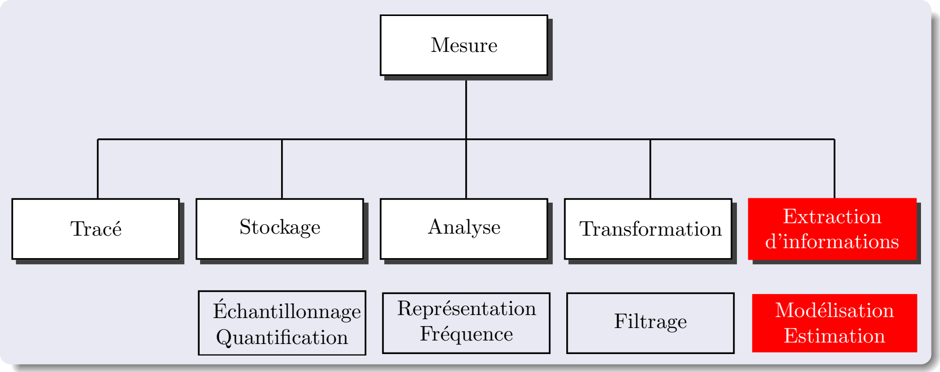
Signal aléatoire

Yves Goussard

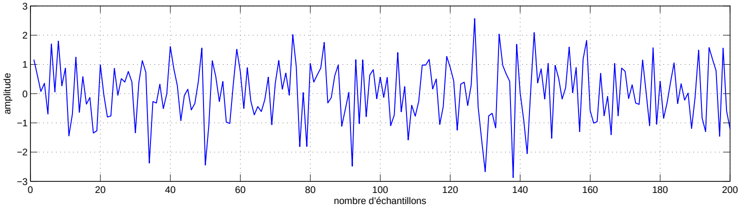
GBM6103A

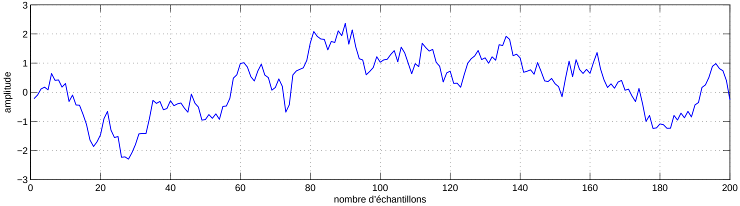
17 septembre 2014

Traitement de signaux biomédicaux

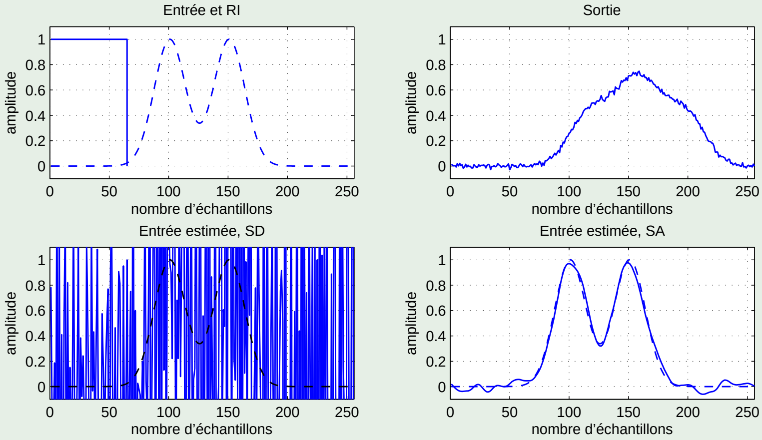


Notion de « bruit »





Approches possibles



Pourquoi étudier les signaux aléatoires ?

- Utilité de pouvoir tenir compte des incertitudes
- Nécessité disposer des mêmes outils que pour les signaux déterministes :
  - représentation fréquentielle
  - filtrage

Objectif

Introduction des techniques de base pour la manipulation de signaux aléatoires

Plan

Cadre

Hypothèses générales

- Grandeurs réelles
- Grandeurs discrètes
- Dimensions possiblement infinies
- Nombre fini de composantes : manipulation de vecteurs

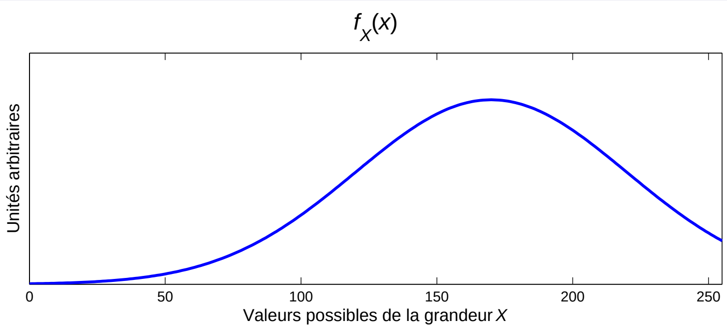
$$x_n \;;\; 0 \leq n \leq N-1 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{x}$$

Les signaux sont entachés d'incertitudes

Variables aléatoires

Interprétation empirique

Une grandeur *scalaire* X



Interprétation

$f_X(x)$: *confiance* que la grandeur X prendra la valeur x

Densité de probabilité

- X : variable aléatoire
- $f_X(x)$: densité de probabilité

$$f_X(x)\ dx = \Pr\{x \leq X < x + dx\}$$

Propriétés

- $f_X(x) \geq 0\,;\qquad \int f_X(x)\ dx = 1$
- Espérance ou moyenne : $\mathrm{E}[X] = \int x\ f_X(x)\ dx$
- Espérance d'une fonction $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \int \Phi(x)\ f_X(x)\ dx$
- Moments d'ordre p : $m_p[X] = \mathrm{E}[X^p] = \int x^p\ f_X(x)\ dx$

Variables aléatoires d'ordre 2

Définition

- Le moment d'ordre 2 existe
- Conséquence : le moment d'ordre 1 (la moyenne) existe

Variance

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = m_2[X] - m_1[X]^2 = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \mathrm{E}\left[X\right]^2 = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}\left[X\right])^2\right]$$

Variables aléatoires gaussiennes

Définition

$$\mathcal{N}(m, \sigma^2) : f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Importance

- Représente adéquatement de nombreux phénomènes incertains (théorème de la limite centrale)
- Choix raisonnable si on ne connaît que la moyenne et la variance d'une variable aléatoire
- Permet souvent de mener les calculs à leur terme

Variable aléatoire : *un échantillon* pris indépendamment de tous les autres

Couples de variables aléatoires

Position du problème

- Deux échantillons X et Y
- Comment exprimer leur *comportement d'ensemble* ?

Formalisation : extension du cas scalaire

- Densité de probabilité du couple

$$
\begin{aligned}
f_{XY}(x,y)\, dx\, dy &= \Pr\{x \leq X < x + dx \; ; \; y \leq Y < y + dy\} \\
f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad &; \quad \int\int f_{XY}(x,y)\; dx\; dy = 1
\end{aligned}
$$

Loi de chaque élément du couple

$$f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)\, dy \quad ; \quad f_Y(y) = \int f_{XY}(x,y)\, dx$$

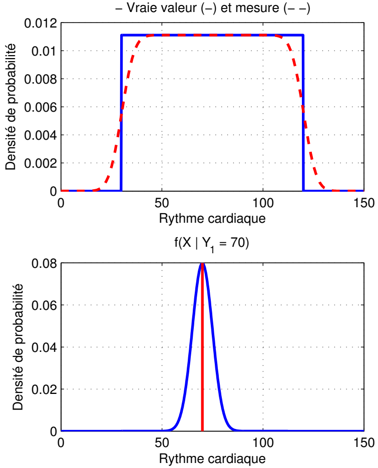
Indépendance

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \iff f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

Covariance et corrélation (lien statistique entre X et Y)

- $\operatorname{Cov}[X,Y] = \operatorname{E}[(X - \operatorname{E}[X])(Y - \operatorname{E}[Y])]$
- X et Y indépendantes $\Longrightarrow \operatorname{Cov}[X,Y] = 0$
- Coefficient de corrélation : $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\operatorname{Var}[X]\operatorname{Var}[Y]}} \quad ; \quad -1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
- Matrice de covariance :
$$\boldsymbol{R}_{XY} = \operatorname{E}\left[\begin{pmatrix} X - \operatorname{E}[X] \\ Y - \operatorname{E}[Y] \end{pmatrix} (X - \operatorname{E}[X]\ ,\ Y - \operatorname{E}[Y])\right]$$

La connaissance de Y renseigne-t-elle sur les valeurs plausibles de X ?



Formalisation

- (X, Y) de loi $f_{XY}(x, y)$
- Règle de Bayes

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

- $f_{X|Y=y}(x)$: loi conditionnelle de X sachant que Y vaut y

Couples de variables aléatoires gaussiennes

Définition

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{m}_{XY}, \boldsymbol{R}_{XY}) : f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{R}_{XY}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-m_X, y-m_Y)\boldsymbol{R}_{XY}^{-1}\binom{x-m_X}{y-m_Y}}$$

Propriétés

Si le couple (X, Y) suit une loi gaussienne

- Chacune des variables est gaussienne
- Les lois conditionnelles sont gaussiennes

Importance pratique

- Choix raisonnable si (X, Y) n'est connu que par sa moyenne et sa matrice de covariance
- Représente une large gamme de phénomènes

Vecteurs aléatoires

Définition et propriétés

◂ Couples de VA

Extension directe des propriétés des couples de variables aléatoires

Est-ce suffisant ?

- Représentations d'incertitudes dans des signaux de taille finie : OK
- Signaux de taille infinie ? ? ?
- Opérations usuelles (convolution, représentation fréquentielle...) ? ? ?

Signaux aléatoires à temps discret

Définition

- $X = \{X_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ signal aléatoire (ensemble de variables aléatoires)
- $f_{X_n}(x_n)$; $n \in \mathbb{Z}$ impossible à définir
- Comportement de X défini à partir de la loi conjointe de tout sous-ensemble fini de ses composantes
- Indépendance de deux signaux définie de manière analogue

Caractéristiques importantes

- Caractéristiques *instantanées* : caractéristiques de tout échantillon (pris indépendamment des autres)
  $f_{X_n}(x_n)\ ;\ m_n = \mathrm{E}[X_n]\ ; \sigma_n^2 = \mathrm{Var}[X_n]$ ...
- Caractéristiques du *deuxième ordre* : caractéristiques de tout couple d'échantillons
  Covariance : $r_X(n,p) = \mathrm{Cov}[X_n, X_p]$
- Signal *décorrélé* : $\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2\ ,\ n \neq p \Rightarrow r_X(n,p) = 0$

Propriétés des signaux aléatoires à temps discret

Stationnarité

- Stationnarité forte : loi temporelle invariante par translation
- Stationnarité faible (du 2^e^ ordre) : moments d'ordre 1 et deux invariants par translation

$$m_n = \mathrm{E}\left[X_n\right] = m \qquad r_X(n,p) = \mathrm{Cov}\left[X_n, X_p\right] = r_X(p-n)$$

Ergodisme

- Possibilité de remplacer une espérance par une moyenne temporelle
- Ergodisme pour une propriété :

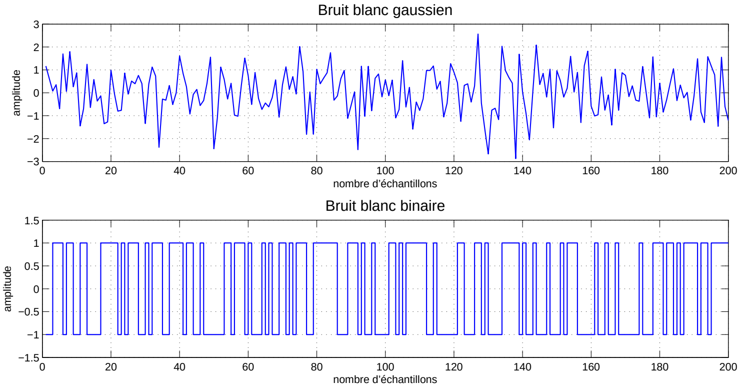
$$\mathrm{E}\left[\varphi(X_{k_1}, \ldots, X_{k_n})\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(X_{k_1+i}, \ldots, X_{k_n+i})$$

- Exemples : moyenne empirique, variance empirique, ...

Exemples de signaux aléatoires (1)

Bruits blancs

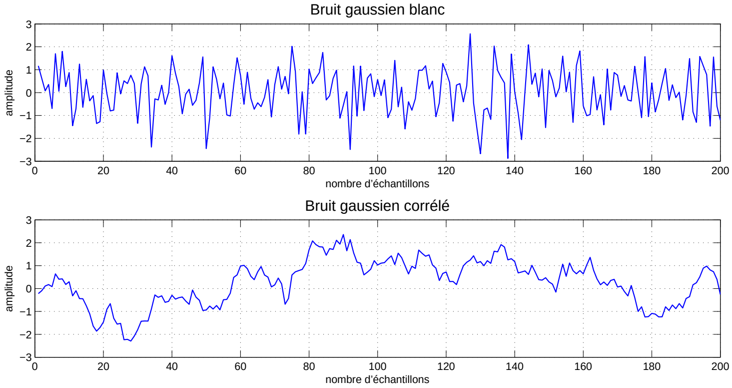
▸ Représentation fréquentielle



- Échantillons *indépendants identiquement distribués* (iid)
- Allures variées

Exemples de signaux aléatoires (2)

Bruits gaussiens



- Loi temporelle gaussienne
- Corrélation $\longrightarrow$ allures très différentes

Signaux d'ordre deux, voire gaussiens : large diversité

Représentation fréquentielle et filtrage des signaux aléatoires

Position du problème

- Représentation spectrale : $X_n = \displaystyle\int u(\nu)\ e^{2i\pi\nu n}\ d\nu$
- Filtrage : $Y_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k X_{n-k}$

Difficultés

- $u(\nu)$ aléatoire ; intégrale d'une telle quantité ?
- Y_n : somme *infinie* de variables aléatoires ?
- Lien entre signaux aléatoires et réalisations ?

Approche

- Passage par une quantité déterministe : fonction de corrélation
- Restriction aux signaux stationnaires d'ordre deux

Signaux aléatoires stationnaires d'ordre deux

Rappel des principales caractéristiques

X_n ; $n \in \mathbb{Z}$ signal aléatoire stationnaire d'ordre 2. $\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2$

- La moyenne $m_n = \mathrm{E}[X_n]$ et la covariance $r_X(n,p)$ existent
- Ces quantités sont invariantes par décalage :
$$m_n = m \qquad ; \qquad r_X(n,p) = r_X(p-n)$$
- $r_X(p-n) = r_X(k)$ fonction d'autocorrélation

En pratique

X_n stationnaire d'ordre 2 : X_n défini complètement par sa moyenne et sa fonction de corrélation

Représentation fréquentielle

Principaux résultats

- Représentation spectrale $u(\nu)$: $X_n = \int u(\nu)\ e^{2i\pi\nu n}\ d\nu$
- $u(\nu)$ quantité aléatoire
- On a : $\mathrm{E}\left[|u(\nu)|^2\right] = \mathcal{F}(r_X(k))$ $\quad r_X(k)$: fonction d'autocorrélation de X
- $\Gamma_X(\nu) \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{E}\left[|u(\nu)|^2\right]$: densité spectrale de puissance (spectre) de X

En pratique

◂ Bruits blancs

- La notion de phase a disparu...
- Lien avec la réalisation dont on dispose :

$$r_X(k) = \mathrm{E}\left[X_n X_{n-k}\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n-k} \text{ (ergodisme)}$$

- Comparaison avec cadre déterministe ; approche « estimation »

Filtrage (1)

Position du problème

- Définir la sortie du filtre
- Définir les caractéristiques spectrales de la sortie du filtre
- Faire le lien avec la réalisation dont on dispose

Difficulté

Somme infinie $\quad Y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k X_{n-k}$

Principaux résultats

$$r_Y(k) = r_X(k) * h(k) * h(-k)$$

$$\Gamma_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 \; \Gamma_X(\nu)$$

Filtrage (2)

Principaux résultats

$$r_Y(k) = r_X(k) * h(k) * h(-k)$$

$$\Gamma_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 \, \Gamma_X(\nu) \tag{1}$$

En pratique

- Calcul de la sortie avec la réalisation dont on dispose
- Sortie : réalisation d'un signal aléatoire de spectre $\Gamma_Y(\nu)$
- Spectres de X_n et Y_n liés par la relation (1)

Modélisation des SA stationnaires d'ordre 2 (1)

Objectif : paramétrisation d'un signal aléatoire stationnaire d'ordre 2

Démarche

- SA $X_n \Longleftrightarrow r_X(k) \Longleftrightarrow \Gamma_X(\nu)$
- Si $X_n = h * \epsilon_n$; ϵ_n : bruit blanc unitaire du 2e ordre

$$\boxed{\Gamma_X(\nu) = |H(\nu)|^2}$$

- h : filtre linéaire dynamique

$$X_n = -\sum_{p=1}^{P} a_p X_{n-p} + \sum_{q=0}^{Q} b_p \epsilon_{n-q}$$

- Modèle (paramétrisation) de X_n :

$$\Gamma_X(\nu) = |H(\nu)|^2 = \frac{|B(\nu)|^2}{|A(\nu)|^2}$$

Modélisation des SA stationnaires d'ordre 2 (2)

Deux problèmes

- Analyse : connaissant X_n, trouver A et B
- Synthèse : connaissant $\Gamma_X(\nu)$, trouver A et B

Résultat général

$$\text{Si} \quad \int_{-1/2}^{1/2} |\ln \Gamma_X(\nu)| \, d\nu \; < \; \infty$$

- La modélisation de X_n par A, B est possible (l'ordre du modèle pourrait être infini)
- Conditions techniques supplémentaires : même résultat avec un filtre tout pôles ($Q = 0$)

Modélisation des signaux SA d'ordre 2 (3)

Interprétation

Tout SA stationnaire d'ordre 2 : filtré d'un bruit blanc par un filtre rationnel, voire tout pôles

Exemples d'application

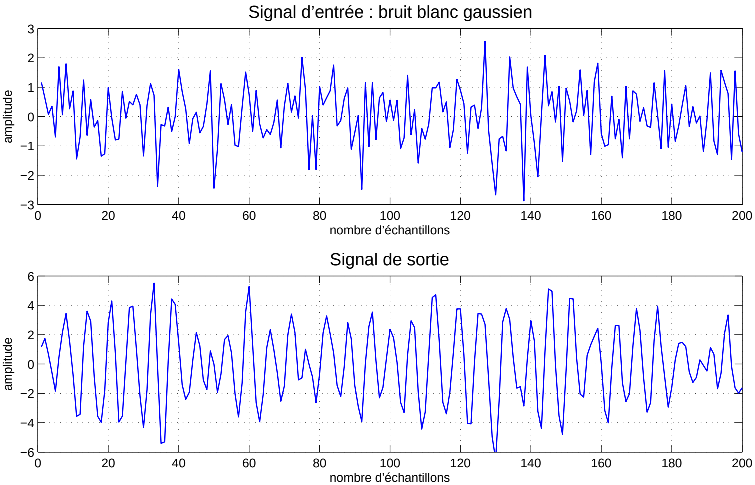
- Analyse : analyse spectrale

$$X_n \longrightarrow (A, B) \longrightarrow \Gamma_X(\nu)$$

- Synthèse : génération de bruits aux caractéristiques spectrales données

Synthèse de signaux aléatoires (1)

Synthèse d'un bruit gaussien à bande étroite



Synthèse d'un bruit gaussien à bande étroite : filtre générateur