

## EXERCICE 2 - Probabilité

La probabilité pour que M. Dupont attende plus de dix minutes vaut :

$$\begin{aligned}P(\min(X, Y) > 10) &= P(X > 10 \text{ et } Y > 10) \\ &= P(X > 10)P(Y > 10) \\ &= 0.75e^{-2}\end{aligned}$$

La probabilité pour que M. Dupont prenne le taxi plutôt que l'autobus vaut d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(Y < X) &= P(Y < X|X = 5)P(X = 5) + P(Y < X|X = 15)P(X = 15) \\ &\quad + P(Y < X|X = 25)P(X = 25)\end{aligned}$$

Or, X et Y étant deux événements indépendants, on a alors :

$$P(Y < X|X = 5) = P(Y < X) \text{ (Voir Page 2-3 des notes de cours)}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}P(Y < X) &= P(Y < X)P(X = 5) + P(Y < X)P(X = 15) + P(Y < X)P(X = 25) \\ P(Y < X) &= P(Y < 5)P(X = 5) + P(Y < 15)P(X = 15) + P(Y < 25)P(X = 25) \\ P(Y < X) &= (1 - e^{-1})0.25 + (1 - e^{-3})0.50 + (1 - e^{-5})0.25 \\ P(Y < X) &= 0.8814521188\end{aligned}$$

La probabilité recherchée vaut ici :

$$\begin{aligned}P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) &= \frac{P(Y < X \cap (\min(X, Y) > 10))}{P(\min(X, Y) > 10)} \\ P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) &= \frac{P(10 < Y < X)}{P(\min(X, Y) > 10)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) &= \frac{P(10 < Y < X | X = 15)P(X = 15) + P(10 < Y < X | X = 25)P(X = 25)}{P(X > 10 \text{ et } Y > 10)}\end{aligned}$$

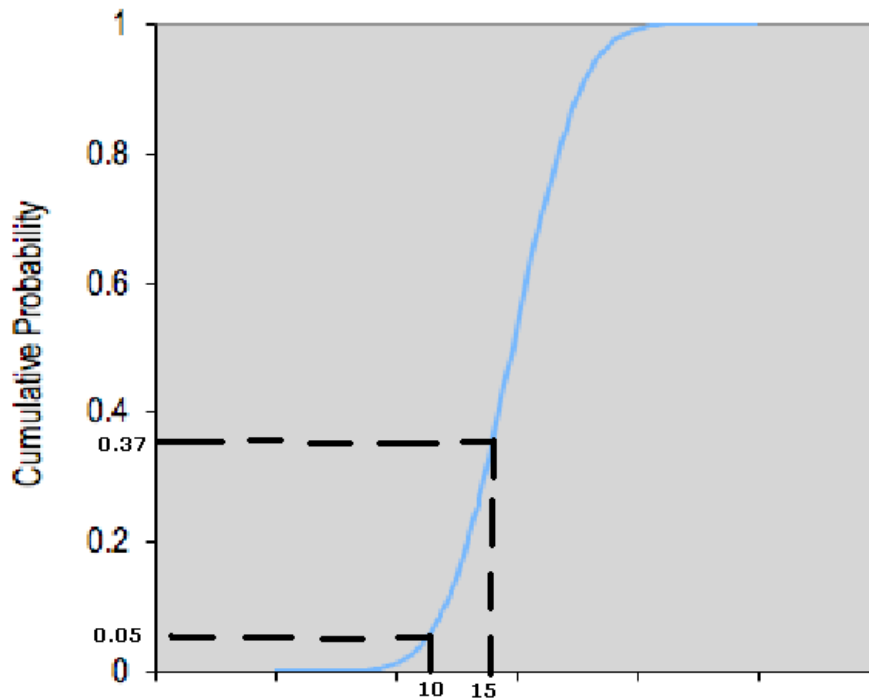
X et Y étant indépendantes, on a :

$$P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) = \frac{P(10 < Y < X)P(X = 15) + P(10 < Y < X)P(X = 25)}{P(X > 10 \text{ et } Y > 10)}$$

$$P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) = \frac{P(10 < Y < 15)P(X = 15) + P(10 < Y < 25)P(X = 25)}{P(X > 10 \text{ et } Y > 10)}$$

La probabilité  $P(10 < Y < 15)$  peut être réécrite à l'aide de la CDF ci-dessous (Cumulative Distribution function)

$$P(10 < Y < 15) = P(Y < 15) - P(10 < Y)$$



On obtient alors :

$$P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) = \frac{(P(Y < 15) - P(10 < Y))P(X = 15) + (P(Y < 25) - P(10 < Y))P(X = 25)}{P(X > 10) P(Y > 10)}$$

$$P(Y < X | (\min(X, Y) > 10)) = \frac{(e^{-2} - e^{-3})0.5 + (e^{-2} - e^{-5})0.25}{0.75e^{-2}} = 0.7381513497$$

#### EXERCICE 4 – Transformée en Z

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Posons :

$$F_1(z) = \frac{1}{1-z}$$

On a alors :

$$F(z) = z \frac{\partial}{\partial z} F_1(z)$$

Par la propriété 7 (Voir page 2-16), on aura :

$$f_k = k f_{1k}$$

Trouvons  $f_{1k}$  :

$$F_1(z) = \frac{1}{1-z} \rightarrow F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \rightarrow f_{1k} = 1 \cdot 1^k = 1$$

$$\text{D'où : } f_k = k \cdot f_{1k} = k$$