

Traitement d'images médicales I

Échantillonnage, filtrage, segmentation

Yves Goussard

GBM6103A

5 novembre 2014

- 1 Cadre de travail
- 2 Représentation fréquentielle des images
- 3 Échantillonnage
- 4 Convolution, corrélation, filtrage
- 5 Applications

Définition et propriétés importantes

- Image : fonction $f(x_1, x_2)$
- f : à valeurs réelles
- x_1, x_2 : variables continues ou **discrètes**
- f : suffisamment *régulière*
 - Existence de la fonction d'autocorrélation
 - Existence du produit de convolution
 - Existence de la transformée de Fourier
 - ...

Représentation fréquentielle

- Notion de fréquence : projection sur une « base fréquentielle »
- En 1D : une variable dans le domaine de départ et une variable fréquentielle
- En 2D : deux variables dans le domaine de départ \Rightarrow deux variables fréquentielles.

Démarche intuitive par succession d'opérations

$$f(x_1, x_2) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\nu_1}} \bar{F}(\nu_1, x_2) = \int f(x_1, x_2) e^{-2i\pi\nu_1 x_1} dx_1$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(\nu_1, x_2) \xrightarrow{\mathcal{F}_{\nu_2}} F(\nu_1, \nu_2) &= \int \bar{F}(\nu_1, x_2) e^{-2i\pi\nu_2 x_2} dx_2 \\ &= \iint f(x_1, x_2) e^{-2i\pi(\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2)} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Hypothèses

- Produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \iint f(x_1, x_2)g^*(x_1, x_2)dx_1dx_2$.
- « Base fréquentielle » : $\{e^{2i\pi(\nu_1x_1+\nu_2x_2)} ; (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2\}$.
- $f(x_1, x_2)$ de carré sommable (i.e., $\iint |f(x_1, x_2)|^2dx_1dx_2$ converge)

Transformée de Fourier 2D

- TF 2D : $F(\nu_1, \nu_2) = \iint f(x_1, x_2)e^{-2i\pi(\nu_1x_1+\nu_2x_2)}dx_1dx_2$
- TFI 2D : $f(x_1, x_2) = \iint F(\nu_1, \nu_2)e^{2i\pi(\nu_1x_1+\nu_2x_2)}d\nu_1d\nu_2$

Propriétés importantes

- Ordre d'intégration indifférent (théorème de Fubini).
- Séparabilité : $e^{2i\pi(\nu_1x_1+\nu_2x_2)} = e^{2i\pi\nu_1x_1}e^{2i\pi\nu_2x_2}$

Il faut préciser la variable par rapport à laquelle f est périodique

Exemple

- f périodique par rapport à x_1 et x_2 , aux périodes T_1 et T_2 .

- Décomposition de f : $f(x_1, x_2) = \sum_{k_1, k_2} a_{k_1 k_2} e^{2i\pi \left(\frac{k_1 x_1}{T_1} + \frac{k_2 x_2}{T_2} \right)}$

$$\text{avec } a_{k_1 k_2} = \frac{1}{T_1 T_2} \int_{I_1} \int_{I_2} f(x_1, x_2) e^{-2i\pi \left(\frac{k_1 x_1}{T_1} + \frac{k_2 x_2}{T_2} \right)} dx_1 dx_2$$

- TF 2D : $F(\nu_1, \nu_2) = \sum_{k_1, k_2} a_{k_1 k_2} \delta \left(\nu_1 - \frac{k_1}{T_1} \right) \delta \left(\nu_2 - \frac{k_2}{T_2} \right)$

Impulsions disposées régulièrement sur une grille cartésienne, à des intervalles de $\frac{1}{T_1}$ dans la direction ν_1 , et $\frac{1}{T_2}$ dans la direction ν_2

Réciproque vraie également

Extension directe des résultats 1D

- $f_e(x_1, x_2)$ échantillonnée $(T_{e1}, T_{e2}) \implies F_e(\nu_1, \nu_2)$ périodique $(1/T_{e1}, 1/T_{e2})$
- $F_e(\nu_1, \nu_2)$ obtenu par périodisation de $F(\nu_1, \nu_2)$ à la période $1/T_{e1}$ dans la direction ν_1 et $1/T_{e2}$ dans la direction ν_2
- Si $f(x_1, x_2)$ à la fois échantillonné et périodique, alors $F(\nu_1, \nu_2)$ à la fois échantillonné et périodique, les deux quantités étant caractérisées par le même nombre d'échantillons.

Exemple de transformée de Fourier 2D

Voir `demo_rotTF.m`

Rotation

- Image $f(x_1, x_2) \longleftrightarrow F(\nu_1, \nu_2)$
- Image tournée de θ : $g(x_1, x_2) \longleftrightarrow G(\nu_1, \nu_2)$
- $g(x_1, x_2) = f[\mathcal{R}_{-\theta}(x_1, x_2)]$; $\mathcal{R}_{-\theta}$: rotation d'angle $-\theta$
- On montre que $G(\nu_1, \nu_2) = F[\mathcal{R}_{-\theta}(\nu_1, \nu_2)]$

$G(\nu_1, \nu_2)$: $G(\nu_1, \nu_2)$ tournée de θ

- Principe de la démonstration : changement de variable dans l'intégrale double de Fourier

Exemple

Voir `demo_rotTF.m`

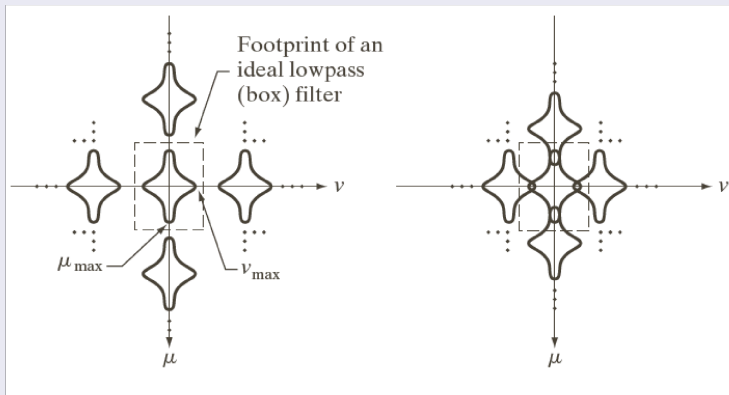
Échantillonnage sans perte d'information

- Principe : éviter le recouvrement spectral
- Condition suffisante : si $f(\nu_1, \nu_2)$ à bande limitée (B_1, B_2)
Échantillonnage sans perte si les périodes d'échantillonnage f_{e_1} et f_{e_2} selon x_1 et x_2 vérifient respectivement

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{T_{e_1}} = \nu_{e_1} > 2B_1 \\ \frac{1}{T_{e_2}} = \nu_{e_2} > 2B_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_{e_1} < \frac{1}{2B_1} \\ T_{e_2} < \frac{1}{2B_2} \end{array} \right.$$

Théorème d'échantillonnage

Illustration



©1992-2008 R. C. Gonzalez & R. E. Woods

Exemple

Voir `demo_alias.m`

Définition et propriétés

- f, g deux images

$$\begin{aligned}(f * g)(y_1, y_2) &= \iint f(x_1, x_2) g(y_1 - x_1, y_2 - x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \iint f(y_1 - x_1, y_2 - x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

- En posant $h = f * g$:

$$H(\nu_1, \nu_2) = F(\nu_1, \nu_2) G(\nu_1, \nu_2)$$

Définition et propriétés

- $\gamma_{f,f}(\tau_1, \tau_2) = \iint f(x_1, x_2) f(x_1 - \tau_1, x_2 - \tau_2) dx_1 dx_2$
- $\Gamma_{f,f}(\nu_1, \nu_2)$: TF 2D de $\gamma_{f,f}$:
$$\Gamma_{f,f}(\nu_1, \nu_2) = |F(\nu_1, \nu_2)|^2$$

Définition et caractérisation



Équivalence

- h linéaire invariant
- Relation entrée-sortie : convolution 2D
- Fonctions propres : exponentielles 2D

Caractérisation du filtre par sa RI 2D $h(x_1, x_2)$

Propriétés importantes

- Causalité : généralement sans importance en 2D
- Stabilité : essentielle

Représentation

- Par réponse impulsionnelle finie : largement utilisée, pas de difficulté (notion de « masque »)
- Par équation de récurrence : difficultés sérieuses (notions de causalité en 2D)

Problèmes types

- Amélioration d'images. Exemples : débruitage, rehaussement de contraste.
- Segmentation : détection de contours, détection de régions.

Outils

- Outils empiriques. Exemple : égalisation d'histogramme.
- Filtrage linéaire ou non linéaire.
- Estimation.

Contraintes

- Mise en œuvre pour traitements rapides.
- Stabilité des filtres.
- Perception du bruit (œil sensible aux *contrastes* fréquentiels).

Forme classique d'un filtre en traitement d'images

- Choix d'un voisinage (d'une taille de fenêtre)
- Choix d'un opérateur (linéaire ou non) sur les éléments du voisinage
- Parcours de l'image

Exemples de filtres linéaires passe-bas

$\frac{1}{9} \times$	1	1	1
	1	1	1
	1	1	1

$\frac{1}{16} \times$	1	2	1
	2	4	2
	1	2	1

Moyenne

Moyenne pondérée

Débruitage

Voir `demo_debruitage.m`

Rehaussement de contraste

Voir `demo_reh.m`

Détection de contours et segmentation

Voir `demo_seg.m`