

Travail pratique n° 1

Échantillonnage, repliement spectral et reconstruction

Instructions

- Les travaux pratiques sont effectués par équipes de deux.
- Le travail à remettre se compose :
 - d'un compte rendu qui doit comporter une réponse concise mais complète à chacune des questions, accompagnée au besoin des courbes, figures et images appropriées ;
 - des scripts et fonctions `matlab` correspondants, sous forme de fichiers texte (format `.m`).L'ensemble peut être composé soit à l'aide des fonctionnalités de publication de `matlab` (menu "File / Publish" de l'éditeur `matlab`), soit en utilisant un logiciel de traitement de texte indépendant. Dans tous les cas, seuls les formats html, pdf et texte (pour les fichiers `matlab`) sont acceptés. L'ensemble des fichiers doit être placé dans une unique archive `zip` et remis en utilisant l'outil approprié disponible sur le site web du cours.
- Le travail doit être remis par un seul des membres du groupe. Si tel n'est pas le cas, la version la plus récente du travail remis sera prise en compte.

1 Introduction

L'objet de ce travail pratique est d'illustrer les notions de représentation spectrale, de transformée de Fourier (TF), de transformée de Fourier à temps discret et de transformée de Fourier discrète (TFD) introduites dans le cours.

Les réponses aux questions apparaissant tout au long de l'énoncé seront rassemblées dans un compte-rendu *concis* auquel vous joindrez les listings et tracés de courbes *commentés*.

2 Transformée de Fourier discrète d'un signal périodique

L'objet de cette section est de se familiariser avec la notion de fréquence réduite, de manipuler les programmes de calcul de transformée de Fourier, d'interpréter leurs résultats et d'observer l'effet du sous-échantillonnage.

2.1 Interprétation d'une TFD. Notion de fréquence réduite (4 points)

Soit une sinusoïde à une fréquence f_0 que l'on échantillonne à une fréquence f_e . Choisissez la valeur de f_0 puis fixez f_e à une valeur comprise entre $5f_0$ et $7f_0$. Quelle est la fréquence réduite du signal à temps discret ainsi obtenu ?

Générez le vecteur `Matlab` x correspondant en choisissant la taille N . Calculez sa transformée de Fourier discrète (TFD) en utilisant la fonction `FFT` de `Matlab` (pour la description de cette fonction veuillez vous reporter à l'aide en ligne de `Matlab`). Affichez cette TFD en ayant soin d'indiquer les fréquences réduites sur l'axe des abscisses. Indiquez comment mettre en forme les échantillons de la TFD pour obtenir un résultat conforme aux prévisions et justifiez l'indexation fréquentielle utilisée.

Compte-rendu Un paragraphe pour l'indication et la justification ; un tiers de page au maximum.

2.2 Effet du sous-échantillonnage (4 points)

Générez un vecteur `Matlab` y correspondant à N échantillons du même signal échantillonné à la fréquence $f_e/2$. Tracez le module de sa TFD, toujours en fréquence réduite. Interprétez le phénomène (un petit schéma sera le bienvenu).

Recommencez en diminuant encore la fréquence d'échantillonnage d'un facteur deux. Expliquez le phénomène observé.

Compte-rendu La discussion des deux expériences tiendra sur deux paragraphes au maximum, accompagnés d'une ou deux figures. Le tout tiendra sur une page au maximum.

3 Échantillonnage et reconstruction d'un signal biomédical

L'objet de cette section est d'obtenir pratiquement une idée de la validité du théorème d'échantillonnage. Comme il n'est pas possible de manipuler des signaux à temps continu à l'aide d'un ordinateur, on prend comme *signal de référence* un signal à temps discret échantillonné à une fréquence fréquence très supérieure à celle de Nyquist. On simule ensuite l'échantillonnage de ce signal de référence en en prélevant un échantillon sur n , la valeur de n étant précisée par la suite. Enfin, on tente de reconstruire le signal de référence en utilisant d'abord la formule d'interpolation de Shannon, puis une méthode spectrale.

3.1 Sélection du signal de référence (4 points)

Chargez le signal `ecg0` échantillonné à 25 Hz (la valeur de cette fréquence est conservée dans la variable `fe0`). En s'appuyant sur un tracé du module de la TFD en échelles semi-logarithmiques, peut-on par un raisonnement qualitatif vérifier si le signal a été correctement échantillonné ?

Chargez maintenant le signal `ecg1` échantillonné à 400 Hz. Par le même raisonnement que précédemment, indiquez si ce signal a été bien échantillonné.

Compte-rendu Le raisonnement tiendra sur deux paragraphes (un pour chaque cas), maximum deux tiers d'une page.

3.2 Échantillonnage et reconstruction par interpolation de Shannon (4 points)

Sélectionnez une période du signal `ecg1` et stockez la dans un vecteur `x`. Ce vecteur constitue le signal de référence et on note sa taille N . Simulez l'échantillonnage du signal de référence en prélevant un point sur m dans le vecteur `x` et stockez le résultat dans un vecteur `y`.

Quelle hypothèse faut-il faire si l'on veut reconstruire `x` à partir de `y` en utilisant la formule d'interpolation de Shannon? Appliquez cette formule et discutez le résultat obtenu.

Remarques On rappelle que la formule d'interpolation de Shannon pour un signal $x(t)$ s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \frac{\sin \pi(t - nT_e)/T_e}{\pi(t - nT_e)/T_e} \quad (1)$$

Pour effectuer les opérations demandées, il est recommandé de fabriquer une fonction `Matlab` $X = \text{interpole}(y, t, T_e)$, où X est le vecteur à interpoler, t le vecteur des temps $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ pour lesquels on veut calculer $X(t)$. Pour éviter un niveau de boucle on pourra utiliser le fait que la somme qui intervient dans la formule de Shannon peut se mettre sous la forme d'un produit scalaire, opération que `Matlab` sait faire de manière très efficace sans utiliser de boucle.

Compte-rendu L'hypothèse et la discussion se verront consacrer un paragraphe chacun, le tout tenant sur une demi-page au maximum.

3.3 Reconstruction par une méthode spectrale (4 points)

En vous appuyant sur le fait que les signaux `x` et `y` ont le même contenu spectral et vous inspirant des méthodes de « bourrage de zéros » vues en cours, proposez une technique permettant de reconstruire `x` à partir de `y` en passant dans le domaine de Fourier. Programmez cette technique. Comparez le résultat à obtenu celui obtenu à la question précédente. Que peut-on en conclure?

Compte-rendu Rédigez un paragraphe pour décrire la technique que vous avez programmée, un autre pour discuter le résultat obtenu et un dernier pour la comparaison au résultat du problème 3.2. Le tout tiendra sur une page au maximum.