École Polytechnique de Montréal
Institut de génie biomédical

Cours GBM6103A
Traitement d'images et de signaux biomédicaux
Automne 2014

Travail dirigé n° 3

Reconstruction tomographique

Instructions

- Les travaux pratiques sont effectués par équipes de deux.
- Le compte rendu doit comporter une réponse concise mais complète à chacune des questions, accompagnée au besoin des courbes, figures et images appropriées ;
- Le compte rendu doit être rédigé à l'aide des fonctionnalités de publication de `matlab` (menu "File / Publish" de l'éditeur `matlab`), en format html ou pdf. L'ensemble des fichiers doit être placé dans une unique archive `zip`.
- Le compte rendu doit être remis au plus tard à minuit le jour de la séance, en utilisant l'outil approprié disponible sur le site web du cours.
- Le travail doit être remis par un seul des membres du groupe. Si tel n'est pas le cas, la version la plus récente du travail remis sera prise en compte.

1 Introduction

L'objet de cette séance de travaux pratiques est de mettre en œuvre certaines des techniques de reconstruction tomographique présentées en cours en cours et d'évaluer leur comportement et leurs performances. On se limite au cas simple de la tomographie à rayons X dans un cadre 2D, et on suppose de plus que la géométrie des rayons est parallèle. L'objet à reconstruire est un fantôme synthétique très largement utilisé pour comparer les méthodes les unes aux autres (fantôme de Shepp & Logan) et on s'est limité à une taille modeste (63×63) pour éviter de trop longs calculs. Trois conditions expérimentales ont été simulées :

- 90 projections, sans bruit, régulièrement espacées entre 0 et 178 degrés ;
- 90 projections, affectées d'un bruit additif significatif, régulièrement espacées entre 0 et 178 degrés ;
- 69 projections, affectées d'un bruit additif significatif, régulièrement espacées entre 0 et 136 degrés ;

Le fantôme, les données nécessaires à la reconstruction, ainsi que diverses fonctions `matlab` mettant en œuvre quelques-unes des techniques de reconstruction tomographique présentées en cours sont contenues dans une archive téléchargeable à partir de la page web du cours. Nous décrivons brièvement ci dessous le contenu de cette archive.

Téléchargement et contenu de l'archive

L'archive `TD3.zip` est disponible sur le site web du cours. Récupérez la et extrayez son contenu dans votre répertoire de travail. Vous aurez ainsi accès à la fois aux fichiers de données et aux fonctions `matlab` décrits ci-dessous.

Fichiers de données

Les données relatives aux trois conditions expérimentales décrites ci dessus sont contenues respectivement dans les fichiers `Donnees_sansbruit.mat`, `Donnees_bruitees.mat` et `Donnees_anglepartiel.mat`. Chacun de ces fichiers contient les quatre variables suivantes :

`Obj`	objet (fantôme) à reconstruire – matrice réelle de taille (63×63)
`P`	Projections du fantôme (sinogramme) – matrice de taille ($71 \times$ nombre de projections)
`Theta`	angle des projections en degrés – vecteur de taille égale au nombre de projections
`W`	matrice de projection, utilisée par certaines méthodes de reconstruction

Fonctions `matlab`

Nous vous donnons ci-après la liste des fonctions mises à votre disposition. L'aide en ligne de chacune d'entre elles en donne une description plus précise.

`rpf`	reconstruction par la méthode des rétroprojections filtrées
`mcl2`	reconstruction par moindres carrés pénalisés par un terme quadratique
`mcl2l1`	reconstruction par moindres carrés pénalisés par un terme L_2L_1

2 Reconstruction tomographique du fantôme

Comme indiqué plus haut, l'objectif général du travail dirigé est de comparer les trois méthodes de reconstruction tomographique décrites ci-dessus dans diverses conditions expérimentales. Nous donnons ci-dessous quelques précisions sur ces méthodes de reconstruction.

2.1 Précisions sur les méthodes à employer

La méthode de reconstruction par rétroprojections filtrées est celle qui est la plus fréquemment utilisée dans la pratique. Une description en est donnée dans les notes de synthèse. Soulignons que cette méthode ne nécessite de fixer aucun paramètre de réglage.

Les deux autres méthodes relèvent de l'approche « estimation » : la relation entre les mesures (projections) $\boldsymbol{p}$ et l'objet à reconstruire $\boldsymbol{x}$ est modélisée par l'équation :

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

où $\boldsymbol{W}$ désigne la matrice de projection et où $\boldsymbol{b}$ représente le bruit d'observation. Dans cette équation, les composantes des projections et de l'objet, qui sont des grandeurs 2D, ont été rangées dans un vecteur selon un ordre prédéterminé (ici, colonne par colonne). L'objet est estimé par minimisation du critère :

$$J(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{x}\|^2 + \lambda \sum_{s \in \mathcal{S}} \varphi(u_s))$$

où les scalaires u_s représentent soit les composantes de l'objet, soit ses *différences premières* dans les directions horizontale et verticale. Les termes u_s sont donc de la forme :

$$u_s = x_{i,j} \qquad \text{ou} \qquad u_s = x_{i,j} - x_{i,j+1} \qquad \text{ou} \qquad u_s = x_{i,j} - x_{i+1,j}$$

Dans les deux derniers cas, les termes u_s représentent une approximation du gradient de l'image.

Les deux méthodes se différencient par le type de fonction de pénalisation $\varphi(\cdot)$ utilisée. Dans le premier cas (fonction `matlab mcl2`), cette fonction est un simple carré. La pénalisation est donc quadratique et s'applique à l'estimée elle-même (limitation des amplitudes) ainsi qu'à son gradient (lissage). La valeur du paramètre de régularisation λ *pour chacun de ces termes* doit être précisée. $J(\boldsymbol{x})$ reste quadratique et la valeur de $\boldsymbol{x}$ qui le minimise prend une forme explicite. Cependant, on n'utilisera pas cette forme explicite en raison de la taille généralement trop élevée des grandeurs à manipuler. On se rabat sur un algorithme itératif de minimisation de type Gauss-Seidel beaucoup plus simple à mettre en œuvre.

Dans le second cas, la fonction de pénalisation est de type L_2L_1 et a pour expression :

$$\varphi(u) = \sqrt{\delta^2 + u^2}$$

où δ représente un paramètre d'échelle. Cette pénalisation s'applique ici aussi à l'estimée elle-même et à son gradient. En raison de la nature de $\varphi(\cdot)$, cet estimateur encourage des solutions présentant un comportement impulsionnel (correspondant par exemple à des parois minces où à des organes de petite taille) et un gradient impulsionnel, ce qui encourage l'apparition de zones homogènes séparées par des discontinuités franches. Ce type de pénalisation semble donc bien adapté à la reconstruction d'images médicales. Remarquons cependant que, en sus de la valeur des deux paramètres de régularisation λ, la valeur de δ doit elle aussi être précisée. La solution n'est plus exprimable sous forme explicite. Cependant, le critère reste convexe ce qui autorise l'emploi d'algorithmes de minimisation itératifs, à directions de descente par exemple, avec garantie de convergence. C'est un tel algorithme qui est utilisé dans la fonction `mcl2l1`.

2.2 Travail à effectuer

Dans chaque condition expérimentale, effectuez la reconstruction du fantôme avec chacune des méthodes de reconstruction proposées. Dans chaque situation, fixez la valeur des paramètres de régularisation de manière empirique pour obtenir un bon compromis entre la suppression du bruit et la préservation des discontinuités (Pour les premiers essais, utilisez un petit nombre d'itérations de la méthode pour limiter le temps de calcul).

Travail à remettre Objet reconstruit dans chaque situation expérimentale et avec chaque méthode. Valeurs retenues pour les paramètres de réglage. Bref commentaire sur le niveau de difficulté de chaque situation expérimentale (notamment dans la troisième situation – expliquez) et le comportement respectif de chacune des méthodes (simplicité, sensibilité à la valeur des paramètres de réglage etc.). Brève critique des approches étudiées.