EXERCICE 2 - Probabilité

La probabilité pour que M. Dupont attende plus de dix minutes vaut :

$$P(min(X,Y) > 10) = P(X > 10 \; et \; Y > 10)$$

$$= P(X > 10)P(Y > 10)$$

$$= 0.75e^{-2}$$

La probabilité pour que M. Dupont prenne le taxi plutôt que l'autobus vaut d'après la formule de probabilités totales :

$$P(Y < X) = P(Y < X|X = 5)P(X = 5) + P(Y < X|X = 15)P(X = 15) + P(Y < X|X = 25)P(X = 25)$$

Or, X et Y étant deux événements indépendants, on a alors :

$$P(Y < X|X = 5) = P(Y < X) \text{ (Voir Page 2-3 des notes de cours)}$$

On obtient alors :

$$P(Y < X) = P(Y < X)P(X = 5) + P(Y < X)P(X = 15) + P(Y < X)P(X = 25)$$

$$P(Y < X) = P(Y < 5)P(X = 5) + P(Y < 15)P(X = 15) + P(Y < 25)P(X = 25)$$

$$P(Y < X) = (1 - e^{-1})0.25 + (1 - e^{-3})0.50 + (1 - e^{-5})0.25$$

$$P(Y < X) = 0.8814521188$$

La probabilité recherchée vaut ici :

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{P\big(Y < X \; \cap (min(X,Y) > 10)\big)}{P(min(X,Y) > 10)}$$

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{P(10 < Y < X)}{P(min(X,Y) > 10)}$$

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{P(10 < Y < X \;|X = 15)P(X = 15) + P(10 < Y < X \;|X = 25)P(X = 25)}{P(X > 10 \; et \; Y > 10)}$$

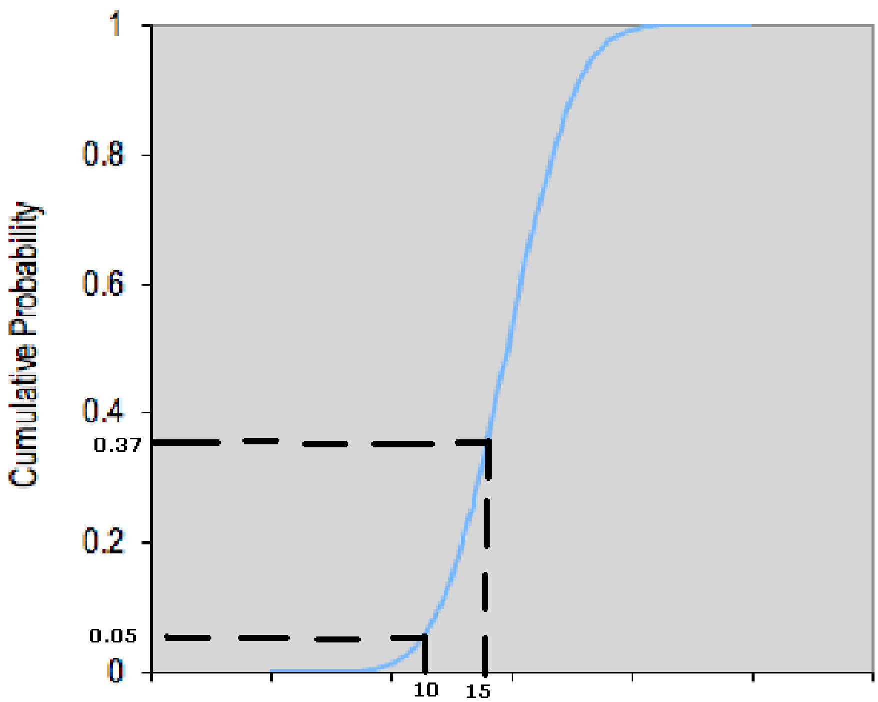
X et Y étant indépendantes, on a :

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{P(10 < Y < X)P(X = 15) + P(10 < Y < X\ )P(X = 25)}{P(X > 10\ et\ Y > 10)}$$

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{P(10 < Y < 15)P(X = 15) + P(10 < Y < 25\ )P(X = 25)}{P(X > 10\ et\ Y > 10)}$$

La probabilité $P(10 < Y < 15\ )$ peut être réécrite à l'aide de la CDF ci-dessous (Cumulative Distribution function)

$P(10 < Y < 15\ ) = P(Y < 15) - P(10 < Y\ )$



On obtient alors :

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{\big(P(Y < 15) - P(10 < Y\ )\big)P(X = 15) + \big(P(Y < 25) - P(10 < Y\ )\big)P(X = 25)}{P(X > 10)\ P(Y > 10)}$$

$$P\big(Y < X|(min(X,Y) > 10)\big) = \frac{(e^{-2} - e^{-3})0.5 + (e^{-2} - e^{-5})0.25}{0.75e^{-2}} = 0.7381513497$$

EXERCICE 4 – Transformée en Z

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Posons :

$$F_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

On a alors :

$$F(z) = z\frac{\partial}{\partial z}F_1(z)$$

Par la propriété 7 (Voir page 2-16), on aura :

$$f_k = kf_{1k}$$

Trouvons f_{1k} :

$$F_1(z) = \frac{1}{1-z} \rightarrow F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \rightarrow f_{1k} = 1 \cdot 1^k = 1$$

D'où : $f_k = k \cdot f_{1k} = k$