

Détection et mesure d'ondes

Yves Goussard

GBM6103A

29 octobre 2014

- 1 Cadre de travail
- 2 Détection d'échos de courte durée
 - Résolution par MAP
 - Détection par gabarit
- 3 Détection et estimation d'une seule onde
- 4 Détection et estimation de plusieurs ondes
 - Restauration d'un signal Bernoulli-gaussien
 - Restauration d'un signal sous hypothèse L_2L_1

Hypothèses générales

- Signaux réels à temps discret
- Forme d'onde de référence connue à support fini $s(n)$; $0 \leq n \leq N$

- Signal observé
$$z(n) = \sum_{i=1}^I a_i s(n - \tau_i) + b(n)$$

- a_i : amplitude de l'onde reçue
- τ_i : instant d'occurrence de l'onde reçue
- $b(n)$: bruit additif gaussien blanc (sauf indication contraire)

Position du problème

- Nature et difficulté du problème : dépendent du degré de connaissance de I et des valeurs possibles de a_i et τ_i
- Présentation des approches adaptées aux grands types de problèmes

Hypothèses

- Au plus *une* onde : $I = 0$ ou $I = 1$
- Pas d'incertitude sur le retard : $\tau_i = 0$
- Si l'onde est présente, pas d'incertitude sur l'amplitude : $a_i = 1$

Formulation équivalente

- $I = 1$; $\tau_1 = 0$; $a_1 = 0$ ou $a_1 = 1$
- Objectif : déterminer si $a_1 = 0$ ou si $a_1 = 1$
 - Pas d'onde : $a_1 = 0$; hypothèse \mathcal{H}_0
 - Une onde : $a_1 = 1$; hypothèse \mathcal{H}_1

Formalisation

- Probabilités *a priori*; $p_0 = p(\mathcal{H}_0)$; $p_1 = p(\mathcal{H}_1)$
- $b : \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_b)$

Résultat général

$$\mathbf{s}^t \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{z} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{>}} \frac{1}{2} \mathbf{s}^t \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{s} + \ln(p_0/p_1)$$

Remarques

- Détecteur : transformation *linéaire* des mesures \mathbf{z}
- Comparaison à un seuil : étude classique des caractéristiques du détecteur (courbes COR, ...)
- Extension empirique simple au cas de plusieurs ondes sans recouvrement
- Bruit blanc : $\mathbf{s}^t \mathbf{z} \underset{\mathcal{H}_0}{>} \underset{\mathcal{H}_1}{<} \frac{1}{2} \mathbf{s}^t \mathbf{s} + \ln(p_0/p_1)$. **Filtre adapté**
- $\mathbf{s}^t \mathbf{z} = \gamma_{sz}(0)$: détecteur par corrélation

Limitations pratiques

- Hypothèses simplistes (tout ou rien)
- Un seul écho par fenêtre de traitement

Détecteur par gabarit (1)

Hypothèses

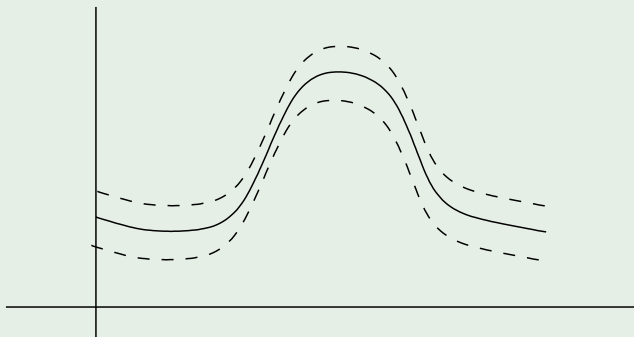
Hypothèses identiques aux précédentes, mais

- $b(n)$ blanc *uniformément distribué* sur $[-\epsilon, \epsilon]$
- $\exists n : s(n) > 2\epsilon$

Formalisation

- $p(z|\mathcal{H}_1) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\epsilon} \text{Ind}_{[-\epsilon, \epsilon]}(z(n) - s(n))$
peut prendre les valeurs $1/(2\epsilon)^N$ ou 0
- $p(z|\mathcal{H}_0) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\epsilon} \text{Ind}_{[-\epsilon, \epsilon]}(z(n))$ idem

Interprétation



Remarques

- Mêmes limitations que le détecteur MAP
- Dans certaines conditions, meilleure robustesse

Détection et estimation d'une seule onde (1)

Hypothèses

- Une seule onde : $l = 1$, a_1 et τ_1 inconnus
- b : bruit gaussien blanc

Approche

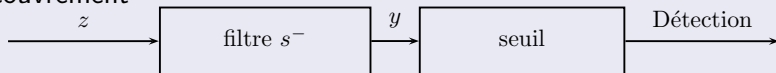
- Résolution par maximum de vraisemblance
- Extension de l'exemple des notes de cours, pp. 55–58

Résultats

- $J = -\ln(f(\mathbf{z} ; a, \tau)) \equiv \sum_n (z(n) - a s(n - \tau))^2$
- Minimisation p/r à τ indépendante de a : $\hat{\tau} = \arg \max_{\tau} \gamma_{zs}(\tau)$
- $\hat{a} = \frac{\gamma_{zs}(\hat{\tau})}{\gamma_{ss}(0)}$

Remarques

- $\gamma_{zs}(\tau)$: sortie d un filtre de RI $h(n) = s(-n)$
On retrouve le filtrage adapté
- Extension empirique immédiate au cas d'ondes multiples sans recouvrement



- Limitations analogues à celles du filtre adapté
- Pas d'expression explicite de $\hat{\tau}$

Illustration

Voir démonstrations `demo_fa_ECG.m` et `demo_fa_echo.m`

Détection et estimation de plusieurs ondes (1)

Hypothèses

- l inconnu quelconque, a_i et τ_i inconnus
- b : bruit blanc gaussien de variance σ_b^2

Formalisation comme un problème d'estimation d'entrée

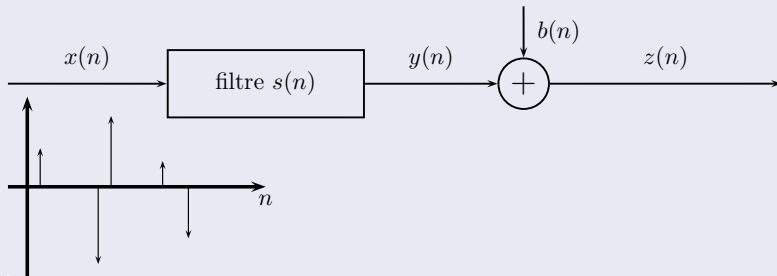
$$z(n) = \sum_{i=1}^l a_i s(n - \tau_i) + b(n)$$

- On pose $x(n) \triangleq \sum_{i=1}^l a_i \delta(n - \tau_i)$
- On a $z(n) = (x * s)(n) + b(n)$

Estimation de $\{l; a_i; \tau_i\} \iff$ estimation de x

Interprétation

- $x(n)$: signal impulsionnel
- Instant d'occurrence et amplitude d'une impulsion \longleftrightarrow instant d'occurrence et amplitude de l'onde correspondante



Dét. et est. de plusieurs ondes \longleftrightarrow restauration d'un signal impulsionnel

Approche

- Restauration du signal x : estimateur MAP (conditions difficiles)
- Modèle *a priori* de signaux impulsionnels
 - Pour chaque échantillon : probabilité λ d'occurrence d'une impulsion
 - Si impulsion présente : amplitude gaussienne centrée de variance σ_x^2
 - Processus binaire $q(n)$ (présence ou absence d'une impulsion)
 - $p(x(n)|q(n) = 1) = \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$
- Deux quantités à estimer
 - \mathbf{q} : détection
 - $\mathbf{x}|\mathbf{q}$: estimation des amplitudes

Questions ouvertes

- Estimation conjointe ou marginale ?
- Possibilité de calculer puis de maximiser les vraisemblances ?

Vraisemblance marginale *a posteriori* de \mathbf{q}

$$\ln f(\mathbf{z}|\mathbf{q})f(\mathbf{q}) \propto -\mathbf{z}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z} - \ln |\mathbf{B}| - 2N_e \ln \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{\Pi}\mathbf{S}^t + \sigma_b^2 \mathbf{I}$$

$$\mathbf{\Pi} = \sigma_x^2 \text{diag}(\mathbf{q})$$

Estimation de \mathbf{q} par MAP

- Pas de forme explicite de $\hat{\mathbf{q}}$
- Maximisation empirique par exploration de « voisinages » de la séquence courante. Possible si
 - Calcul facile de la vraisemblance sur le voisinage
 - Mise à jour facile de la vraisemblance lors du choix d'un nouveau \mathbf{q}
- **Compromis complexité des voisinages / efficacité numérique**

Restauration d'un signal Bernoulli-gaussien (3)

Estimation de \mathbf{x} à $\hat{\mathbf{q}}$ connu

- $\mathbf{x}|\hat{\mathbf{q}} : \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{\Pi})$
- Estimation MAP sous hypothèses linéaire et gaussienne
- $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Pi} \mathbf{S}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z}$

Remarques

- Pas de solution explicite
- Possibilité de tomber dans un minimum local
- Robustesse parfois déficiente de l'approche

Illustration

Voir démonstration `demo_BG.m`

Restauration d'un signal sous hypothèse L_2L_1 (1)

Approche

- Démarche de type « restauration d'entrée ». Moindres carrés régularisés
- Terme de pénalisation favorisant l'allure impulsionnelle de x

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{z} - \mathbf{S}\mathbf{x})^t(\mathbf{z} - \mathbf{S}\mathbf{x}) + \lambda \sum_{n=0}^N \varphi(x_n)$$

Interprétation bayésienne

- Bruit b gaussien blanc
- $p(\mathbf{x}) \propto \frac{1}{K} e^{-\sum_{n=0}^N \varphi(x_n)}$

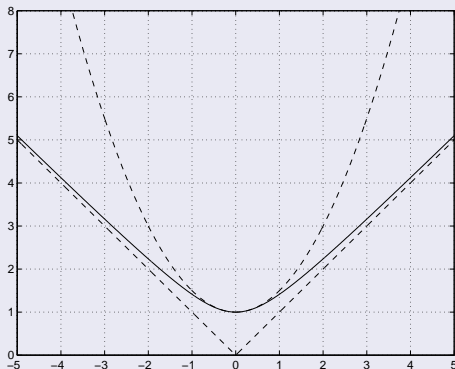
Choix de φ (compromis comportement de x / mise en œuvre) ?

Restauration d'un signal sous hypothèse L_2L_1 (2)

Approche L_2L_1

- φ convexe $\iff J$ convexe
- Possibilité d'utilisation d'algorithmes à directions de descente efficaces

Exemple de fonction de pénalisation L_2L_1 : $\varphi(x) = \sqrt{\delta^2 + x^2}$



En dernier ressort : pénalisation quadratique (L_2)

- Solution explicite (MAP sous hypothèses linéaire et gaussienne)
- Mauvais modèle pour signal impulsionnel
- résultats comparables au filtrage adapté ou à la détection par corrélation

Illustration

Voir démonstration `demo_L2L1.m`