb{C}$. Par exemple, les inverses additif et multiplicatif d'un nombre réels ne peuvent pas être égaux, tandis que c'est possible dans $\mathbb{C}$: on a $-i = -i \cdot \frac{i}{i} = -\frac{(-1)}{i} = \frac{1}{i}$.
- Selon l'interprétation géométrique des nombres complexes (voir la prochain section), un nombre complexe possède une ≪ grandeur ≫ et une ≪ direction ≫. Un nombre réel possède seulement une grandeur et un signe.

0.5 Représentation géométrique des nombres complexes

À chaque nombre complexe on peut associer un unique point du plan, et vice versa. Le point associé à $z = x + iy$ est (x, y) (et vice versa). Les coordonnées polaires permettent une interprétation géométrique des nombres complxes.

Définition. Soit $z = x + iy$.

- La longueur r du segment reliant l'origine au point (x, y) est appelé le *module* du nombre complexe z. On le note habituellement $|z|$.
- l'angle θ formé par le segment reliant (x, y) à l'origine et l'axe des réels positifs est l'*argument* de z. On le note habituellement $\arg(z)$.

Dans ce contexte, le plan est appelé *plan complexe* et sa représentation graphique est appelée *diagramme d'Argand*. L'axe horizontal est *l'axe réel* et l'axe vertical est *l'axe imaginaire*. On dit qu'un nombre complexe écrit $z = x + iy$ est sous *forme cartésienne*.

Remarques.

- On a $|z| \geq 0$ et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- L'argument d'un nombre complexe est défini à un multiple de 2π près. Pour éviter les ambiguités, on suppose habituellement que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $-\pi < \theta \leq \pi$.

Si $z = x + iy$ alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $\theta = \arg(z)$ alors, dans le cas où $x \neq 0$, on a $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$. Si $x = 0$ alors $z = 0 + iy$ correspond à un point sur l'axe vertical et $\theta = \pi/2$.

Remarques.

- La relation $\tan\theta = y/x$ permet de déterminer l'argument θ en résolvant l'équation pour θ. Cependant, cette équation possède deux solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$: $\arctan\theta$ et $\arctan\theta + \pi$. Pour choisir la bonne valeur, il suffit de considérer le quadrant où est situé le point correspondant au nombre complexe.
- Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

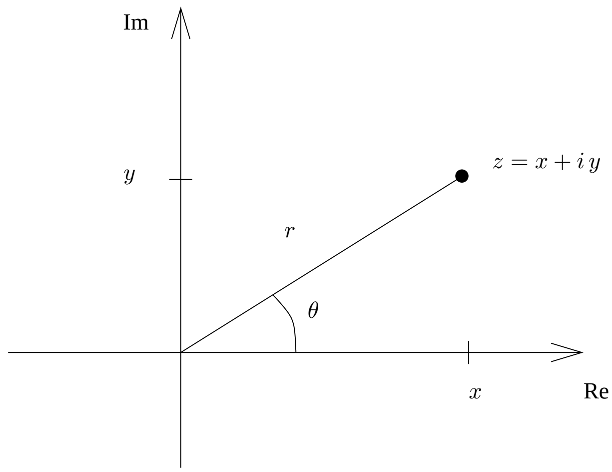
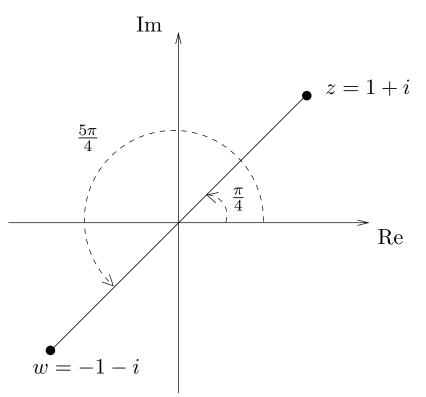


FIGURE 1 – Le plan complexe.

donc $|z_1 - z_2|$ est la distance entre les points z_1 et z_2 du plan complexe. En particulier, $|z|$ est la distance du point z à l'origine.

Exemples

1. Si $z = 1 + i$ alors $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \arctan(1/1) = \pi/4$ car le point correspondant à z, soit $(1, 1)$, est dans le premier quadrant.
2. Si $w = -1 - i$ alors $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \arctan(-1/-1) = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$ car le point correspondant à w, soit $(-1, -1)$, est dans le troisième quadrant.



Théorème 0.5.1. *Pour tous nombres complexes z et w :*

1. $|\bar{z}| = |z|$ *et* $|-z| = |z|$.
2. $z\bar{z} = |z|^2$.

3. $|zw| = |z|\,|w|$ *et* $|z/w| = |z|/|w|$.

4. $|z+w| \leq |z| + |w|$ *(inégalité du triangle).*

5. $|z-w| \geq \Big||z| - |w|\Big|$.

Preuve. La preuve des égalités 1, 2, 3 et de l'inégalité 5 est laissée en exercice.

Pour 4 :

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \quad \text{(selon 2)} \\ &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \quad \text{(propriétés du conjugué)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + \bar{\bar{z}}\bar{w} + w\bar{z} + |w|^2 \quad \text{(propriétés du conjugué)} \\ &= |z|^2 + \overline{(\bar{z}w)} + w\bar{z} + |w|^2 \quad \text{(propriétés du conjugué)} \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}w) + |w|^2 \quad \text{(théorème 0.3.2).} \end{aligned}$$

Or pour tout nombre complexe $x + iy$ on a

$$\begin{aligned} x^2 \leq x^2 + y^2 &\Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{car la fonction racine carrée est croissante} \\ &\Rightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ &\Rightarrow x \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{car } x \leq |x| \\ &\Rightarrow \mathrm{Re}(x+iy) \leq |x+iy|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|\bar{z}w| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

donc, en prenant la racine carre positive des premier et dernier termes, on obtient

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

□

0.6 Forme polaire d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Selon l'interprétation géométrique de la section précédente, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. On peut donc écrire z sous *forme polaire* :

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

La formule suivante, appelée *formule d'Euler*, donne une autre façon d'exprimer un nombre complexe à l'aide de la fonction exponentielle. Bien que celle-ci n'ait pas encore été définie, nous prendrons pour acquis les règles habituelles des exposants. La fonction exponentielle sera définie rigoureusement plus tard dans le cours.

Théorème 0.6.1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Preuve. Cette formule a été démontrée dans le cours MTH1101. $\square$

Notons que le module du nombre complexe $e^{i\theta}$ est égal à 1. Pour un nombre complexe quelconque, on a $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Exemples

1. $i = e^{i\pi/2}$ car $|i| = 1$ et $\arg(i) = \pi/2$.
2. $-1 = e^{\pi i}$ car $|-1| = 1$ et $\arg(-1) = \pi$. Cette formule est souvent écrite sous la forme plus « spectaculaire » :
$$e^{\pi i} + 1 = 0$$
réunissant en une seule formule les cinq nombres les plus importants en mathématiques.
3. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ car $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) = \pi/4$.

0.7 Opérations sur les nombres complexes sous forme polaire

Si $z = e^{i\theta}$ alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et
$$\bar{z} = \overline{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$
Ainsi, $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

L'addition et la soustraction sont des opérations faciles à effectuer pour des nombres complexes sous forme cartésienne, cependant que la multiplication et la division le sont moins. Pour des nombres complexes écrit sous forme polaire, c'est le contraire : l'addition et la soustraction sont compliquées mais la multiplication et la division sont simples. Les formules suivantes sont conséquences des propriétés de exposants. Elles peuvent aussi être démontrées à l'aide de la formule d'Euler et d'identités trigonométriques.

Si $z = re^{i\theta}$ et $w = \rho e^{i\alpha}$ alors
$$zw = \left(re^{i\theta}\right)\left(\rho e^{i\alpha}\right) = r\rho e^{i\theta + i\alpha} = r\rho e^{i(\theta+\alpha)}$$
et
$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{\left(re^{i\theta}\right)\left(\rho e^{-i\alpha}\right)}{\left(\rho e^{i\alpha}\right)\left(\rho e^{-i\alpha}\right)} = \frac{r\rho\, e^{i(\theta-\alpha)}}{\rho^2} = \frac{r}{\rho}\, e^{i(\theta-\alpha)}.$$

Exemple

Si $z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $w = 3i = 3e^{i\pi/2}$ alors $zw = 3\sqrt{2}e^{i(\pi/4+\pi/2)} = 3\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$ et $z/w = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i(\pi/4-\pi/2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\pi/4}$.

Théorème 0.7.1. *(Formule de De Moivre). Si $n \in \mathbb{N}$ alors*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Preuve. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(\theta)$. □

Exemple

$$\begin{aligned}(1+i)^{12} &= \left[\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right]^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left[\cos(12\pi/4) + i\sin(12\pi/4)\right] \\ &= 2^6\left[\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right] = 64[-1 + i\cdot 0] = -64.\end{aligned}$$

0.8 Racines d'un nombre complexe

Définition. Si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors une *racine n-ième* de z est un nombre complexe w tel que $w^n = z$.

Théorème 0.8.1. *Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ alors z possède n racine n-ièmes distinctes, qui sont :*

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 2, \ldots, n-1.$$

Preuve. On a

$$(z_k)^n = \left(r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}\right)^n = re^{i(\theta+2k\pi)} = r\left(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)\right) = r\left(\cos\theta + +i\sin\theta\right) = z$$

donc z_k est bien une racine n-ième de z.

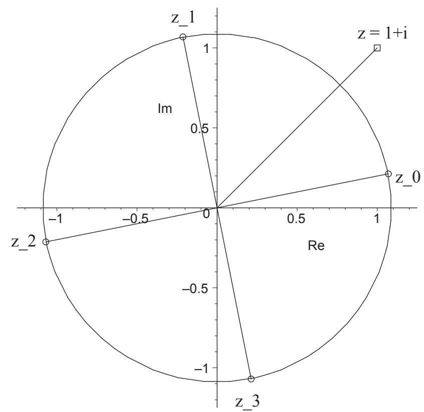
Pour montrer l'unicité, on utilise le fait que si $\cos\alpha = \cos\beta$ et $\sin\alpha = \sin\beta$ alors on doit nécessairement avoir $\alpha = \beta$ (pour $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$). Ici, si $z_k = z_j$ alors $(\theta + 2k\pi)/n = (\theta + 2j\pi)/n \Rightarrow k = j$. Par conséquent, si $k \neq j$ alors les racines z_k et z_j sont distinctes. □

Remarque. On note que les racines z_k ont toutes le même module, soit $|z_k| = r^{\frac{1}{n}}$, et que la différence entre les arguments de deux racines successives est toujours la même, soit $2\pi/n$. Géométriquement, ceci signifie que les racines n-ièmes de $z = re^{i\theta}$ sont des points également espacés sur le cercle de rayon $r^{\frac{1}{n}}$ centré à l'origine.

Exemple

Trouvons les racines quatrièmes de $z = 1 + i$. On a $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ donc les racines quatrièmes sont

$$z_k = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\pi/4+2k\pi}{4}\right)}, k = 0, 1, 2, 3.$$



Explicitement,

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{\pi i/16} &&= 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos(\pi/16) + i\sin(\pi/16)\right) \\ z_1 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{9\pi i/16} &&= 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos(9\pi/16) + i\sin(9\pi/16)\right) \\ z_2 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{17\pi i/16} &&= 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos(17\pi/16) + i\sin(17\pi/16)\right) \\ z_3 &= 2^{\frac{1}{8}} e^{25\pi i/16} &&= 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos(25\pi/16) + i\sin(25\pi/16)\right) \end{aligned}$$

0.9 Courbes et régions dans le plan complexe

Pour la suite du cours, il est important de savoir décrire certaines régions bornées par des courbes dans le plan complexe.

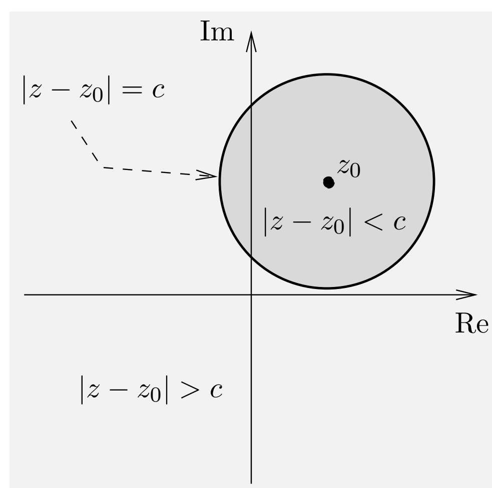
Cercles et disques

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{R}_+$ alors l'équation

$$|z - z_0| = c$$

définit un cercle de rayon c centré en z_0. Géométriquement, l'équation décrit l'ensemble des points z tels que la distance $|z - z_0|$ de z à z_0 est constante et égale à c. C'est donc bien le cercle annoncé.
Algébriquement, si $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ alors

$$\begin{aligned} |z - z_0| = c &\Leftrightarrow |(x - x_0) + (y - y_0)i| = c \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = c \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2. \end{aligned}$$



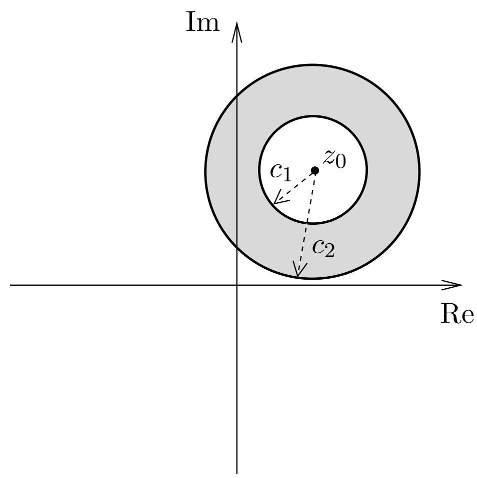
Cette dernière équation est l'équation cartésienne du cercle de rayon c centré au point (x_0, y_0).
L'inégalité $|z - z_0| < c$ décrit le disque (sans sa frontière) borné par le cercle, tandis que l'inégalité $|z - z_0| > c$ décrit la région à l'extérieur du cercle.

Anneaux

Si $0 < c_1 < c_2$ alors les inégalités

$$c_1 < |z - z_0| < c_2$$

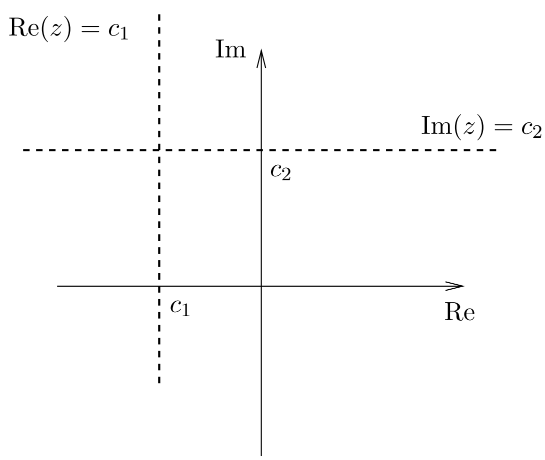
définissent la région comprise entre les cercles $|z - z_0| = c_1$ et $|z - z_0| = c_2$, qu'on appelle un *anneau* ou une *couronne*.



Droites et demi-plans

Si $c \in \mathbb{R}$ alors l'équation $\text{Re}(z) = c$ définit une droite verticale. En effet, si $z = x + iy$ alors $\text{Re}(z) = c \Leftrightarrow x = c$. De façon smblable, l'équation $\text{Im}(z) = c$ définit une droite horizontale.

Les inégalités $\text{Re}(z) > c$, $\text{Re}(z) < c$, $\text{Im}(z) > c$, $\text{Im}(z) > c$ définissent des demi-plans correspondant aux droites.



0.10 Exercices sur les nombres complexes

1. Effectuez les opérations indiquées.

   a) $(3 + 2i)^3 + (-7 - i)^2$

   b) $(2 - 3i)(4 + 2i)(1 - i)$

   c) $\dfrac{(3 - 2i)^2}{(-1 + i)(2 + i)}$

d) $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{-1 + 2i}$

2. Exprimez les nombres suivanes sous la forme $a + i\,b$.

   a) i^{2017}

   b) $i^{2017} + (1 + i)^{2017}$

3. Exprimez les nombres complexes suivants sous la forme $a + i\,b$.

   a) $z = e^{2+\pi i/2}$

   b) $z = e^{3\pi i/4-1}$

   c) $z = e^{2-7\pi i/6}$

4. Vérifiez la propriété suivante de la multiplication complexe : $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$.

5. Si $z = 2 + i$ et $w = 3 - 2i$, évaluez l'expression.

   a) $|3z - 4w|$

   b) $|z^3 - 3z^2 + 4z - 8|$

   c) $\bar{z}^4$

6. Exprimez les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle.

   a) $2 - 2i$

   b) $2 + 2\sqrt{3}\,i$

   c) $-5 + 5i$

   d) $-\sqrt{6} - \sqrt{2}\,i$

   e) $-3i$

7. Montrez que z est un nombre réel si et seulement si $z = \bar{z}$.

8. Simplifiez les expressions suivantes.

   a) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{(1 + 2i)^2}{1 - i}\right)$

   b) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{3 + 4i}{(-7 - i)^2}\right)$

   c) $\left|\dfrac{-i^{21}(1 + i)^6}{(1 - 2i)^4}\right|$

9. Démontrez l'inégalité suivante

$$|z - w| \geq \big|\,|z| - |w|\,\big|$$

   pour tous $z, w \in \mathbb{C}$.

10. Démontrez la loi du parallélogramme

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

11. À l'aide de la formule de De Moivre, montrez que

    a) $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

    b) $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

12. Trouvez toutes les racines de

    a) $z^5 = -32$

    b) $z^3 = 1 + i$

13. Trouvez toutes les solutions aux équations suivantes (sous la forme $a+i\,b$) puis représentez-les dans le plan complexe.

    a) $z^4 + z^2 + 1 = 0$

    b) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$

14. Démontrer le théorème 0.3.2.

15. Démontrer le théorème 0.3.3.

16. Démontrer les égalités 1, 2, 3 et l'inégalité 5 du théorème 0.5.1