POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

Questionnaire
Examen final
MTH1101

Identification de l'étudiant		
Nom:	**Prénom:**	
Signature:	**Matricule:**	**Groupe:**

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH1101 – Calcul I	**Tous**	**A2013**

Professeurs	Local	Téléphone
Guy Jomphe	**A520.36**	**5155**
Issmail El-Hallaoui	**A520.9**	**6928**

Date	Heures	Durée
Dimanche le 8 décembre 2013	**9h30-12h00**	**2h30**

Calculatrice, agendas électronique et téléphone sont interdits. Seul un aide-mémoire sur une feuille manuscrite $8\frac{1}{2} \times 11$ non photocopiée est autorisée.
Cet examen contient 7 questions sur un total de 18 pages (excluant celle-ci).
Vous devez répondre sur le questionnaire et le remettre.
Justifiez vos réponses sauf si indiqué.

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Réservé

1.	/4
2.	/6
3.	/4
4.	/6
5.	/4
6.	/6
7.	/5

Total:	/35

Exercice 1 (4 points)

Soit le nombre complexe $z_1 = -2i + 2$.

a) Exprimez z_1 sous la forme exponentielle (choisir un argument $\theta \in]\,0,\ 2\pi]$).

b) Donnez $\bar{z_1}$, le conjugué de z_1 sous la forme exponentielle (avec un argument $\in$ $]\,0,\ 2\pi]$).

c) Décrire la courbe représentée par l'équation

$$|z|^2 + 3Re(z^2) = 8, z \in \mathbb{C}.$$

Vérifier que z_1 est un point de cette courbe.

Exercice 2 (6 points)

Considérons les deux fonctions f et g telles que

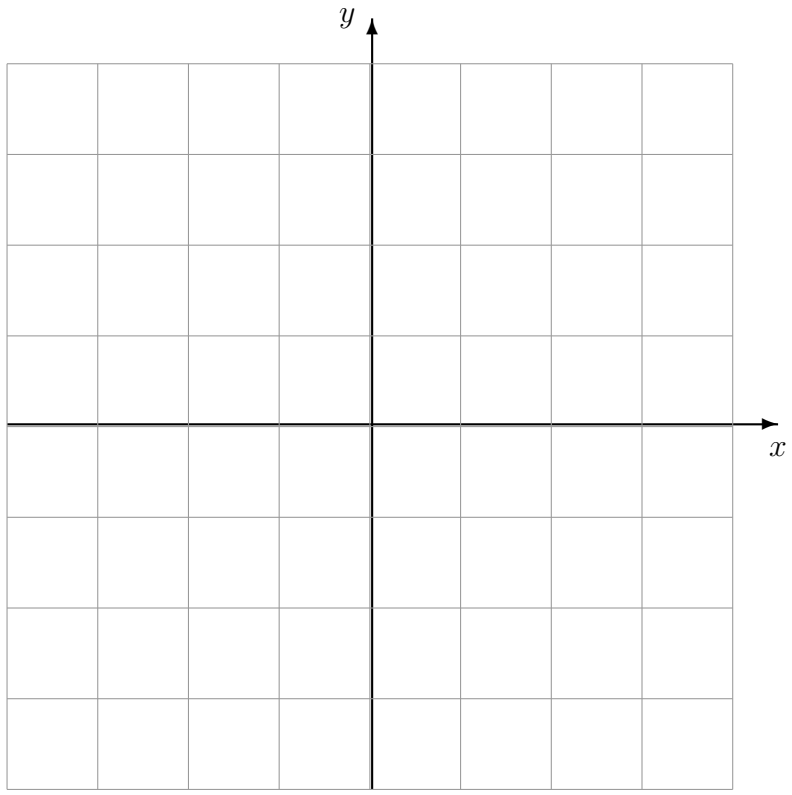
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et}$$

$$g(x,y) = xf(x,y).$$

a) Donnez les domaines de définition de f et de g.

b) Dessinez sur la figure ci-jointe, les courbes de niveau de la fonction f correspondant aux valeurs -1, 0 et 1 (bien identifier les courbes).

c) Donnez les plus grands domaines sur lesquels les deux fonctions f et g sont continues.


y
x

Exercice 3 (4 points)

Soient f, g et h trois fonctions telles que:

$$f(x, y) = y \cdot g(x, z)$$

et

$$z = h(x^2) + [h(y)]^2.$$

Évaluez $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de g, h et de leurs dérivées.

Exercice 4 (6 points)

On désire étudier le comportement d'une plaque métallique très mince sous l'effet de la chaleur autour du point $P_0 = (1, 2)$. Après des calculs préliminaires, on constate que

$$\nabla T(1, 2) = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$$

où T est la fonction température à étudier.

a) À partir de P_0, dans quelle direction la température croit le plus rapidement? Quel est le taux de variation maximal de la température au point P_0?

b) À partir du point P_0, dans quelle direction faut-il prendre des mesures qui donneront une valeur constante de la température?

c) À partir du point P_0, on prend une mesure de la température dans la direction qui pointe vers l'origine. Est-ce que la température diminue ou augmente? Justifiez.

Exercice 5 (4 points)

Soit la fonction:

$$f(x,y) = e^{2x+3y}$$

a) Déterminez le polynôme de Taylor de degré 1, noté $L(x,y)$, au point $P_0 = (0,0)$.

b) Déterminez une approximation de la valeur de f au point $P_1 = (\frac{1}{10}, -\frac{1}{10})$.

c) En sachant que sur le domaine

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq (\frac{1}{8})^2 \right\},$$

nous avons

$$|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}| \leq 4e^{5/8}, \qquad |\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}| \leq 9e^{5/8}, \qquad |\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}| \leq 6e^{5/8},$$

calculez l'erreur maximale commise sur le domaine D lorsqu'on approxime f par L.

Exercice 6 (6 points)

On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^2y - 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 8x - 8y - 2 \qquad \text{où } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

dont un des points critiques est $P = (2,3)$.

a) Calculez la matrice Hessienne de f en P. En déduire la nature du point critique P.

b) Déterminez le point $P_1 = (x_1, y_1)$ produit par la première itération de la méthode du gradient à partir de $P_0 = (1,2)$ lorsque l'on désire minimiser f.

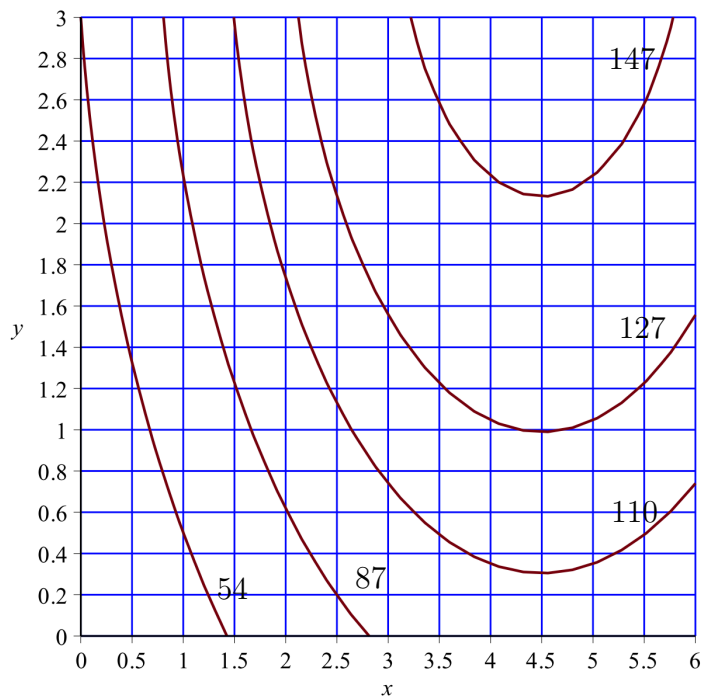
c) Vérifiez que $\nabla f(P_0)$ et $\nabla f(P_1)$ sont perpendiculaires.

Exercice 7 (5 points)

Soit le problème d'optimisation

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad f(x,y) = -5x^2 - 4y^2 + 45x + 30y.$$
$$\text{s.c.:} \quad 2x + 4y = 12.$$

dont les courbes de niveau de la fonction f sont illustrées sur la figure suivante.



a) À l'aide de la lettre X, indiquez, sur le graphe, le point de coordonnées (x, y) correspondant à la solution optimale de ce problème. Justifiez en une phrase.

b) Quelle est la valeur du multiplicateur de Lagrange λ associé à la solution optimale?

c) On remplace la contrainte $2x + 4y = 12$ par

$$2x + 4y = 12.1.$$

Est-ce que la nouvelle valeur optimale augmentera ou diminuera ? Justifiez votre réponse. Donnez une valeur approximative de la nouvelle valeur optimale.