DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

**MTH1115(D) : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**
**CONTRÔLE PÉRIODIQUE II**

19 mars 2022

**Directives** : *Vous avez une heure et trente minutes pour compléter les 3 questions de ce contrôle. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justifications se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

$(\frac{3}{20})$ (a) Pour l'équation différentielle

$$y'' + 9y = t^2e^{-2t} + 2t\sin(3t),$$

donner la forme générale de **la solution particulière** que l'on obtiendrait en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.
**Note : On ne demande pas de déterminer la valeur des coefficients.**

$(\frac{1}{20})$ (b) On cherche une solution particulière de l'équation différentielle

$$x^2y'' - (x - 0{,}1875)y = x^2e^{\sqrt{x}}, \quad \text{pour} \quad x > 0. \tag{1}$$

Sachant que $y(x) = x^{\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{x}}$ est une solution de l'équation différentielle

$$x^2y'' - (x - 0{,}1875)y = 0,$$

indiquer (**sans faire les calculs**) les étapes à suivre pour calculer une solution particulière de l'équation différentielle (1).

$(\frac{3}{20})$ (c) Trouver la solution générale à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) - 2y(t) = 0.$$

$(\frac{2}{20})$ (d) Le système d'équations différentielles modélisant le mouvement d'un pendule de Foucault est :

$$\begin{cases} x''(t) = 2\omega y'(t)\sin\psi - k^2x(t); \\ y''(t) = 2\omega x'(t)\sin\psi - k^2y(t), \end{cases}$$

où $(x(t), y(t))$ désigne la trajectoire du pendule dans le plan, $\omega$, $\psi$ et $k$ sont des constantes.
Transformer ce système d'équations différentielles en un système équivalent d'équations différentielles d'ordre 1. **Écrire le système sous la forme matricielle.**

$(\frac{7}{20})$ 2. Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{(1-t)^2} \quad \text{pour} \quad -1 < t < 1,$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$y(0) = 2 \quad \text{et} \quad y'(0) = 6.$$

**Note :** $\dfrac{t}{(1-t)^2} = \dfrac{1}{(1-t)^2} - \dfrac{1}{1-t}$.

3. Soit le système d'équations différentielles

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{y}(t). \tag{2}$$

($\frac{1}{20}$) (a) Vérifier que $\vec{x} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice des coefficients et qu'il est associé à la valeur propre $\lambda = -\frac{1}{2} - i$.

($\frac{3}{20}$) (b) Trouver la solution générale **à valeurs réelles** du système d'équations différentielles (2).

*Les professeurs du cours MTH1115*