DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH1115(D): ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
CONTRÔLE PÉRIODIQUE I

12 février 2022

Directives: *Vous avez une heure et trente minutes pour compléter ce contrôle. Les calculatrices sont interdites.* ***Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.***

1. Questions indépendantes

   (a) Soit l'équation différentielle d'ordre 2

$$ty'' - y' + \frac{1}{\sqrt{y'}} = 0, \quad t > 0. \tag{1}$$

$(\frac{1}{20})$ i) En utilisant un changement de variable approprié, transformer l'équation différentielle (1) en une équation différentielle d'ordre 1 dont la variable indépendante est t. **Justifier votre réponse.**

$(\frac{2,5}{20})$ ii) En réécrivant au besoin l'équation différentielle d'ordre 1 obtenue en (i) sous une autre forme, identifier parmi les méthodes étudiées en classe, 3 méthodes qu'on peut utiliser pour la résoudre. **On ne demande pas de la résoudre.**

$(\frac{2}{20})$ (b) Soit l'équation différentielle écrite sous la forme

$$5x^2y - 6y^4 + (4x^3 - 14xy^3)y' = 0. \tag{2}$$

Est-ce que la fonction $F(x, y) = x^2y^3$ est un facteur intégrant de cette équation différentielle?

Note: Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.

$(\frac{1,5}{20})$ (c) On considère l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{3}$$

où les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ sont continues dans un intervalle ouvert I contenant $t_0 = 1$. Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ des solutions de l'équation différentielle (3) qui satisfont aux conditions:

$$y_1(1) = 3, \quad y_1'(1) = 0, \quad y_2(1) = 1 \quad \text{et} \quad y_2'(1) = \frac{1}{3}.$$

Est-ce que $y_1(t)$ et $y_2(t)$ forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation différentielle (3)?

Une réponse sans la bonne justification se verra attribuer la note 0.

$(\frac{1}{20})$ (d) Les solutions du problème de valeurs initiales

$$(x^2 + 2y')y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{4}$$

sont données par $y_1(x) = 1$ et $y_2(x) = -\frac{x^3}{3} + 1$. Expliquer brièvement pourquoi le problème de valeurs initiales (4) n'admet pas une solution unique.

($\frac{5}{20}$) 2. Résoudre le problème de valeur initiale

$$xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}, \quad y(1) = -\ln(2).$$

Donner la solution sous la forme explicite.

3. Soit l'équation différentielle

$$2(1+x^2)y' + xy = xy^5. \tag{5}$$

($\frac{2}{20}$) (a) En utilisant un changement de variable approprié, transformer l'équation différentielle (5) en une équation différentielle linéaire dont la variable indépendante est x. **Justifier votre réponse.**

($\frac{4}{20}$) (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue en (a) et en déduire la ou les solutions de l'équation différentielle (5) sous la forme explicite.

($\frac{1}{20}$) (c) Trouver la solution de l'équation différentielle (5) qui satisfait à la condition initiale $y(0) = -\frac{1}{2}$.

Les professeurs du cours MTH1115(D)