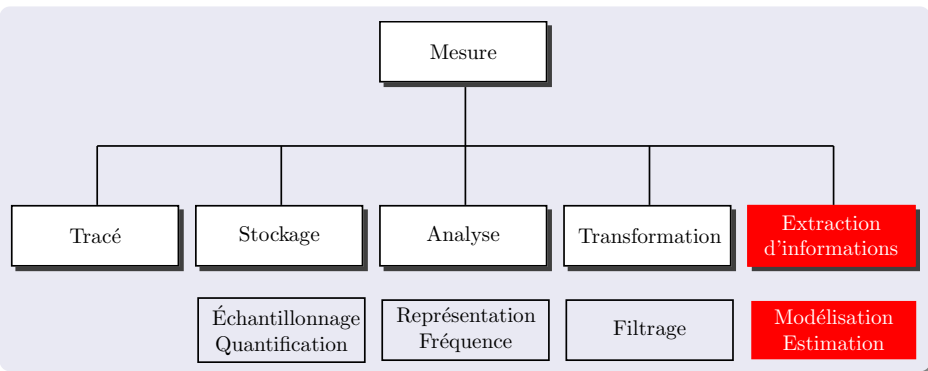


Estimation spectrale

Yves Goussard

GBM6103A

1^{er} octobre 2014



Objectif : représentation d'un signal dans le domaine spectral

Cadre de référence

- *Cadre déterministe* : les outils ont été présentés
- *Cadre aléatoire*
 - une seule réalisation de disponible
 - **problème d'estimation**

Fil conducteur

- Présentation des outils d'estimation du spectre d'un signal aléatoire
- Comparaison avec le point de vue déterministe

- 1 Cadre de travail
- 2 Rappels : densité spectrale de puissance
- 3 Analyse spectrale classique (non paramétrique)
- 4 Analyse spectrale moderne (paramétrique)
- 5 Exemple : analyse spectrale du signal Doppler

Hypothèses générales

- Signaux à valeurs réelles
- Signaux à temps discret – quantités réduites (n, ν_r)
- N échantillons disponibles : x_n ; $0 \leq n \leq N - 1$

Hypothèses possibles sur le signal x

- 1 x_n déterministe à temps discret
- 2 x_n partie de la réalisation d'un signal aléatoire X_n ; $n \in \mathbb{Z}$ stationnaire du 2^e ordre

Effet des deux types d'hypothèses sur l'évaluation des caractéristiques fréquentielles de x ?

Cadre déterministe

- $x_n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu_r)$
- Densité spectrale d'énergie : $|X(\nu_r)|^2 = \mathcal{F}(\gamma_x(n))$
- $\gamma_x(n)$: fonction d'autocorrélation du signal déterministe
- $\gamma_x(n) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p x_{p-n}$

Cadre aléatoire

- On voudrait écrire $X_n = \int u(\nu_r) e^{2i\pi n\nu_r} d\nu_r$
- **Difficulté : intégrale stochastique**

Cadre aléatoire : résultats admis

- L'intégrale stochastique a un sens
- Le calcul direct de $u(\nu_r)$ dépasse le cadre du cours
- On a $E[|u(\nu_r)|^2] = \Gamma_x(\nu_r)$ densité spectrale de puissance de X_n
- $\Gamma_x(\nu_r) = \mathcal{F}(\gamma_x(n))$; $\gamma_x(n)$: fonction d'autocorrélation de X_n
- $\gamma_x(n) = E[X_p X_{p-n}]$ indépendant de p (stationnarité de X_n)

En résumé...

- Dans les deux cas (déterministe et aléatoire)

Spectre : transformée de Fourier la fonction d'autocorrélation

- La nature de la fonction d'autocorrélation diffère selon le cadre adopté

Approche

- X_n : signal aléatoire stationnaire du 2^e ordre
- Objectif : estimation de la fonction d'autocorrélation à partir des N échantillons observés

$$x_n \xleftrightarrow{\text{estimation}} \hat{\gamma}_x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\Gamma}_x(\nu_r)$$

Difficultés

- Impossible d'appliquer la démarche générale pour l'estimation
- Nécessité de recourir à des estimateurs empiriques

Forme des estimateurs

$$\gamma_x(n) = E[X_p X_{p-n}]$$

Propriété d'ergodisme :

- $\hat{\gamma}_x^u(n) = \frac{1}{N - |n|} \sum_{p=|n|}^{N-1} x_p x_{p-|n|}$ estimateur *non biaisé*
- $\hat{\gamma}_x^b(n) = \frac{1}{N} \sum_{p=|n|}^{N-1} x_p x_{p-|n|}$ estimateur *biaisé*

Biais des estimateurs

Si $|n| \leq N - 1$

- $E[\hat{\gamma}_x^u(n)] = \gamma_x(n) \implies$ estimateur non biaisé
- $E[\hat{\gamma}_x^b(n)] = \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \gamma_x(n) \implies$ estimateur biaisé

Variance des estimateurs

Complexe à calculer, même sous hypothèse gaussienne

Remarques

- Estimateur biaisé souvent préférable (meilleur compromis biais - variance)
- On peut écrire

$$E[\hat{\gamma}_x^u(n)] = \text{Rect}_N(n) \gamma_x(n) \quad E[\hat{\gamma}_x^b(n)] = \text{Tri}_N(n) \gamma_x(n)$$

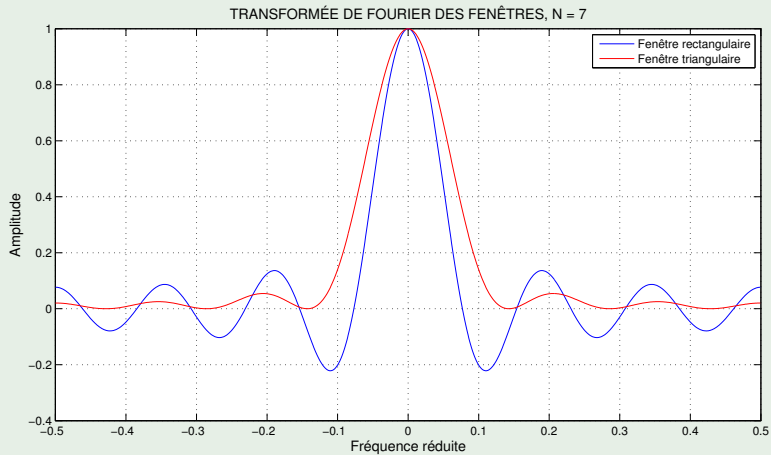
Définition

$$\hat{\Gamma}_x(\nu_r) = \mathcal{F}(\hat{\gamma}_x(n)) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_x(n) e^{-2i\pi n\nu_r}$$

Biais du corrélogramme

- Linéarité de \mathcal{F} et $E[\cdot]$: $E[\hat{\Gamma}_x(\nu_r)] = \mathcal{F}(E[\hat{\gamma}_x(n)])$
- Cas non biaisé :
 $E[\hat{\gamma}_x^u(n)] = \text{Rect}_N(n) \gamma_x(n) \implies E[\hat{\Gamma}_x^u(\nu_r)] = \text{RECT}_N(\nu_r) * \Gamma_x(\nu_r)$
- Cas biaisé :
 $E[\hat{\gamma}_x^b(n)] = \text{Tri}_N(n) \gamma_x(n) \implies E[\hat{\Gamma}_x^b(\nu_r)] = \text{TRI}_N(\nu_r) * \Gamma_x(\nu_r)$
- $\text{RECT}_N(\nu_r) = \frac{\sin(2N-1)\pi\nu_r}{\sin \pi\nu_r}$ $\text{TRI}_N(\nu_r) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin N\pi\nu_r}{\sin \pi\nu_r} \right)^2$

Allure de $\text{RECT}_N(\nu_r)$ et $\text{TRI}_N(\nu_r)$



Principales propriétés

- Cas non biaisé : $\hat{\Gamma}_x^u(\nu_r)$ peut prendre des valeurs négatives !
- Cas biaisé : $\hat{\Gamma}_x^b(\nu_r)$ est toujours positif
- Résolution de $\hat{\Gamma}_x^u(\nu_r) >$ résolution de $\hat{\Gamma}_x^b(\nu_r)$
- Dans tous les cas, le biais du corrélogramme tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini

Limitations du corrélogramme

- Possibilité d'estimées négatives
- Deux opérations en cascade \rightarrow étude difficile

Périodogramme (1)

Objectifs généraux

- Correction des défauts du corrélogramme
- Lien plus direct avec le cadre déterministe

Définition

$$P_x(\nu_r) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi n\nu_r} \right|^2$$

Lien avec le corrélogramme

- On a $P_x(\nu_r) = \widehat{\Gamma}_x^b(\nu_r)$
- Le périodogramme a les mêmes caractéristiques que le corrélogramme sous hypothèse biaisée

Périodogramme (2)

Caractéristiques statistiques

- Biais : $E[P_x(\nu_r)] = \text{TRI}_N(\nu_r) * \Gamma_x(\nu_r)$
- Variance : calcul difficile. Sous hypothèses gaussiennes :
 $\text{Var}[P_x(\nu_r)] \geq |E[P_x(\nu_r)]|^2 \Rightarrow \text{quand } N \rightarrow \infty, \text{Var}[P_x(\nu_r)] \geq \Gamma_x(\nu_r)$

Estimateur non convergent

Illustration du comportement du périodogramme

Voir la démonstration `demo_periodo.m`

Avantages et limitations

- Simple à employer
- Caractéristiques statistiques déficientes
- Possibilités d'extension (autres fenêtres sur la fonction de corrélation) qui ne rendent pas l'estimateur convergent

Périodogramme moyenné (1)

Démarche

- Séparation des N échantillons en L blocs de K échantillons
- Hypothèse de **décorrélation** entre les blocs
- Calcul d'un périodogramme sur *chaque* bloc
- Moyenne des L périodogrammes obtenus

Biais du périodogramme moyenné

- Sur chaque bloc : $E [P_x(\nu_r)] = \text{TRI}_K(\nu_r) * \Gamma_x(\nu_r)$
- En prenant la moyenne : $E [P_x^m(\nu_r)] = \text{TRI}_K(\nu_r) * \Gamma_x(\nu_r)$

Perte de résolution par rapport au périodogramme simple

Périodogramme moyenné (2)

Variance du périodogramme moyenné

- Hypothèse de décorrélation entre blocs : $\text{Var} [P_x^m(\nu_r)] = \frac{1}{L} \text{Var} [P_x(\nu_r)]$
- Si K suffisamment grand, $\text{Var} [P_x(\nu_r)]$ bornée

Estimateur convergent

Illustration du comportement du périodogramme moyenné

Voir la démonstration `demo_periodo.m`

Extensions possibles

- Fenêtre différente sur chaque bloc
- Chevauchement des blocs (fonction `spectrum` de Matlab)
- À N donné, réglage du compromis biais - variance

Périodogramme lissé (1)

Démarche

- Périodogramme simple considéré comme un signal bruité
- Réduction du bruit par filtrage : $P_x^\ell(\nu_r) = P_x(\nu_r) * W(\nu_r)$
- Choix de $W(\nu_r)$ et lien avec les résultats précédents ?

Hypothèses

- $w(n)$ paire, à support compact $[-K + 1, K - 1]$ avec $K \ll N$
- $W(\nu_r)$ normalisée : $\int |W(\nu_r)|^2 d\nu_r = 1$

Biais du périodogramme lissé

- On montre que $E [P_x^\ell(\nu_r)] \approx W(\nu_r) * \Gamma_x(\nu_r)$
- Biais faible $\leftrightarrow W : \begin{cases} \text{faible largeur fréquentielle} \\ \text{grande largeur temporelle} \end{cases}$

Variance du périodogramme lissé

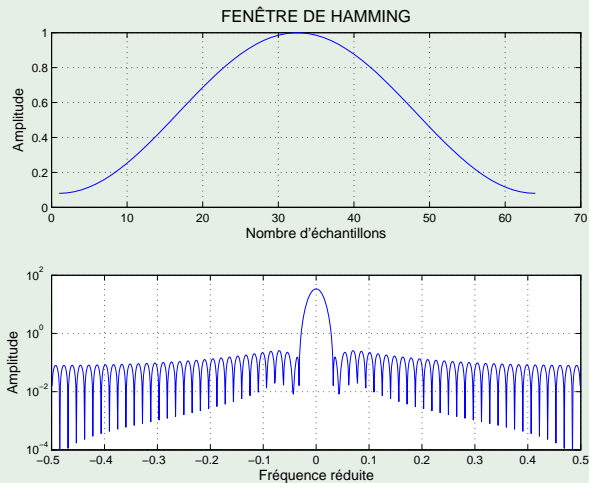
- Étude très délicate
- Sous hypothèses restrictives : $\text{Var} [P_x^\ell(\nu_r)] \approx |W(\nu_r)|^2 * \Gamma_x^2(\nu_r)$
- Variance faible \leftrightarrow $\left\{ \begin{array}{l} W(\nu_r) \text{ petit et uniformément réparti} \\ \text{grande largeur fréquentielle} \\ \text{faible largeur temporelle} \end{array} \right.$
- Convergence assurée

À N fixé, nécessité d'un compromis biais - variance

Illustration du comportement du périodogramme lissé

Voir la démonstration `demo_periodo.m`

Fenêtre de Hamming



Variantes du périodogramme

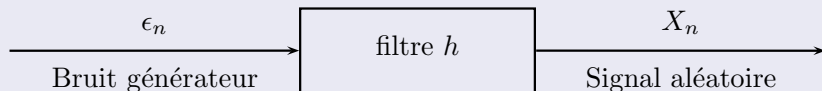
- Algorithmes efficaces (FFT)
- Grande variance à petit nombre d'échantillons
- En général, utiles si $N > 128$ ou 256

Méthodes recommandées

- Méthode de Welch (périodogramme moyenné)
- Périodogramme lissé
- **Attention au compromis biais - variance**

Rappel : modélisation des signaux stationnaires du 2^e ordre

Si X_n suffisamment régulier :



- ϵ_n bruit blanc de variance σ_ϵ^2
- $\Gamma_x(\nu_r) = \sigma_\epsilon^2 |H(\nu_r)|^2$

Principe de l'analyse spectrale paramétrique

- Paramétrer le filtre h
- Estimer les paramètres de h à partir des échantillons observés de X_n
- En déduire $H(\nu_r)$, puis le spectre de X_n

Paramétrisation du filtre h

- h : filtre tout pôles
- $X_n = \sum_{p=1}^P a_p X_{n-p} + \epsilon_n$
- Représentation généralement compacte, simple à manipuler et à estimer

Spectre AR

Une fois les paramètres estimés :

$$\hat{\Gamma}_x(\nu_r) = \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{\left| 1 - \sum_{p=1}^P \hat{a}_p e^{-2i\pi p\nu_r} \right|^2}$$

Estimation des paramètres AR

Utilisation des coefficients de corrélation (1)

Équations de Yule-Walker

- $X_n = \sum_{p=1}^P a_p X_{n-p} + \epsilon_n \implies \gamma(k) = \sum_{p=1}^P a_p \gamma(p-k) ; k \geq 1$
- En faisant varier k de 1 à P

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma(1) & \gamma(2) & \cdots & \cdots & \gamma(P) \\ 0 & \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \cdots & \gamma(P-1) \\ \vdots & \gamma(1) & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma(1) \\ 0 & \gamma(P-1) & \cdots & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\epsilon^2 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(0) \\ \gamma(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma(P) \end{pmatrix}$$

Analyse spectrale AR

Utilisation des coefficients de corrélation (2)

Procédure

- Choix de l'ordre P
- Estimation des coefficients de corrélation $\{\gamma(0), \dots, \gamma(P)\}$
- Résolution de l'équation de Yule-Walker $\rightarrow \{\hat{\sigma}_\epsilon^2, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_P\}$
- Évaluation du spectre

Avantage

- Algorithmes simples

Inconvénients

- Estimateur des coefficients de corrélation ?
- Étapes multiples, caractéristiques globales de l'estimateur spectral ?
- Limitation pratique : $P \leq N/2$

Démarche

- Écriture de la relation entrée-sortie sous la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{a} + \boldsymbol{\epsilon}$$

- \mathbf{x} , \mathbf{X} : vecteur et matrice formés à partir des échantillons observés
- \mathbf{a} : vecteur des coefficients $\{a_1, \dots, a_p\}$ du modèle
- $\boldsymbol{\epsilon}$: vecteur des échantillons du bruit générateur (considéré comme une incertitude)

Estimation des coefficients

- Approche générale sous hypothèses linéaire et gaussienne

- MAP : $\hat{\mathbf{a}} = \left(\mathbf{X}^t \mathbf{X} + \frac{\sigma_{\boldsymbol{\epsilon}}^2}{\sigma_a^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{x}$

- MV : $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{x}$

Analyse spectrale AR

Utilisation directe des échantillons observés (2)

Caractéristiques de la méthode

- Bon comportement général (biais, variance)
- Estimateur MV : choisir $P \leq N/2$
- Estimateur MAP : on peut aller jusqu'à $P = N$

En pratique

- Choisir l'ordre P du modèle
- Choisir le type d'estimateur (rapport P/N , largeur de bande de X_n ...)
- Estimer \mathbf{a}
- En déduire le spectre de X_n . σ_ϵ^2 s'estime par la puissance des résidus

Illustration du comportement de la méthode

Voir la démonstration `demo_AnSpPar.m`

analyse spectrale du signal Doppler

Voir la démonstration `demo_AS Doppler.m`