Question 1 (3 points)

Soit la suite (a_n), $n \geq 1$, telle que :

$$a_n = \left(\sqrt{|\sin(\frac{1}{n})| + 1} + \sqrt{|\sin(\frac{1}{n})|} \right) \cdot \left(\frac{|\sin(n)|}{n^2} \right)$$

a) Évaluez $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.

Solution 1

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) Utilisez la forme limite du test de comparaison avec

$$b_n = \frac{|\sin(n)|}{n^2}.$$

Question 2 (3 points)

Déterminez si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$.

Solution 2

a) Converge.

b) Converge.

c) Diverge.

Question 3 (4 points)

a) Montrez que $\dfrac{1}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$ pour $x \in]-2, 0[$.

b) Utilisez le résultat en a) pour représenter $f(x) = ln(x+2)$ par une série entière en $a = -1$. Indiquez le rayon de convergence de cette série.

Solution 3

a) Utilisez la série géométrique.

b) Utilisez le fait que $ln(x+2) = \int \frac{1}{x+2} dx$ et dduire le développement désiré. Le rayon de convergence est 1.

Question 4 (4 points)

Soit f une fonction telle que :

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\frac{1}{2} \\ f'(-1) &= -5 \\ f''(-1) &= -2 \end{aligned}$$

a) Utilisez toute l'information ci-dessus pour estimer la valeur de $f(-1.1)$

b) Sachant que pour tout $x \in [-2,\ 0]$:

$$\begin{aligned} -6 \leq \quad & f'(x) \quad \leq -3 \\ -\frac{5}{2} \leq \quad & f''(x) \quad \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{10} \leq \quad & f'''(x) \quad \leq -\frac{2}{10}, \end{aligned}$$

donnez une borne sur l'erreur d'approximation en a).

Solution 4

a) $-\frac{1}{100}$

b) Par la formule du reste avec $n = 2$, nous avons

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{20000}$$

Question 5 (6 points)

Considérons la fonction $g(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$ avec $h(t) = \dfrac{\cos(t) - 1}{t}$ pour tout $t > 0$ et $h(0) = 0$.

a) Donnez $T(x)$ la série de Taylor de $g(x)$ autour de $a = 0$.

b) Donnez le rayon R et l'intervalle de convergence I de $T(x)$.

c) Soit $T_n(x)$ le polynôme de Taylor de degré n de g autour de $a = 0$. Déterminez le degré minimum n de $T_n(x)$ pour que

$$|f(1) - T_n(1)| \leq \frac{1}{10}.$$

Solution 5

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n \times (2n)!}$$

b) Par le test de d'Alembert, nous avons $I =]-\infty, \infty[$ et $R = \infty$.

c) Le degré minimum recherché est $2 \times n = 2$.