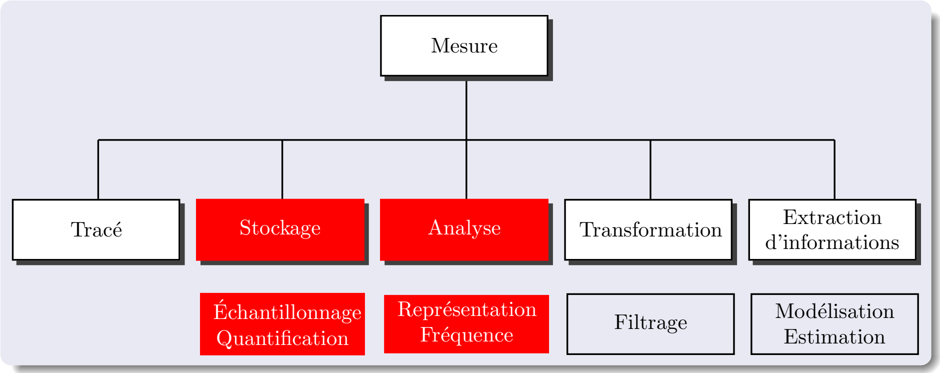
Signal déterministe

Yves Goussard

GBM6103A

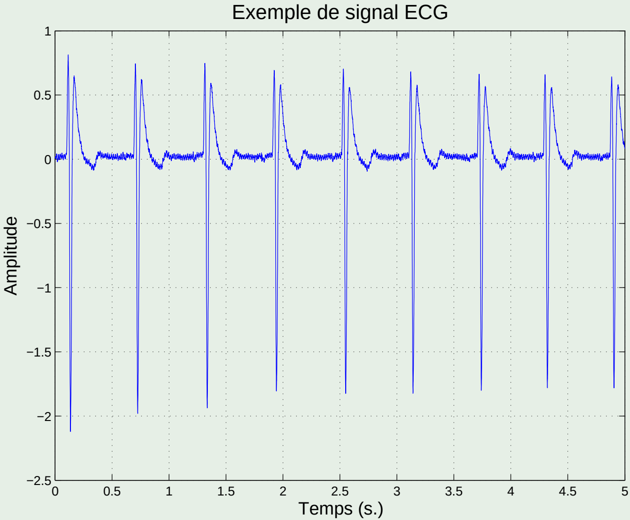
3 septembre 2014

Traitement de signaux biomédicaux



Plan

Exemple : signal ECG



Cadre de travail

Types de signaux

Signal $x(t)$

- à valeurs dans $\mathbb{C}$
- dépendant d'une variable continue t (généralement le temps)

Opérations

- Opérations usuelles ($+$, $\times$, etc.)
- Convolution : $(x * y)(t) = \displaystyle\int x(\tau)\ y(t-\tau)\ d\tau$
- Corrélation : $\gamma_{xy}(\tau) = \displaystyle\int x(t)\ y^*(t-\tau)\ dt$
- Produit scalaire : $< x \cdot y >$

Représentation des signaux

Approche géométrique : décomposition sur une base $\{e_i(t)\ ; i \in \mathcal{I}\}$

Résultats généraux

- Base $\{e_i(t)\ ; i \in \mathcal{I}\}$ dénombrable
- Existence et unicité de la décomposition $x(t) = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i e_i(t)$
- Calcul des a_i ?

Base orthonormée

- Définition : $\{e_i(t)\ ; i \in \mathcal{I}\}$ orthonormale $\Longleftrightarrow < e_i \cdot e_j >= \delta_{ij}$
- Résultat : si $\{e_i(t)\ ; i \in \mathcal{I}\}$ orthonormale, alors $a_i =< x \cdot e_i >$

Difficultés

- Nombre infini de vecteurs de base
- Choix de la base

Théorème des projections

Position du problème

- $\{e_i(t)\ ; i \in \mathcal{I}\}$ base orthonormale
- $\overline{\mathcal{I}}$ sous-ensemble (fini) de $\mathcal{I}$
- Meilleure approximation de x à partir de $\{e_i(t)\ ; i \in \overline{\mathcal{I}}\}$?

Résultat

- $\overline{x}$ tel que $x - \overline{x}$ orthogonal à $\{e_i(t)\ ; i \in \overline{\mathcal{I}}\}$
- $\forall i \in \overline{\mathcal{I}}\ \ : <(x - \overline{x}) \cdot e_i >= 0 \iff < x \cdot e_i >=< \overline{x} \cdot e_i >$

Interprétation

- $\overline{x}$ obtenu en prélevant les coefficients de la décomposition de x sur $\{e_i ; i \in \overline{\mathcal{I}}\}$

Exemple : développement en série de Fourier

Définition

- x : signal à valeurs réelles ou complexes défini sur un intervalle I de longueur T
- Développement de x en sérier de Fourier :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi kt/T}$$

- Calcul des X_k, coefficients du développement en série de Fourier (DSF) :

$$X_k = \frac{1}{T} \int_I x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

- X_k : *composante fréquentielle* de x à la fréquence $\nu = k/T$

Cadre

- $\mathcal{E}$: ensemble des signaux définis sur I de carré sommable
- Produit « scalaire » sur $\mathcal{E}$:

$$< x \cdot y >= \frac{1}{T} \int_I x(t) y^*(t) dt$$

- Décomposition sur une base orthonormale $\{e_k(t) \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e_k(t) \\ X_k &= < x \cdot e_k > \end{aligned}$$

DSF : décomposition de x sur une « base fréquentielle »

- Base fréquentielle orthonormée : $\{e_k = e^{2i\pi kt/T}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $X_k =< x \cdot e_k >$; $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e_k(t)$

Interprétation physique

- $e_k = e^{2i\pi kt/T}$ périodique de période T/k
  « Fréquence pure » $\nu = k/T$
- X_k : *composante fréquentielle* de x à la fréquence $\nu = k/T$

Objectifs

- Caractérisation du contenu fréquentiel d'un signal $x(t)$
- Temps continu
  - cadre de référence pour le temps discret
  - analyse de l'échantillonnage

Cadre géométrique

- $\mathcal{E}$: ensemble des signaux définis sur $\mathbb{C}$ de carré sommable
- Produit « scalaire » sur $\mathcal{E}$:

$$< x \cdot y >= \int_{\mathbb{R}} x(t)\ y^*(t)\ dt$$

Transformée de Fourier

Approche géométrique

- $\{e^{2i\pi\nu t}\ ;\ \nu \in \mathbb{R}\}$: base fréquentielle orthonormale
- Décomposition :

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu)\ e^{2i\pi\nu t}\ d\nu \qquad \text{transformée de Fourier inverse}$$

- Calcul des « coefficients » :

$$X(\nu) = < x \cdot e^{2i\pi\nu t} > = \int_{\mathbb{R}} x(t)\ e^{-2i\pi\nu t} dt \qquad \text{transformée de Fourier}$$

Propriétés élémentaires de la transformée de Fourier

Propriété	Dom. des temps		Dom. des fréquences
	$x(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu)$
	$y(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$Y(\nu)$
Linéarité	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$\alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$
Translation (t)	$x(t - \tau)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu)e^{-2i\pi\nu\tau}$
Homothétie (t)	$x(\alpha t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X(\nu/\alpha)$
Translation (ν)	$x(t)e^{2i\pi f t}$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu - f)$
Homothétie (ν)	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} x(t/\alpha)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\alpha\nu)$
Conjugaison	$x^*(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X^*(-\nu)$
Convolution	$[x * y](t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$X(\nu)\, Y(\nu)$
Produit	$x(t)\, y(t)$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$[X * Y](\nu)$
Dérivation	$d^m x(t)/dt^m$	$\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$	$(2i\pi\nu)^m X(\nu)$

Propriétés remarquables de la transformée de Fourier

Théorème de Plancherel

- Conservation du produit scalaire :

$$\int x(t)\, y^*(t)\, dt = \int X(\nu)\, Y^*(\nu)\, d\nu$$

- Conséquence : relation de Parseval

$$\int |x(t)|^2\, dt = \int |X(\nu)|^2\, d\nu$$

Spectre d'énergie

- $\mathcal{F}(\gamma_{xy}(\tau)) = \Gamma_{xy}(\nu) = X(\nu)\, Y^*(\nu)$
- $\mathcal{F}(\gamma_x(\tau)) = \Gamma_x(\nu) = |X(\nu)|^2$
- $\Gamma_x(\nu)$: densité spectrale (spectre) d'énergie

Transformée de Fourier de signaux périodiques I

Position du problème

- Si x est périodique, $\int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi\nu t}dt$ ne converge pas
- Pas de transformée de Fourier pour les fonctions périodiques ?

Solutions

- Approche rigoureuse : changement de cadre mathématique (annexe A)
- Approche pratique : impulsion de Dirac $\delta(t)$

Impulsion de Dirac

- $\delta(t)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} \delta(t-t_0)x(t)dt = x(t_0)$
- $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

Transformée de Fourier de signaux périodiques II

Impulsions de Dirac et transformée de Fourier

Application de la définition

- TF : $\delta(t - t_0) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-2i\pi\nu t_0} \quad \Rightarrow \quad \delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 1_\nu$
- TFI : $e^{2i\pi\nu_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta(\nu - \nu_0) \quad \Rightarrow \quad 1_t \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \delta(\nu)$

Signaux périodiques

- x T-périodique $\Longleftrightarrow$ x décomposable en série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi kt/T} \qquad X_k = \frac{1}{T} \int_I x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

- Propriété de linéarité

$$X(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k \delta(\nu - k/T)$$

Spectre de raies

Transformée de Fourier de signaux à temps continu

f de carré sommable

- TF : $X(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$
- TFI : $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$

x périodique de période T

- TF : $X(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta(\nu - k/T)$ $\qquad X_k = \frac{1}{T} \int_I x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$
- TFI : $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi kt/T}$

Transformée de Fourier de fonctions usuelles

$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi \nu^2}$
$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2+4\pi^2\nu^2)$
$e^{\pm 2i\pi\nu_0 t}$	$\delta(\nu \mp \nu_0)$
$\cos(2\pi\nu_0 t+\varphi_0)$	$\left(e^{i\varphi_0}\delta(\nu-\nu_0)+e^{-i\varphi_0}\delta(\nu+\nu_0)\right)/2$
$\text{sgn } t$	$1/(i\pi\nu)$
1	$\delta(\nu)$
$(-2i\pi t)^m$	$\delta^{(m)}(\nu)$
$1/t$	$-i\,\pi\,\mathrm{sgn}\nu$
$\|t\|$	$-1/2\pi^2\nu^2$
$\text{Rect}(-T/2, T/2)$	$T\,(\sin\pi T\nu)/\pi T\nu$
$\max\{0, 1-\|t\|/T\}$	$T\left((\sin\pi T\nu)/\pi T\nu\right)^2$
$\nu_o(\sin\pi\nu_0 t)/\pi\nu_0 t$	$\text{Rect}(-\nu_0/2, \nu_0/2)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(m)}(t)$	$(2i\pi\nu)^m$
$\delta(t\pm T)$	$e^{\pm 2i\pi T\nu}$
$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT)$	$(1/T)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(\nu-n/T)$
$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(t-nT)$	$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-2i\pi nT\nu}$

Échantillonnage I

Principe

Échantillonnage à la période T_e

- En pratique : $x(t) \longrightarrow \{x(nT_e)\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$
- Représentation mathématique : $p_{T_e}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT_e)$

$$x(t) \longrightarrow x_e(t) = p_{T_e}(t)\ x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

- Remarque : $p_{T_e}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} P_{T_e}(\nu) = 1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - k/T_e)$

Échantillonnage II

Interprétation fréquentielle : $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\nu)$

$$
\begin{aligned}
x_e(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_e(\nu) &= P_{T_e}(\nu) * X(\nu) \\
&= \left(1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\nu - k/T_e) \right) * X(\nu) \\
&= 1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(\nu - k/T_e)
\end{aligned}
$$

- $X_e(\nu)$ obtenu par « périodisation » de $X(\nu)$ à la période $\nu_e = 1/T_e$
- Calcul direct : $X_e(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi n\nu/\nu_e}$

  On retrouve que $X_e(\nu)$ est périodique de période $\nu_e = 1/T_e$

Échantillonnage III

Interprétation fréquentielle : réciproque

$X(\nu)$ périodique de période $\nu_e = 1/Te$

- DSF de $X(\nu)$:

  $$X(\nu) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k e^{-2i\pi k\nu/\nu_e} \quad ; \quad X_k = \frac{1}{\nu_e}\int_0^{\nu_e} X(\nu) e^{2i\pi k\nu/\nu_e} d\nu$$

  X_k : coefficient du DSF d'indice $-k$
- TFI de $X(\nu)$: $x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta(t - k/\nu_e) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta(t - kT_e)$

Conséquence

$x(t)$ échantillonné à la période T_e

$$x(nT_e) = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} X(\nu) e^{2i\pi\nu nT_e} d\nu$$

Synthèse

- $x_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta(t - nT_e) \Longleftrightarrow X_e(\nu)$ périodique de période $1/T_e$
- TF : $X_e(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi\nu n T_e}$
- TFI : $x_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta(t - nT_e)$ $\qquad x_n = T_e \int_0^{\frac{1}{T_e}} X_e(\nu) e^{2i\pi\nu n T_e} d\nu$
- Si $x_n = x(nT_e)$ avec $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\nu)$, alors $X_e(\nu)$ est obtenu par périodisation de $X(\nu)$ à la période $1/T_e$:

$$X_e(\nu) = \frac{1}{T_e} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(\nu - \frac{n}{T_e}\right)$$

Théorème d'échantillonnage I

Position du problème

Possibilité de passer de manière réversible (sans perte d'information) de $x(t)$ à $x_e(t)$

Solution

- Domaine temporel
  - $x(t) \longrightarrow x_e(t)$: immédiat
  - $x_e(t) \longrightarrow x(t)$: ???
- Domaine fréquentiel
  - $X(\nu) \longrightarrow X_e(\nu)$: $1/T_e$- périodisation
  - $X_e(\nu) \longrightarrow X(\nu)$: retrouver $X(\nu)$ dans sa version périodisée $X_e(\nu)$

Possible si la périodisation de $X(\nu)$ se fait sans recouvrement

Théorème d'échantillonnage II

Condition suffisante

- $X(\nu)$ à support limité de taille L
- $L < 1/T_e$

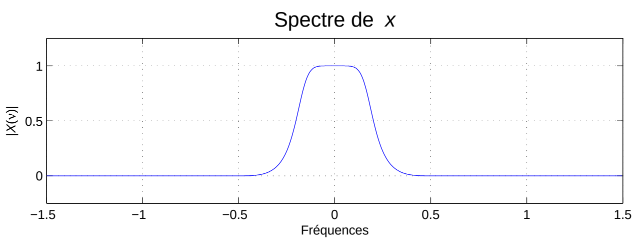
Cas usuel

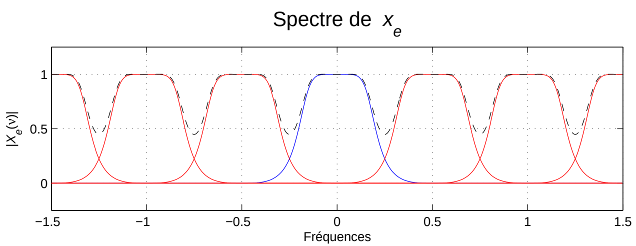
- $x(t)$ à bande limitée $[-B\ ,\ B]$: $X(\nu) = 0$ si $|\nu| > B$
- Si $2B < 1/T_e \Leftrightarrow B < 1/(2T_e)$, $x(t)$ peut être échantillonné sans perte d'information

En pratique

- $X_e(\nu)$ défini à partir de sa « période centrale » $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$
- Les fréquences « utiles » de $x(t)$ et $x_e(t)$ sont dans $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$

Théorème d'échantillonnage : illustration





$T_e = 2$: échantillonnage avec recouvrement

Échantillonnage et reconstruction : synthèse

Échantillonnage

- $X(\nu) \longrightarrow X_e(\nu) = 1/T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(\nu - k/T_e) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi\nu n T_e}$
- $x(t) \longrightarrow x_e(t) = p_{T_e}(t)\; x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$

Reconstruction (si le théorème d'échantillonnage est satisfait)

- $X_e(\nu) \longrightarrow X(\nu) = T_e\; X_e(\nu)\; \mathrm{Rect}_{[-1/(2T_e)\;,\;1/(2T_e)]}(\nu)$
- $x_e(t) \longrightarrow x(t) = x_e(t) * \dfrac{sin(\pi t/T_e)}{\pi t/T_e} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) \dfrac{sin(\pi(t - nT_e)/T_e)}{\pi(t - nT_e)/T_e}$

Illustrations

Voir démonstrations `demo_replie1D.m` et `demo_alias1D.m`

Aspects pratiques

Situations typiques

- Échantillonnage d'une quantité d'intérêt (signal, image,...) fonction de variables continues
  - Choix de la période d'échantillonnage ?
  - Limitation du recouvrement spectral :

filtrage passe-bas anti-repliement

- Manipulation de quantités numérisées
  - Domaine temporel ou spatial : nécessité de données discrétisées
  - Passage au domaine fréquentiel : variable ν continue !
  - Outil disponible : transformée de Fourier rapide (FFT)

Comment interpréter et manipuler des fréquences discrètes ?

Définitions et propriétés

Par convention, $T_e = 1$

- Signal à temps discret : $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$
- Correspondance avec un *hypothétique* signal échantillonné :
$$x_d(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta(t-n)$$
- Convolution discrète
$$(x * y)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m y_{n-m}$$
- Intercorrélation discrète
$$\gamma_{xy}(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y^*_{n-m}$$
- Autocorrélation discrète
$$\gamma_x(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n x^*_{n-m}$$

Transformée de Fourier

- Application des définitions au signal *hypothétique* $x_d(t)$
- Transformée de Fourier à temps discret :

$$X(\nu_r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n \nu_r}$$

$X(\nu_r)$ périodique de période 1 $\longrightarrow \nu_r \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

- Transformée de Fourier inverse à temps discret

$$x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu_r) e^{2i\pi n \nu_r} d\nu_r$$

- ν_r : fréquence réduite à valeurs continues

Signaux à temps discret III

Correspondance entre quantités physiques et réduites

- $x_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta(t - nT_e) \Longrightarrow x_n = x(t)_{|t=nT_e}$

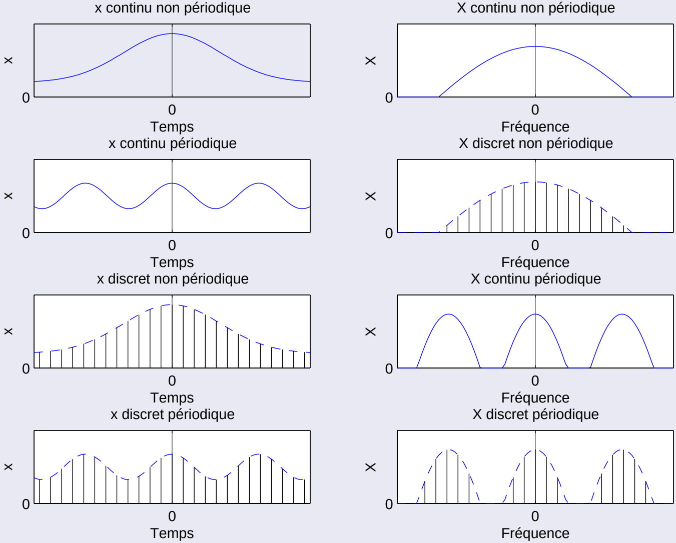
$$n = t/T_e$$

- $X_e(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(nT_e) e^{-2i\pi\nu nT_e}$ $\qquad X(\nu_r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\nu_r}$

$$\nu_r = \nu T_e = \nu/\nu_e$$

Mais ν_r reste à valeurs continues...

Caractéristiques de la transformée de Fourier



Transformée de Fourier discrète I

Formalisation

- x périodique

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi kt/T} \qquad X(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k \delta(\nu - k/T)$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_I x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt$$

- x à temps discret

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta(t - n) \qquad X(\nu_r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\nu_r}$$

$$x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\nu_r) e^{2i\pi n\nu_r} d\nu_r$$

Transformée de Fourier discrète II

Formalisation

x à temps discret et périodique de période N

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \delta(t-n) \qquad X(\nu_r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k \delta(\nu_r - k/N)$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi kn/N} \qquad X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn/N}$$

N éch. utiles $0 \leq n \leq N-1$ $\qquad$ N éch. utiles $0 \leq k \leq N-1$

Transformée de Fourier discrète

$$\text{TF} : X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn/N} \,;\ \text{TFI} : x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi kn/N} \,;$$

$$\nu_r = k/N$$

Mise en œuvre

Calcul rapide par FFT si N est une puissance entière de 2

Représentation fréquentielle, TF discrète et problèmes pratiques I

TF discrète et représentation spectrale

- N échantillons x_n ; $0 \leq n \leq N-1$. Que représente sa TFD X_k ; $0 \leq k \leq N-1$?
- Si x exactement périodique de période N

  X_k : transformée de Fourier « exacte »
- Si x nulle à l'extérieur de $[0\ ,\ N-1]$

  $X_k = X(\nu_r)$ pour $\nu_r = k/N$

Conséquences et applications

- x périodique, mais erreur sur la période : voir `demo_sin.m`
- Si x nul à l'extérieur de $[0\ ,\ N-1]$: calcul de $X(\nu_r)$ pour $\nu_r = k/P$; $P > N$ en prolongeant $\{x_n\ ;\ 0 \leq n \leq N-1\}$ par des 0

  Bourrage de zéros. Voir `demo_bourrage.m`
- Symétriquement : rééchantillonnage de x en prolongeant X_k par des 0

Représentation fréquentielle, TF discrète et problèmes pratiques II

Convolution par FFT

- Convolution : $(x * y)(n) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}$ Produit : $X_k \; Y_k$
- X et Y doivent avoir la même taille $\Longleftrightarrow$ x et y doivent avoir la même taille
- Hypothèse sur x et y : périodicité pour assurer l'exactitude des relations
- Élimination des effets de bord (convolution « circulaire ») : prolongement de x et y par des zéros pour obtenir une taille $P \geq \text{taille}(x) + \text{taille}(y) - 1$

Rééchantillonnage (décimation)

Nécessité d'un filtrage passe-bas pour éviter le recouvrement spectral

Conclusion

Signaux déterministes : présentation des principaux outils

- Résultats généraux pour la représentation des signaux
- Représentation fréquentielle des signaux à temps continu
- Représentation fréquentielle (discrète ou continue) des signaux à temps discret

Outil omis

- Transformée en z (signaux à temps discret)

Applications

- Exemples et démonstrations
- *Travaux pratiques*