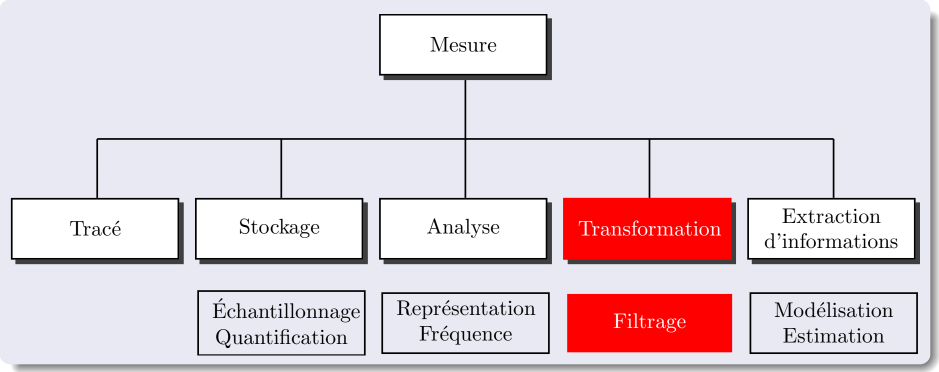
Filtrage linéaire

Yves Goussard

GBM6103A

10 septembre 2014

Traitement de signaux biomédicaux



Principale caractéristique : reproductibilité

Exemples d'utilisation

- Modélisation de systèmes biologiques
  - membranes cellulaires
  - fonctions physiologiques
- Traitement de signaux
  - retrait de composantes nuisibles (secteur)
  - « débruitage »

Plan

Cadre de travail

Cadre adopté

- Signaux et filtres *à temps discret*
- Temps et fréquences *réduites* : $T_e = 1, \nu_e = 1$, utilisation de n et ν_r
- Filtres *invariants*
- Filtres *linéaires*

Transformée en z

Définition et interprétation

Utilité

- Représentation et caractérisation des filtres
- Complémentarité et liens avec la transformée de Fourier

Définition

$$\text{TF}: \quad X(\nu_r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\nu_r}$$

$$\text{TZ}: \quad X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n z^{-n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Interprétation de la transformée en z

- Somme de deux séries entières
- Convergence sur un *anneau* du plan complexe
- Analytique sur sa région de convergence

Lien entre transformée de Fourier et transformée en z

- La TF existe $\Longleftrightarrow$ le cercle unité est inclus dans la RC de la TZ
- $X(\nu_r) = X(z)_{|z=e^{2i\pi\nu_r}}$

Principales propriétés

- Équivalence entre x_n, $X(z)$ et $X(\nu_r)$; $\nu_r \in [-1/2\ ,\ 1/2[$ (analyticité de $X(z)$)
- Inversion : $x_n = \displaystyle\oint X(z)\ z^{n-1}\ dz$
- Propriétés analogues à celles de la TF à temps discret

Définitions équivalentes

Le système :

1. vérifie le principe de superposition
2. a une relation entrée-sortie exprimable comme un produit de convolution
3. admet les fonctions exponentielles comme fonctions propres

Caractérisations équivalentes

$h(n)$	$H(z)$	$H(\nu_r)$
Réponse impulsionnelle	Fonction de transfert	Réponse fréquentielle

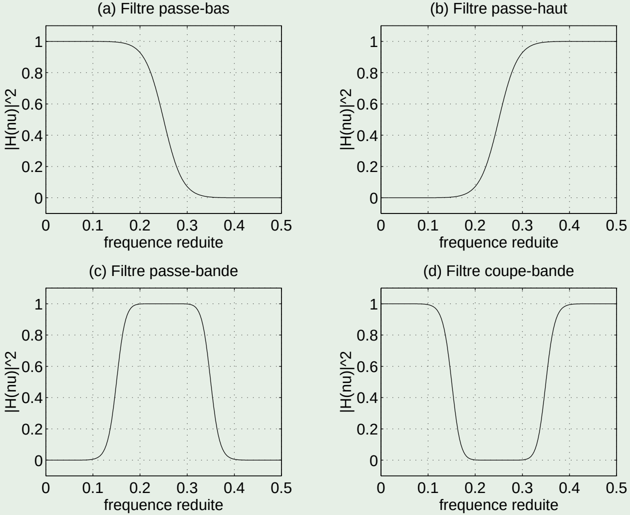
Relation entrée sortie

Dans les domaines transformés :

$$Y(z) = H(z)X(z) \qquad Y(\nu_r) = H(\nu_r)X(\nu_r)$$

Catégories de filtres

Exemple : types classiques de filtres



Propriétés importantes

Stabilité

Exemple instabilité

- Essentielle dans la pratique (voir illustration transparent suivant et démonstration demo_stabilite.m)
- Définitions équivalentes :
  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h(n)|$ converge $\quad H(\nu_r)$ existe $\quad H(z)$ définie sur le cercle unité

Causalité

- Illustration : voir démonstration demo_causalite.m
- Définition :

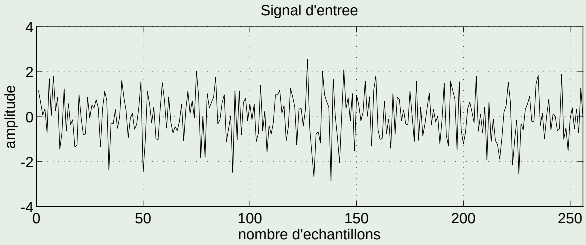
$$\forall n < 0 \quad ; \quad h(n) = 0$$

- Importance pratique : dépend du type d'application

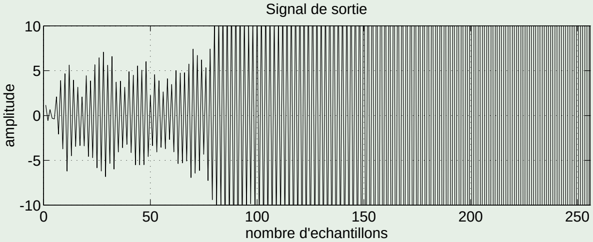
Paramétrisation de filtres ayant de *bonnes* propriétés

Exemple de comportement instable

(a)



(b)



Propriétés des filtres

Filtres rationnels (1)

Approche

- Filtre défini par une *équation aux différences* :
$$\sum_{p=0}^{P} a_p y_{n-p} = \sum_{q=0}^{Q} b_q x_{n-q}$$
$\{a_p \; ; \; b_q\}$ paramétrisent le filtre
- Intérêt : partie récurrente $\longrightarrow$ RI infinie
- Caractérisation du filtre par sa fonction de transfert

Fonction de transfert d'un filtre rationnel

$$H(z) = \frac{\sum_{q=0}^{Q} b_q z^{-q}}{\sum_{p=0}^{P} a_p z^{-p}}$$

Spécification de la fonction de transfert

- La forme analytique ne suffit pas à la définir complètement
- Il faut aussi préciser la région de convergence

Filtres rationnels (2)

Propriétés importantes de $H(z)$

- Pôles : points *singuliers* de $H(z)$
- Zéros : points *singuliers* de $1/H(z)$

$H(z)$ doit être mis sous forme irréductible

Pôles et stabilité

Si un filtre rationnel est *causal*

$$\text{stabilité} \iff \text{pôles à l'intérieur du cercle unité}$$

Filtres dynamiques

Définition

Filtre qui est à la fois

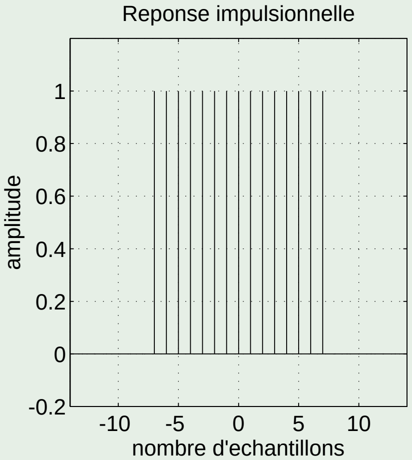
- Rationnel
- Causal
- Stable

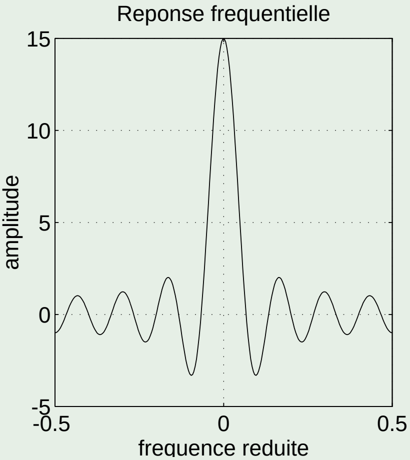
Types de filtres dynamiques

- Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)
- Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)
- Filtres tout pôles (FTP) ; forme récurrente complète

Exemple de filtre rationnel

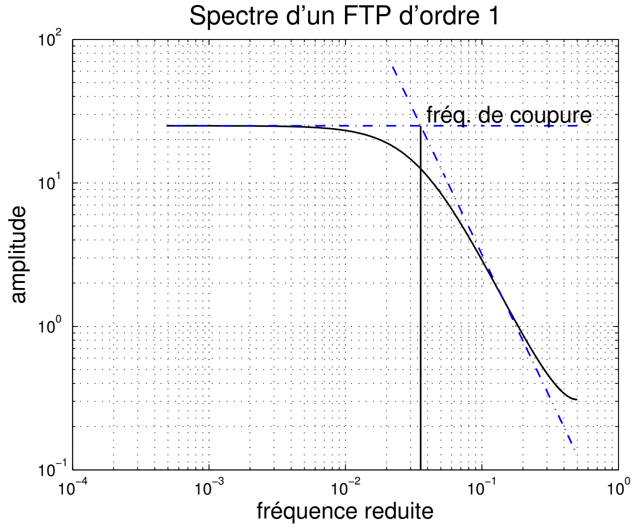
Fenêtre rectangulaire





Exemple de filtre dynamique

Filtre tout pôles du 1er ordre



Position du problème

Réalisation d'une fonction particulière. Exemples :

- Filtrage anti-repliement
- Débruitage

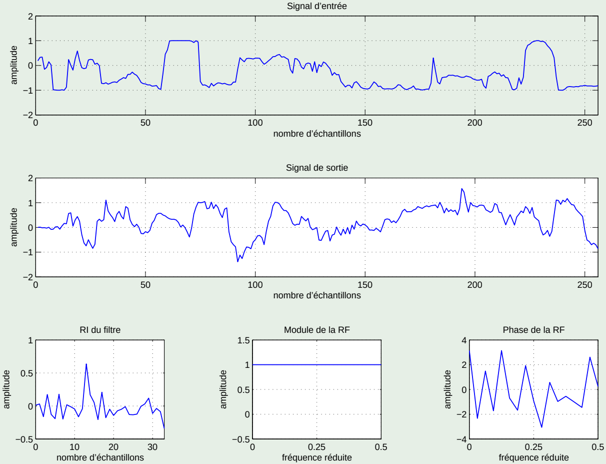
Objectifs de la section

- Présentation générale (peu de technique)
- Mise en évidence de certaines limites

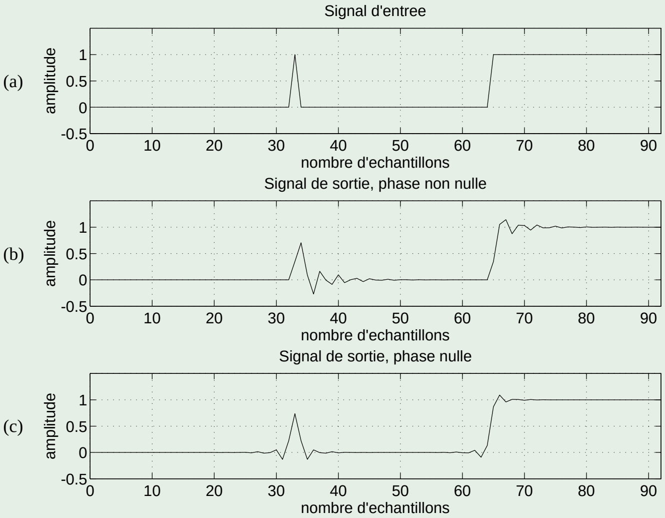
Approche générale

- Caractérisation du filtre par le *module* de sa réponse fréquentielle
- Autres caractéristiques (phase, rebonds temporels,...) ?

Importance de la phase



Rebonds temporels



Synthèse de filtres

Techniques élémentaires

- Association de filtres tout pôles (ou de leurs inverses)
- Suppression de fréquences particulières :

$$H(\nu_r) = H(z)_{\big|z=e^{2i\pi\nu_r}}$$

$$H(\nu_r) = 0 \text{ pour } \nu_r = \pm\nu_0$$

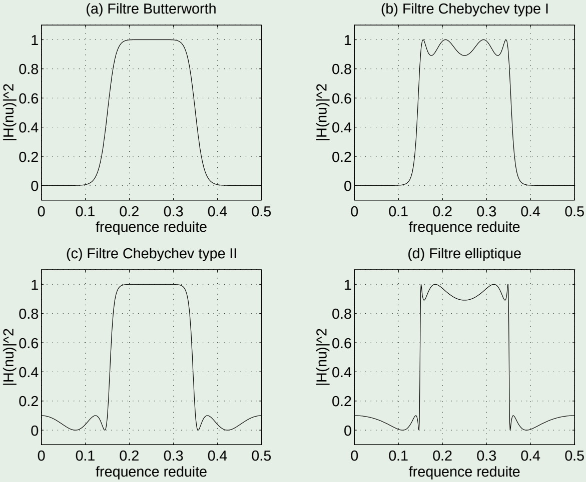
- Illustration en TP !

Synthèse de filtres

Approche systématique

- Gabarit sur $|H(\nu_r)|$
- Choix d'un type de filtre ▸ Types classiques de filtres
- Détermination analytique ou numérique des coefficients du filtre, en s'appuyant sur les filtres à temps continu
- Méthodes disponibles dans de nombreux logiciels scientifiques
- Exemple simple en TP !

Types classiques de filtres



Synthèse de filtres