École Polytechnique de Montréal
Institut de génie biomédical

Cours GBM6103A
Traitement d'images et de signaux biomédicaux
Automne 2014

Travail pratique n° 2

Filtrage de signaux biomédicaux

Instructions

- Les travaux pratiques sont effectués par équipes de deux.
- Le travail à remettre se compose :
  - d'un compte rendu qui doit comporter une réponse concise mais complète à chacune des questions, accompagnée au besoin des courbes, figures et images appropriées ;
  - des scripts et fonctions `matlab` correspondants, sous forme de fichiers texte (format `.m`).

  L'ensemble peut être composé soit à l'aide des fonctionnalités de publication de `matlab` (menu "File / Publish" de l'éditeur `matlab`), soit en utilisant un logiciel de traitement de texte indépendant. Dans tous les cas, seuls les formats html, pdf et texte (pour les fichiers `matlab`) sont acceptés. L'ensemble des fichiers doit être placé dans une unique archive `zip` et remis en utilisant l'outil approprié disponible sur le site web du cours.
- Le travail doit être remis par un seul des membres du groupe. Si tel n'est pas le cas, la version la plus récente du travail remis sera prise en compte.

1 Introduction

L'objet de cette séance est de se familiariser avec les outils de filtrage de `Matlab` en particulier la fonction `filter` qu'on utilisera conjointement avec des outils de synthèse de filtres tels que la fonction `butter`. On s'intéressera également à l'interprétation spectrale de l'opération de filtrage ainsi qu'à l'interprétation de la réponse fréquentielle et de la fonction de transfert d'un filtre.

2 Causalité, stabilité, fonction de transfert et réponse fréquentielle (8 points)

On on considère deux filtres linéaires invariants causaux F et G définis par les récurrences :

$$y(n) = y(n-1)/3 + x(n) \tag{1}$$

$$y(n) = 3y(n-1) + 3x(n) \tag{2}$$

En utilisant la définition et les propriétés de la transformée en z, trouvez l'expression des fonctions de transfert $F(z)$ et $G(z)$ des filtres F et G, en prenant soin d'en spécifier la région de convergence. Discutez de la stabilité de ces filtres. Tracez également le module de la réponse fréquentielle de ces filtres (si elle existe) pour N valeurs de la fréquence réduite ν régulièrement réparties sur l'intervalle $[-1/2\ ,\ 1/2[$. On prendra $N = 1024$. Enfin, chargez le signal de pression intraventriculaire `pvent0` et filtrez-le par ces deux filtres en utilisant la fonction `filter`. Que se passe-t-il ?

On s'intéresse maintenant aux réponses impulsionnelles (RI) $f(n)$ et $g(n)$ des filtres F et G. Calculez $f(n)$ et $g(n)$ par transformée en z inverse. Puis, en utilisant la définition de la RI, proposez et appliquez une méthode très simple utilisant la fonction `filter` pour calculer les 100 premiers points de la RI de chacun de ces filtres à partir de (1) et (2).

Y a-t-il accord entre :

- la réponse de F et G à l'entrée `pvent0` ainsi que l'allure (théorique et expérimentale) de la RI de ces deux filtres ;
- votre discussion de la stabilité des deux filtres ;
- la forme de leur fonction de transfert et le cas échéant de leur réponse fréquentielle ?

Expliquez.

Compte-rendu

1. Fonction de transfert des filtres récurrents avec région de convergence.
2. RF des filtres récurrents : pour chacun, commentaire (une phrase) sur l'existence et graphique du module selon le cas.
3. Discussion de la stabilité de $F(z)$ et de $G(z)$ en lien avec les tracés précédents. Un paragraphe sur un tiers de page au maximum.
4. Traitement du signal `pvent0` par les filtres récurrents : deux graphiques. Explications sur l'allure des résultats : un court paragraphe pour chaque cas.
5. Calcul de La RI par transformée en z inverse.
6. Évaluation numérique de la RI des filtres récurrents : deux graphiques et un paragraphe de commentaire.
7. Discussions et explications sur les trois points soulevés. Un paragraphe sur une demi-page au maximum pour chaque question.

3 Filtrage = Multiplication spectrale (5 points)

La relation liant la sortie $y(n); \quad n = -\infty, \ldots, +\infty$ d'un filtre $h(t)$ à son entrée $x(n)$ est une convolution :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \tag{3}$$

Celle-ci est équivalente dans le domaine spectral à :

$$Y(\nu) = H(\nu)X(\nu) \quad \nu \in [0, 1[. \tag{4}$$

Nous allons vérifier cette relation sur un exemple.

Chargez le signal de pression intraventriculaire `pvent1` et filtrez-le par le filtre H dont la réponse impulsionnelle est définie par :

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{\sin 2\pi\nu_0 n}{n+1} \ ; \ 0 \leq n \leq L-1 & (5) \\ h(n) &= 0 \text{ ailleurs} & (6) \end{aligned}$$

avec $\nu_0 = 0,083$ et $L = 150$. Pour ce faire, utilisez la fonction `filter`, puis la fonction `conv` en faisant en sorte que le signal filtré soit de même taille que le signal d'entrée. Dans chaque cas, notez le temps nécessaire pour effectuer le filtrage, en utilisant les fonctions `tic` et `toc`.

Effectuez les FFT de `pvent1` et de h sur $N + L$ points, où N désigne la longueur du signal `pvent1`. Multipliez les FFT composantes par composantes. Effectuez une FFT inverse (fonction `ifft`) et ne conservez que les N premiers points du résultat. Notez le temps nécessaire pour effectuer des opérations. Comparez les signaux obtenus par chacune des méthodes, ainsi que les temps de traitement. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Compte-rendu Un paragraphe d'une demi-page maximum comparant les résultats et expliquant les temps de calcul des opérations de filtrage réalisées.

4 Synthèse d'un filtre réjecteur de 60 Hz (7 points)

On veut construire un filtre permettant d'atténuer la fréquence parasite de 60 Hz présente dans le signal de pression aortique `paort0` échantillonné à 500 Hz (la valeur de cette fréquence est conservée dans la variable `fe0`).

4.1 Filtre RIF du second ordre (3 points)

L'idée la plus naturelle est de construire un filtre RIF dont la réponse en fréquence s'annule pour $\nu_0 =$ fréquence réduite correspondant à 60 Hz. Le plus simple de ces filtres a une transformée en z qui s'écrit :

$$H(z) = \frac{(z - e^{2i\pi\nu_0})(z - e^{-2i\pi\nu_0})}{z^2} \tag{7}$$

Quel est l'ordre de ce filtre ? Pouvait-on choisir un filtre d'ordre inférieur ?

Tracez en échelle semi-logarithmique le module de la RF d'un tel filtre. Quel est le gros défaut de ce filtre ? Comment obtenir un filtre plus sélectif ?

Compte-rendu

1. Ordre du filtre et explications : un paragraphe.
2. Représentation graphique semi-logarithmique de la RF du filtre.
3. Paragraphe d'un tiers de page maximum décrivant le plus gros défaut d'un tel filtre.
4. Comment rendre le filtre plus sélectif (court paragraphe).

4.2 Utilisation de filtres prêts-à-l'emploi (4 points)

Une deuxième solution consiste à faire appel à des familles de filtres optimisés selon certains critères. On s'intéresse à la famille des filtres de Butterworth. La fonction `butter` de `Matlab` permet d'obtenir les coefficients du filtre sous forme des coefficients apparaissant au numérateur et au dénominateur de la transformée en z du filtre. Ces coefficients sont directement utilisables par la fonction `filter`.

Générez un filtre de Butterworth coupe bande d'ordre 2, de manière à ce que la bande coupée contienne le 60 Hz (attention : les conventions `Matlab` pour la spécification des fréquences correspondent au double de la fréquence réduite usuelle). Tracez sa RF et comparez-la avec celle du filtre idéal précédent.

Filtrez le signal `paort0` avec le filtre idéal de la section précédente et le filtre de Butterworth obtenu. Comparez les résultats.

Compte-rendu

1. Représentation graphique semi-log de la RF du filtre de Butterworth (groupez-en la présentation à celle du filtre précédent).
2. Représentation graphique de la sortie des deux filtres, dont l'entrée est le signal `paort0` dans les deux cas.
3. Paragraphe d'une demi-page (maximum) d'analyse comparative des deux filtres et de leurs résultats.