

Cours GBM6103A

Traitement d'images et de signaux biomédicaux

TRAITEMENT DE SIGNAUX BIOMÉDICAUX

Yves GOUSSARD

Département de génie électrique
Institut de génie biomédical

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Version provisoire

6 septembre 2012

Avant-propos

Au cours des vingt dernières années, l'informatique a pénétré dans de nombreux domaines de la vie professionnelle ou privée, et en a sensiblement modifié de nombreux aspects. Le domaine médical ne fait pas exception à cette règle, et l'évolution de la recherche autant que des activités cliniques a été considérablement influencée par l'apparition d'ordinateurs de plus en plus puissants et accessibles. Le cours GBM6103A « Traitement d'images et de signaux biomédicaux » traite d'un domaine relativement large du génie biomédical où cette évolution s'est fait particulièrement sentir, c'est-à-dire l'extraction, le codage, le stockage et la représentation d'informations contenues dans des mesures biologiques. Ces questions sont particulièrement importantes, tant pour la recherche que pour les applications cliniques. Elles couvrent d'ailleurs un domaine très vaste qui dépasse largement le cadre du génie biomédical.

Dans ce domaine, le nombre et la variété des approches existantes, ainsi que la diversité des techniques auxquelles elles ont donné naissance présentent un caractère déroutant. Cette situation peut rendre difficile le choix d'une méthode pour traiter un problème particulier, ou simplement la formulation d'un jugement motivé sur telle ou telle technique ou appareil disponible sur le marché. C'est pourquoi la première partie du cours porte sur les aspect fondamentaux de l'extraction, du traitement et de la représentation d'informations contenues dans des signaux. Ici encore, le domaine très large : il englobe le traitement du signal et d'images, l'estimation, partie de l'intelligence artificielle, l'instrumentation, etc. À ma connaissance, il n'existe pas d'ouvrage facilement accessible offrant une vue synthétique de ce domaine.

Ces notes de cours ont pour objet de fournir aux étudiants les bases essentielles du traitement de signaux biomédicaux ou, plus généralement, de l'extraction et de la représentation d'informations présentes dans de tels signaux. L'objectif est double : proposer approche rigoureuse permettant traiter la majorités de problèmes de ce type que l'étudiant rencontrera dans sa vie professionnelle, et présenter un cadre général lui permettant de comprendre et développer des techniques plus sophistiquées ou plus spécialisées. Pour ce faire, des simplifications ont été nécessaires en raison de l'étendue du sujet. Celles-ci sont signalées dans le corps du texte. Par ailleurs, la présentation du cadre général requiert certains de développements théoriques. Ceux-ci sont limités au minimum, et illustrés dans la mesure du possible par des exemples concrets.

Enfin, je tiens à souligner que ces notes doivent beaucoup au Dr. Frédéric

CHAMPAGNAT, qui a fait de nombreux commentaires et suggestions, et qui a conçu la majorité de laboratoires, ainsi qu'à MM. Claude COHEN-BACRIE, David SAVÉRY, Sabine HUSSE, Paul-Anndré BARRIÈRE et Benoît HAMELIN.

Montréal
Août 2009

Table des matières

1	Signal déterministe : représentations et transformées	1
1.1	Introduction	1
1.2	Théorème des projections	2
1.3	Signaux à temps continu	4
1.3.1	Transformée de Fourier	4
1.3.2	Le cas des signaux périodiques	6
1.3.3	Remarques pratiques	7
1.4	Signaux à temps discret	9
1.4.1	Introduction	9
1.4.2	Échantillonnage	10
1.4.3	Transformée en z	12
1.4.4	Transformée de Fourier à temps discret	13
1.4.5	Transformée de Fourier discrète	14
1.4.6	Transformée de Fourier et FFT	15
2	Filtrage linéaire	19
2.1	Introduction	19
2.2	Filtres linéaires invariants	20
2.2.1	Définitions et caractérisation	20
2.2.2	Propriétés	22
2.3	Filtres dynamiques	23
2.3.1	Définitions	24
2.3.2	Propriétés	24
2.4	Exemples	25
2.4.1	Fenêtre rectangulaire	26
2.4.2	Filtre tous pôles du premier ordre	27
2.5	Synthèse de filtres	30
2.5.1	Présentation du problème	30
2.5.2	Types classiques de filtres	33
3	Signal aléatoire	35
3.1	Introduction	35
3.2	Variables aléatoires	36
3.2.1	Variables aléatoires scalaires	36

3.2.2	Couples de variables aléatoires	39
3.2.3	Vecteurs aléatoires	44
4	Estimation	47
4.1	Introduction	47
4.2	Problématique de l'estimation	47
4.3	Méthodologie de l'estimation	49
4.3.1	Principe	49
4.3.2	Exemples	51
4.3.3	Remarque	58
4.4	Caractéristiques des estimateurs	58
4.5	Estimation dans le cas linéaire et gaussien	60
4.5.1	Formulation du problème	61
4.5.2	Forme compacte des estimateurs	62
4.5.3	Forme récurrente des estimateurs	65
4.5.4	Exemple	71
	Annexes	81
A	Précisions sur la transformée de Fourier	83
A.1	Cadre de travail	83
A.2	Transformée de Fourier dans L_1	83
A.3	Transformée de Fourier dans L_2	85
A.4	Transformée de Fourier discrète	86
B	Calcul du gradient de formes quadratiques	89
B.1	Résultat général	89
B.2	Application au critère des moindres carrés	90

Table des figures

1.1	Caractéristiques de la transformée de Fourier X d'un signal x . . .	16
1.2	Effet du bourrage de zéros	18
2.1	Représentation schématique d'un filtre	19
2.2	Réponses fréquentielles de quatre types classiques de filtres . . .	21
2.3	Divergence d'un filtre instable	23
2.4	RI et RF d'une fenêtre rectangulaire	26
2.5	Spectre d'un filtre tous pôles du premier ordre	29
2.6	Exemple de filtre passe-tout déphaseur	31
2.7	Phénomène de rebond dans le domaine temporel	32
2.8	Spectre de divers types de filtres passe-bande	33
3.1	Densité de probabilité et de fonction de répartition	37
3.2	Illustration du phénomène de conditionnement	43
4.1	Comparaison d'estimateurs MAP et MV	54
4.2	Estimation du temps d'arrivée d'un signal par MV	57
4.3	Réponse impulsionnelle du système simulé	73
4.4	Résultats pour une entrée blanche, $N = 256$, SNR = 20 dB . . .	74
4.5	Résultats pour une entrée blanche, $N = 256$, SNR = 0 dB . . .	75
4.6	Résultats pour une entrée blanche, $N = 32$, SNR = 20 dB . . .	77
4.7	Module de la RF du système et du filtre corrélant l'entrée	78
4.8	Résultats pour une entrée corrélée, $N = 256$, SNR = 20 dB . . .	79
4.9	Résultats pour une entrée corrélée, $N = 256$, SNR = 0 dB	80

Chapitre 1

Signal déterministe : représentations et transformées

1.1 Introduction

On s'intéresse dans un premier temps aux signaux déterministes qui, par définition, ne comportent aucune composante incertaine ou aléatoire. La plupart des signaux effectivement manipulés appartiennent à cette catégorie : en effet, une fois une expérience effectuée (par exemple, l'enregistrement d'un électrocardiogramme ou d'un électro-encéphalogramme), les mesures ont des valeurs parfaitement définies, et sont donc déterministes. Par ailleurs, il est possible que la relation entre ces mesures déterministes et le phénomène d'intérêt sous-jacent (l'activité électrique à l'intérieur du cœur ou du cerveau) soit entachée d'incertitudes. Remonter des mesures aux phénomènes sous-jacents est une question importante qui sera abordée au chapitre 4. Pour l'instant, nous nous limitons à l'étude du signal déterministe effectivement mesuré.

Dès qu'il dispose d'un signal, l'utilisateur (l'ingénieur biomédical, le médecin) désire généralement lui faire subir un certain nombre de traitements. Il peut vouloir l'*analyser*, par exemple en déterminer le contenu fréquentiel pour concevoir un système d'instrumentation utilisant le signal en question. Il peut vouloir le *transformer*, par exemple en éliminer des composantes inutiles pour des traitements ultérieurs. Il peut aussi désirer le *stocker*, ce qui nécessite souvent une numérisation et un codage. Tous ces traitements se traduisent par des opérations *mathématiques* sur les signaux dont on dispose. L'objet de ce chapitre est de décrire les opérations les plus importantes, de donner des indications sur leur signification et de préciser les conditions dans lesquelles elles sont valides.

Pour définir et étudier des opérations mathématiques, il est nécessaire de se fixer un cadre de travail. Nous considérerons ici qu'un signal est une fonction

$x(t)$ à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} . La variable t , qui désigne généralement le temps, prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ou dans un sous-ensemble de \mathbb{R} . Afin de pouvoir effectuer des opérations élémentaires, nous supposons que tous les signaux auxquels nous nous intéressons appartiennent à un même ensemble \mathcal{H} ayant une structure d'espace de Hilbert. À toutes fins pratiques, cela signifie qu'il est possible d'additionner les signaux entre eux, de les multiplier par un scalaire et surtout de calculer leur *produit scalaire*. Dans ce qui suit, le produit scalaire de deux signaux x et y sera noté $\langle x \cdot y \rangle$. On suppose en outre qu'il est possible de calculer le *produit de convolution* de deux signaux x et y de \mathcal{H} , noté $x * y$ et défini par :

$$[x * y](t) = \int x(\tau) y(t - \tau) d\tau .$$

On vérifie sur l'équation ci-dessus que $x * y = y * x$. Enfin, on définit la fonction de corrélation γ_{xy} de deux signaux x et y par :

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int x(t) y^*(t - \tau) dt , \quad (1.1)$$

où le symbole « * » désigne l'opération de conjugaison. On remarque que γ_{xy} est le produit de convolution de $x(t)$ et $y^*(-t)$.

1.2 Théorème des projections

L'intérêt de supposer que les signaux étudiés appartiennent tous au même espace \mathcal{H} provient de la possibilité de manipuler ces signaux comme des vecteurs, et donc de pouvoir utiliser les mêmes outils qu'en algèbre et en géométrie usuelle. En particulier, une notion très importante en algèbre est celle de *base* : si $\{e_i; i \in \mathcal{I}\}$ est une base supposée finie ou dénombrable d'un espace \mathcal{H} , alors tout élément x de \mathcal{H} peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i e_i ,$$

où les a_i sont des scalaires. Ainsi, tout élément de \mathcal{H} peut être *représenté sans perte d'information* par l'ensemble des coefficients a_i . Si, de plus, la base est orthonormée, ce qui signifie qu'elle vérifie :

$$\forall i, j \quad \langle e_i \cdot e_j \rangle = \delta_{ij} ,$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker :

$$\begin{cases} i = j & \iff \delta_{ij} = 1 , \\ i \neq j & \iff \delta_{ij} = 0 , \end{cases}$$

alors on a :

$$\forall i \quad a_i = \langle x \cdot e_i \rangle .$$

D'un point de vue pratique, ce résultat est très important : il indique que si l'on dispose d'une base orthonormée, les coefficients de la représentation de tout élément x dans cette base se calculent par de simples produits scalaires. De plus, chaque coefficient a_i s'interprète comme la longueur de la projection orthogonale de x sur l'élément de base e_i .

Par exemple, considérons l'espace des signaux à temps continu sur un intervalle $[0, T]$. Cet ensemble, muni du produit scalaire :

$$\langle x \cdot y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t) dt, \quad (1.2)$$

est un espace de Hilbert. Considérons l'ensemble des fonctions $\{e_k(t), k \in \mathbb{Z}\}$ définies sur $[0, T]$ par :

$$e_k(t) = e^{2i\pi kt/T}.$$

En utilisant la définition du produit scalaire donnée en (1.2), on vérifie que :

$$\begin{aligned} \langle e_k \cdot e_l \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi(k-l)t/T} dt, \\ &= \delta_{kl}. \end{aligned}$$

Le système $\{e_k; k \in \mathbb{Z}\}$ est donc orthonormé. On peut en outre montrer qu'il forme une base. Par conséquent, tout signal x continu sur $[0, T]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2i\pi kt/T},$$

les coefficients a_k étant donnés par :

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt.$$

On reconnaît ici le développement en série de Fourier des fonction définies sur l'intervalle $[0, T]$, ou des fonctions périodiques de période T .

Les résultats ci-dessus, pour intéressants qu'il soient, se heurtent néanmoins à une difficulté pratique importante : dans la plupart des cas (et en particulier pour le développement en série de Fourier des signaux périodiques), la base de \mathcal{H} comprend un nombre infini d'éléments, ce qui ne permet pas la manipulation *numérique* des représentations correspondantes. On est donc amené à choisir un nombre *fini* d'éléments de la base et à se poser le problème suivant : soit $\{e_i; i \in \overline{\mathcal{I}}\}$ un sous-ensemble fini d'une base orthonormée de \mathcal{H} , et soit $\overline{\mathcal{H}}$ le sous-espace correspondant ; comment approcher au mieux (c'est-à-dire au sens de la distance définie par le produit scalaire de \mathcal{H}) un élément x de \mathcal{H} par un élément de $\overline{\mathcal{H}}$?

La réponse nous est fournie par le théorème des projections, qui indique que cette meilleure approximation \bar{x} de x dans $\overline{\mathcal{H}}$ est la projection orthogonale de

x sur $\overline{\mathcal{H}}$. Cette propriété s'exprime par le fait que la différence entre x et \overline{x} est orthogonale à $\overline{\mathcal{H}}$, soit :

$$\forall i \in \overline{\mathcal{I}}, \quad \langle (x - \overline{x}) \cdot e_i \rangle = 0.$$

Il en découle immédiatement que :

$$\forall i \in \overline{\mathcal{I}}, \quad \langle x \cdot e_i \rangle = \langle \overline{x} \cdot e_i \rangle,$$

ce qui indique les décomposition de x et \overline{x} sur les éléments de $\{e_i; i \in \overline{\mathcal{I}}\}$ sont identiques. En d'autres termes, \overline{x} s'obtient simplement en prélevant les coefficients de la décomposition de x sur le sous-système $\{e_i; i \in \overline{\mathcal{I}}\}$.

Finalement, soulignons que ces questions de projection et de décomposition sur des bases sous-tendent une grande partie des sujets abordés dans ce chapitre et le suivant, et en particulier ce qui a trait à la transformée de Fourier. Mentionnons également que le théorème des projections présenté ci-dessus n'apporte pas de réponse à la question du choix du sous-espace $\overline{\mathcal{H}}$ sur lequel projeter x . Si l'on revient à l'exemple du développement en série de Fourier, une solution souvent adoptée consiste utiliser le sous-système $\{e^{2i\pi kt/T}; -K \leq k \leq K\}$, ce qui revient à éliminer les fréquences les plus hautes. Ce choix est souvent justifié dans les applications (les systèmes physiques sont à bande passante limitée) mais n'est pas unique. Dans la pratique, il est important d'utiliser au mieux les connaissances disponibles sur le signal étudié afin de choisir judicieusement $\overline{\mathcal{H}}$.

1.3 Signaux à temps continu

Nous nous intéressons maintenant aux signaux à temps continu, c'est à dire aux signaux $x(t)$ tels que t varie dans un intervalle de \mathbb{R} ou dans \mathbb{R} tout entier, et non pas dans un sous-ensemble discret tel que \mathbb{Z} ou \mathbb{N} . Bien que, dans la pratique, la plupart des signaux effectivement manipulés soient à temps discret, un survol des propriétés des signaux à temps continu est nécessaire pour introduire la notion de transformée de Fourier, et pour examiner ensuite les questions d'échantillonnage. Cette section est consacrée essentiellement à la transformée de Fourier, qui permet à la fois une représentation et une analyse des signaux à temps continu.

1.3.1 Transformée de Fourier

L'importance de la transformée de Fourier (TF) provient d'une part de ce qu'elle permet d'accéder à la notion de fréquence contenue dans un signal $x(t)$, et d'autre part de certaines simplifications qu'elle apporte à l'étude du filtrage linéaire (voir chapitre 2). La notion de fréquence est importante car généralement liée à des phénomènes physiques se répétant régulièrement et qui peuvent avoir une grande importance pratique : battements cardiaques, décharges neuronales normales ou pathologiques, vibrations dans certaines structures du corps

	Domaine des temps	Domaine des fréquences
	$x(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu)$
	$y(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\nu)$
<i>Linéarité</i>	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$
<i>Translation (temps)</i>	$x(t - \tau)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu)e^{-2i\pi\nu\tau}$
<i>Homothétie (temps)</i>	$x(\alpha t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{ \alpha } X(\nu/\alpha)$
<i>Translation (fréq.)</i>	$x(t)e^{2i\pi ft}$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu - f)$
<i>Homothétie (fréq.)</i>	$\frac{1}{ \alpha } x(t/\alpha)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\alpha\nu)$
<i>Conjugaison</i>	$x^*(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\nu)$
<i>Convolution</i>	$[x * y](t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu)Y(\nu)$
<i>Produit</i>	$x(t)y(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} [X * Y](\nu)$

TABLE 1.1 – Principales propriétés de la transformée de Fourier.

humain (squelette, valves cardiaques, etc.). Classiquement, la TF $X(\nu)$ d'un signal $x(t)$ est définie par :

$$X(\nu) = \int x(t)e^{-2i\pi\nu t} dt, \quad (1.3)$$

où $\nu \in \mathbb{R}$ désigne la fréquence. La TF *inverse* qui permet de passer de $X(\nu)$ à $x(t)$ est définie par :

$$x(t) = \int X(\nu)e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (1.4)$$

Dans la suite, on désignera respectivement par \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} la TF et la TF inverse. Soulignons que les définitions (1.3) et (1.4) sont valides sous réserve que les intégrales convergent. Or il n'en est pas toujours ainsi. Nous supposons pour l'instant que les signaux x appartiennent à un espace \mathcal{H} tel que l'on puisse donner un sens à (1.3) et (1.4). Le lecteur est renvoyé à l'annexe A pour des indications plus précises sur construction de la TF et de son inverse.

La définition (1.3) peut être interprétée de la manière suivante : si l'on munit l'espace \mathcal{H} du produit scalaire

$$\langle x \cdot y \rangle = \int x(t)y^*(t) dt, \quad (1.5)$$

alors, pour une fréquence ν donnée, $X(\nu)$ est la projection orthogonale de x sur la fonction $e^{2i\pi\nu t}$. La TF traduit donc bien la notion usuelle de fréquence. Notons que cette interprétation sous-entend que l'ensemble des fonctions $\{e^{2i\pi\nu t}\}$ peut être interprété comme un système orthonormal, ce que nous admettons pour l'instant.

La TF possède de nombreuses propriétés, dont les plus importantes sont résumées dans le tableau 1.1. Celles-ci peuvent être démontrées sans difficulté

à partir des définitions (1.3) et (1.4). On peut également montrer la propriété essentielle suivante, dite *théorème de Plancherel* :

$$\int x(t) y^*(t) dt = \int X(\nu) Y^*(\nu) d\nu. \quad (1.6)$$

L'équation ci-dessus traduit la conservation par la TF du produit scalaire défini en (1.5). En prenant $y = x$ dans (1.6), on en déduit la *relation de Parseval* :

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(\nu)|^2 d\nu, \quad (1.7)$$

qui montre que l'énergie d'un signal est égale à celle de sa TF. Enfin, en partant de la définition de la fonction de corrélation donnée en (1.1), on démontre de manière élémentaire que :

$$\mathcal{F}(\gamma_{xy}(\tau)) = \Gamma_{xy}(\nu) = X(\nu) Y^*(\nu).$$

Lorsque $x = y$, la relation ci-dessus devient :

$$\mathcal{F}(\gamma_x(\tau)) = \Gamma_x(\nu) = |X(\nu)|^2. \quad (1.8)$$

La quantité Γ_x est généralement désignée par *densité spectrale d'énergie* ou plus simplement *spectre d'énergie* du signal x .

1.3.2 Le cas des signaux périodiques

Dans les développements précédents, nous avons supposé que l'intégrale qui permet de définir la TF converge (voir (1.3)). Or cette propriété n'est manifestement pas vérifiée lorsque x est un signal à temps continu *périodique*. Cette catégorie de signaux étant très importante dans la pratique, il est nécessaire de généraliser la notion de TF telle qu'elle a été introduite jusqu'à présent. On exige de cette généralisation qu'elle conserve les caractéristiques importantes déjà mentionnées, comme l'existence d'une transformée inverse et les propriétés indiquées au tableau 1.1.

La généralisation requise nécessite de faire appel à la théorie des distributions, ce qui dépasse le cadre de ce cours. Quelques précisions sur ce sujet sont données à l'annexe A. D'un point de vue pratique, nous *définissons* la distribution (ou impulsion) de Dirac δ comme étant la TF (et la TF inverse) de la fonction uniforme sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1_\nu, \\ 1_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu). \end{cases} \quad (1.9)$$

Puis nous admettons que toutes les propriétés déjà énoncées de la TF restent vraies. On en déduit par exemple que, pour un signal x quelconque :

$$\begin{aligned} [\delta * x](t) &= \mathcal{F}^{-1}(1_\nu X(\nu)), \\ &= \mathcal{F}^{-1}(X(\nu)), \\ &= x(t). \end{aligned}$$

L'impulsion de Dirac est donc l'élément neutre du produit de convolution. De même, en utilisant la propriété de translation en temps de la TF pour l'impulsion de Dirac, on obtient :

$$\delta(t - \tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1_\nu e^{-2i\pi\nu\tau} = e^{-2i\pi\nu\tau}. \quad (1.10)$$

Symétriquement, l'utilisation de la propriété de translation en fréquence donne :

$$e^{2i\pi ft} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu - f). \quad (1.11)$$

Les relations (1.10) et (1.11) montrent que l'introduction de la distribution de Dirac nous a permis de définir la TF et la TF inverse des fonctions périodiques particulières que sont les exponentielles complexes. Pour généraliser à d'autres signaux périodiques, nous utilisons le développement en série de Fourier déjà introduit à la section 1.2 : soit x un signal à temps continu périodique et de période T . Il peut s'écrire :

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2i\pi kt/T},$$

avec :

$$a_k = \langle x \cdot e^{2i\pi kt/T} \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-2i\pi kt/T} dt.$$

En utilisant la propriété de linéarité de la TF, on en déduit :

$$X(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(\nu - k/T). \quad (1.12)$$

La TF d'un signal périodique apparaît donc comme une série d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de $\Delta\nu = 1/T$. Les amplitudes de ces impulsions sont données par les coefficients du développement en série de Fourier du signal. On dit que celui-ci possède un *spectre de raies* caractéristique des signaux périodiques. Si l'on excepte la fréquence nulle, la plus basse fréquence de ce spectre est égale à $1/T$. Il s'agit de la fréquence *fondamentale*. Les autres fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, et on les désigne par le terme d'*harmoniques*.

1.3.3 Remarques pratiques

À ce stade, la notion de TF peut sembler un peu confuse puisqu'il nous n'en avons pas donné de définition *unique*. Soulignons tout d'abord que ce manque de cohérence n'est qu'apparent, et que la théorie de la TF sur l'espace de distributions \mathcal{S}' permet d'unifier les différentes définitions que nous avons vues.

Pour calculer pratiquement une TF, on procède de manière analogue à celle employée pour trouver la TF des exponentielles complexes, puis des signaux périodiques, c'est-à-dire en utilisant conjointement la définition (1.3) lorsque l'intégrale converge, les propriétés données au tableau 1.1 et celles qui caractérisent

$x(t)$	$X(\nu)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi \nu^2}$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \nu^2}$
$e^{\pm 2i\pi \nu_0 t}$	$\delta(\nu \mp \nu_0)$
$\cos(2\pi \nu_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2} (e^{i\varphi_0} \delta(\nu - \nu_0) + e^{-i\varphi_0} \delta(\nu + \nu_0))$
$\operatorname{sgn} t$	$1/(i\pi \nu)$
1	$\delta(\nu)$
$(-2i\pi t)^m$	$\delta^{(m)}(\nu)$
$1/t$	$-i\pi \operatorname{sgn} \nu$
$ t $	$-\frac{1}{2\pi^2 \nu^2}$
$\operatorname{rect}(-T/2, T/2)$	$T \frac{\sin \pi T \nu}{\pi T \nu}$
$\max\{0, 1 - \frac{ t }{T}\}$ (fonction triangle)	$T \left(\frac{\sin \pi T \nu}{\pi T \nu}\right)^2$
$\nu_0 \frac{\sin \pi \nu_0 t}{\pi \nu_0 t}$	$\operatorname{rect}(-\nu_0/2, \nu_0/2)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(m)}(t)$	$(2i\pi \nu)^m$
$\delta(t \pm T)$	$e^{\pm 2i\pi T \nu}$
$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\nu - n/T)$
$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(t - nT)$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-2i\pi n T \nu}$

TABLE 1.2 – Table des transformées de Fourier et des transformées de Fourier inverses de quelques fonctions usuelles.

la distribution de Dirac. Ainsi, on peut calculer sans introduire d'incohérence la TF des signaux à croissance au plus polynomiale, ce qui permet de couvrir la plupart des applications. Les TF et TF inverses de quelques fonctions usuelles sont données au tableau 1.2.

Soulignons qu'ainsi définie, la TF admet une transformée inverse. Ceci indique qu'il y a équivalence entre le signal $x(t)$ et sa transformée $X(\nu)$, puisqu'il est toujours possible de revenir au point de départ. Cette équivalence entre domaine temporel et domaine fréquentiel indique que la TF est seulement une *représentation* qui permet de « changer le point de vue » sur le signal pour — peut-être — en mettre en évidence certaines caractéristiques. Mais le passage d'un domaine à l'autre ne se traduit par aucun gain et (théoriquement) aucune perte d'information. Soulignons aussi la symétrie entre TF et son inverse, qui permet de transposer les propriétés de \mathcal{F} à \mathcal{F}^{-1} . Cette symétrie est apparente sur les définitions (1.3) et (1.4). En transposant ce qui a été vu pour les signaux périodiques, elle permet par exemple d'affirmer que la TF d'un signal composé d'une suite d'impulsions de Dirac régulièrement espacées est une fonction périodique.

1.4 Signaux à temps discret

1.4.1 Introduction

Les signaux à temps discret sont d'une très grande importance pratique car leur traitement se fait le plus souvent numériquement à l'aide d'ordinateurs ou de micro-ordinateurs. Or la plupart des signaux biologiques sont recueillis sous forme analogique. Leur numérisation nécessite deux opérations : l'*échantillonnage* qui consiste à ne conserver la valeur du signal qu'à des instants discrets et généralement régulièrement espacés, et la *quantification* qui consiste à coder la valeur du signal à un instant donné sur un nombre prédéfini de niveaux. Dans cette section, nous nous intéresserons essentiellement à l'échantillonnage et aux types de signaux qui en résultent : les signaux à temps discret. Les questions de quantification seront brièvement mentionnées comme un cas particulier de bruit lors de l'étude des signaux aléatoires.

Un signal à temps discret x est défini comme une suite de valeurs $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ où à chaque *échantillon* $x_n \in \mathbb{C}$ correspond un instant t_n . Ici, on se limite au cas où les instants t_n sont régulièrement espacés. On peut donc écrire $t_n = nT_e, n \in \mathbb{Z}$. T_e est désigné par le terme de *pas* ou *période d'échantillonnage* du signal à temps discret x . Celui-ci apparaît comme une série d'impulsions et peut donc se mettre sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta(t - nT_e). \quad (1.13)$$

L'équation ci-dessus permet de faire le lien entre les signaux à temps continu et les signaux à temps discret. Elle montre d'ailleurs que ces derniers peuvent être considérés comme un cas particulier des signaux à temps continu, ce qui permet de définir comme précédemment le produit de convolution et la fonction de corrélation de deux signaux à temps discret. L'utilisation conjointe des définitions de ces quantités et de (1.13) permet de montrer aisément que, pour deux signaux x et y de même période d'échantillonnage T_e , $x * y$ et γ_{xy} sont eux aussi à temps discret et de période d'échantillonnage T_e . Leurs expressions sont données par :

$$\begin{aligned} [x * y](nT_e) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p y_{n-p}, \\ \gamma_{xy}(nT_e) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} x_p y_{p-n}^*. \end{aligned}$$

On peut de même définir directement à partir de (1.13) la TF d'un signal à temps discret. Cependant, celle-ci possède des propriétés particulières qui méritent l'attention. C'est pourquoi, après avoir présenté les questions d'échantillonnage des signaux continus et de représentation des signaux à temps discret par *transformée en z* , nous consacrerons la fin de cette section à la TF des signaux à temps discret.

1.4.2 Échantillonnage

L'opération d'échantillonnage *régulier* consiste à transformer un signal à temps continu $x(t)$ en un signal à temps discret $\{x_n = x(nT_e); n \in \mathbb{Z}\}$, où T_e désigne la période d'échantillonnage. La question qui se pose immédiatement est de savoir si le passage de x à $\{x_n\}$ s'accompagne d'une perte d'information. La réponse est donnée par le théorème d'échantillonnage, qui est énoncé ci-après. Mais auparavant, il est nécessaire de définir la notion de bande passante d'un signal.

Définition - La bande passante d'un signal $x(t)$ est le plus petit intervalle $[A, B]$ tel que :

$$\forall \nu \notin [A, B], X(\nu) = 0.$$

La définition ci-dessus signifie que la bande passante d'un signal est le plus petit intervalle contenant le support de sa TF. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème d'échantillonnage (ou de Shannon-Nyquist) - Soit $x(t)$ un signal dont la bande passante est incluse dans l'intervalle $[-B, B]$. $x(t)$ peut être reconstruit sans erreur à partir de la suite de ses échantillons prélevés aux instants $nT, n \in \mathbb{Z}$ avec $T = 1/(2B)$.

Ce résultat se démontre de manière élémentaire comme suit : $X(\nu)$ étant à support sur $[-B, B]$, il admet le développement en série de Fourier suivant :

$$\forall \nu \in [-B, B] \quad X(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi k\nu/(2B)}, \quad (1.14)$$

où les coefficients de Fourier sont obtenus par produit scalaire avec les éléments de la base des fonctions à support limité :

$$X_k = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B X(\nu) e^{-2i\pi k\nu/(2B)} d\nu.$$

On remarque que $X(\nu)$ étant nul à l'extérieur de $[-B, B]$, les bornes d'intégration peuvent être changées pour $-\infty$ et $+\infty$. L'intégrale apparaît alors comme la TF inverse de X évaluée en $t = -k/(2B) = -kT$. On a donc

$$X_k = T x(-kT). \quad (1.15)$$

Pour retrouver $x(t)$, l'idée consiste à prendre la TF inverse de $X(\nu)$. On ne peut pas appliquer la transformation inverse directement à (1.14), puisque l'égalité n'est valide que sur l'intervalle $[-B, B]$. Mais on peut écrire :

$$\forall \nu \in \mathbb{R} \quad X(\nu) = \text{rect}_{-B, B}(\nu) \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi k\nu/(2B)},$$

où $\text{rect}_{-B,B}$ désigne la fonction « rectangle » qui vaut 1 sur $[-B, B]$ et 0 ailleurs. Par application de la propriété sur la TF inverse d'un produit, on obtient :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}(\text{rect}_{-B,B}) * \mathcal{F}^{-1} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi k\nu/(2B)} \right).$$

On montre facilement par application de la définition que $\mathcal{F}^{-1}(\text{rect}_{-B,B})(t)$ est égal à $2B \frac{\sin 2B\pi t}{2B\pi t}$. Par ailleurs, la TF inverse de la somme d'exponentielles est une somme d'impulsions de Dirac. On a donc :

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(2B \frac{\sin(2B\pi t)}{2B\pi t} \right) * \left(\frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(-k/(2B)) \delta(t + k/(2B)) \right), \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT) \frac{\sin \pi(t - kT)/T}{\pi(t - kT)/T}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

L'égalité ci-dessus, dite *formule d'interpolation de Shannon*, montre que le signal à temps continu peut être reconstruit complètement et sans erreur à partir du signal échantillonné, à condition que la fréquence d'échantillonnage $1/T$ soit supérieure au double de la fréquence maximale (en valeur absolue) contenue dans le signal.

Les développements ci-dessus méritent interprétation. L'élément le plus important est fourni par (1.14) ; en effet, en reportant dans cette équation l'expression de X_k établie en (1.15) et en utilisant l'égalité $T = 1/(2B)$, on obtient :

$$\forall \nu \in [-B, B] \quad X(\nu) = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(-kT) e^{2i\pi\nu(kT)}.$$

On peut par ailleurs écrire que le terme qui apparait dans la sommation est la fonction $x(t) e^{-2i\pi\nu t}$ évaluée en $t = -kT$, ce qui, par utilisation des propriétés de l'impulsion de Dirac, conduit à :

$$\forall \nu \in [-B, B] \quad X(\nu) = T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} \delta(t + kT) dt.$$

En changeant le signe de l'indice muet de sommation ($-k \rightarrow n$) et en intervertissant l'ordre de l'intégrale et de la somme, on obtient finalement

$$\forall \nu \in [-B, B], \quad X(\nu) = T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(t) \delta(t - nT) \right) e^{-2i\pi\nu t} dt,$$

ce qui montre que, à un coefficient près, les transformées du signal à temps continu et du signal à temps discret sont identiques sur l'intervalle $[-B, B]$. Par contre, à l'extérieur de cet intervalle, la TF de $x(t)$ est nulle alors que celle de $x(nT)$ est périodique, le motif « original » se répétant à intervalles de $1/T$. *Périodiser* la TF du signal à temps continu ou au contraire déduire le

spectre du signal à temps continu à partir de celui du signal à temps discret en isolant une période se fait évidemment sans aucune perte d'information. Dans le domaine temporel, ces deux opérations correspondent respectivement à l'échantillonnage à la période T et à l'interpolation selon la formule (1.16).

Cette interprétation permet d'expliquer le phénomène de *repliement de spectre* que l'on observe lorsque la période d'échantillonnage est trop longue (sous-échantillonnage). Supposons que T soit telle que $T > 1/(2B)$. Lors de la périodisation du spectre du signal à temps continu, le motif va se répéter à des intervalles $1/T < 2B$, et les « bords » de chaque motif vont chevaucher ceux du voisin. Dans ces conditions, il ne sera pas possible de retrouver le spectre du signal à temps continu à partir du spectre périodisé, et la formule d'interpolation (1.16) ne sera plus valide. Par contre si la période d'échantillonnage est telle que $T < 1/(2B)$ (sur-échantillonnage), l'intervalle entre les motifs du spectre périodisé sera plus long, ce qui ne provoquera pas de chevauchement et permettra de retrouver le spectre du signal à temps continu. Précisons aussi que la position des échantillons est sans importance sur le résultat (il n'est pas nécessaire d'avoir un échantillon à $t = 0$). C'est la période d'échantillonnage qui importe.

Enfin, il est important de souligner que ce résultat utilise des hypothèses qui ne sont jamais vérifiées en pratique. En effet, toutes les sommes portent sur un indice qui varie sur l'ensemble \mathbb{Z} entier, ce qui suppose l'existence d'un nombre infini d'échantillons. Dans les applications, on se limite toujours à des sommes finies, ce qui introduit une erreur qui peut devenir significative. Cet effet se fait surtout sentir pour la formule d'interpolation de Shannon, qui peut conduire à des erreurs importantes, souvent sous forme d'oscillations, aux « extrémités » du signal observé. En général, il est préférable d'aborder le problème d'interpolation sous l'angle de l'estimation, ce que nous verrons au chapitre 4.

1.4.3 Transformée en z

La transformée en z est l'analogie en temps discret de la transformée de Laplace utilisée en temps continu. Elle permet une représentation simple de catégories importantes de filtres numériques que nous verrons au chapitre 2 et permet d'en étudier facilement la stabilité. Nous rappelons ici la définition et les principales propriétés de la transformée en z .

La transformée en z d'un signal à temps discret $\{x_n; n \in \mathbb{Z}\}$ est définie par :

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^{-n}, \quad (1.17)$$

où z est une variable complexe. On montre qu'il existe un anneau du plan complexe $A(r_1, r_2)$ de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 dans lequel la série converge. On montre également l'existence d'une formule d'inversion donnée par :

$$x_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{(C)} X(z) z^{n-1} dz, \quad (1.18)$$

où (C) désigne un cercle situé dans l'anneau de convergence. Ceci qui montre qu'il y a équivalence entre le domaine transformé et le domaine temporel discret. Comme la TF, la transformée en z est donc une *représentation*.

On donne ci-après quelques définitions et propriétés qui seront utiles par la suite :

- on appelle *pôles* de $X(z)$ les valeurs de z pour lesquelles $X(z)$ tend vers l'infini, et *zéros* de $X(z)$ les valeurs de z pour lesquelles $X(z)$ s'annule ;
- Si $\{y_n\}$ est la version décalée de $\{x_n\}$ par introduction d'un *retard* n_0 , soit $y_n = x_{n-n_0}$, alors on a :

$$Y(z) = z^{-n_0} X(z);$$

- enfin, on démontre aisément en utilisant les définitions que si x et w sont deux signaux à temps discret tels que les régions de convergence de leurs transformées en z soient d'intersection non vide, alors $y = x * w$ admet une transformée en z donnée par

$$Y(z) = X(z) W(z).$$

Ceci indique que, comme pour la TF, la transformée en z transforme un produit de convolution en un simple produit.

1.4.4 Transformée de Fourier à temps discret

On considère dans cette section et la suivante que les signaux à temps discret ont une période d'échantillonnage T_e égale à 1 par convention. Pour se ramener à une période d'échantillonnage T quelconque, on vérifie qu'il suffit d'appliquer un coefficient multiplicateur de T sur l'axe temporel et $1/T$ sur l'axe fréquentiel.

La TF d'un signal à temps discret $\{x_n; z \in \mathbb{Z}\}$ se définit aisément par référence à la TF des signaux à temps continu : en effet, le signal à temps continu correspondant s'écrit :

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta(t - n),$$

et, en utilisant la propriété de linéarité de la TF, on obtient immédiatement :

$$X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n\nu}, \quad (1.19)$$

où la variable ν varie sur \mathbb{R} tout entier. En comparant l'équation ci-dessus à (1.17), on observe que $X(\nu)$ est égal à la transformée en z de $\{x_n; z \in \mathbb{Z}\}$ évaluée au point $z = e^{2i\pi\nu}$. On observe aussi sur (1.19) que $X(\nu)$ est périodique et de période 1. Ce résultat est symétrique de celui établi plus haut, selon lequel la TF d'un signal périodique est une suite d'impulsions, donc un signal échantillonné dans le domaine des fréquences.

Pour calculer la transformée inverse, il faut tenir compte de ce que $X(\nu)$ est périodique et de période 1, et admet donc le développement en série de Fourier

suivant :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{2i\pi k\nu}, \\ \text{avec } b_k &= \langle X(\nu) \cdot e^{-2i\pi k\nu} \rangle, \\ &= \int_0^1 X(\nu) e^{-2i\pi k\nu} d\nu. \end{aligned}$$

En prenant la TF inverse de l'équation ci dessus, on constate que

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{-k} \delta(t - k) \quad (1.20)$$

ce qui montre que x est bien un signal à temps discret dont l'échantillon x_n est égal au $-k$ ° coefficient du développement en série de Fourier de la TF. Ce résultat est lui aussi symétrique de celui établi pour les signaux à temps continu périodiques. Il nous reste maintenant à examiner le cas où x est à la fois à temps discret et périodique. Ce cas est très important en pratique car il existe alors des algorithmes de faible complexité numérique pour calculer la TF et son inverse.

1.4.5 Transformée de Fourier discrète

On se place dans le cas où le signal à temps discret $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est périodique et de période N . Ce signal est donc complètement défini par les N échantillons $\{x_n, 0 \leq n \leq N - 1\}$. Par application des résultats établis précédemment, on peut affirmer que $X(\nu)$ est périodique et de période 1 (car x est à temps discret) et que $X(\nu)$ est un spectre de raies espacées de $1/N$ (car x est périodique de période N). X est donc lui aussi échantillonné et périodique. Le rapport entre la période d'échantillonnage et la période montre que X est lui aussi complètement défini par les N échantillons $\{X_k = X(k/N); 0 \leq k \leq N - 1\}$. Nous établissons maintenant les relations permettant de passer de $\{x_n\}$ à $\{X_k\}$ et réciproquement.

Par utilisation de (1.12), on voit que X_k est le k ° coefficient de la décomposition en série de Fourier de x ; il a donc pour expression :

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi kn/N}. \quad (1.21)$$

Cette équation définit la *transformée de Fourier discrète* (TFD) de x . De même, par application de (1.20), on voit que :

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi kn/N}, \quad (1.22)$$

et l'équation ci-dessus définit la TFD *inverse*.

La TFD et son inverse permettent de passer d'un signal à temps discret périodique représenté par N échantillons à un autre signal du même type. Le fait

que ces signaux soient complètement définis par un nombre *fini* d'échantillons simplifie beaucoup l'étude de ces transformées. Mais surtout, celles-ci peuvent être calculées de manière économique par l'algorithme de *transformée de Fourier rapide* (FFT, pour *fast Fourier transform*). Le principe de fonctionnement de cet algorithme est exposé ci-après.

On observe sur (1.21) que le calcul de X_k nécessite environ N multiplications et additions complexes. Comme il faut calculer N échantillons X_k , le calcul complet requiert environ N^2 additions et multiplications complexes. L'idée générale de l'algorithme FFT est d'exploiter les propriétés des exponentielles complexes qui interviennent dans la somme de (1.21). Supposons que N est pair et égal à $2M$. On peut réécrire (1.21) sous la forme :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} \left(x_{2m} e^{-2i\pi k(2m)/(2M)} + x_{2m+1} e^{-2i\pi k(2m+1)/(2M)} \right), \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m} e^{-2i\pi km/M} + \frac{1}{2M} e^{-2i\pi \frac{k}{2M}} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m+1} e^{-2i\pi km/M}, \\ &= \frac{1}{2} \left(Y_k + e^{-2i\pi k/(2M)} Z_k \right), \end{aligned}$$

où Y_k et Z_k correspondent respectivement aux TFD de taille $M = N/2$ des échantillons pairs et impairs du signal. On a de plus :

$$Y_{k+M} = Y_k, \quad Z_{k+M} = Z_k, \quad e^{-2i\pi(k+M)/(2M)} = -e^{-2i\pi k/(2M)},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2} \left(Y_k + e^{-2i\pi k/(2M)} Z_k \right) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq M-1, \\ X_k &= \frac{1}{2} \left(Y_k - e^{-2i\pi k/(2M)} Z_k \right) \quad \text{pour } M \leq k \leq N-1. \end{aligned}$$

En substance, on a réussi à remplacer une TFD de longueur N par deux TFD de longueur $N/2$. Un décompte précis des opérations montre que les N^2 additions et multiplications complexes ont été remplacées par $(N^2 + N)/2$ multiplications et $(N^2 + 2N)/2$ additions. Si N est une puissance de 2, on peut répéter l'opération jusqu'à avoir à évaluer les TFD de signaux contenant seulement deux échantillons, ce qui est trivial. On passe alors de complexités numériques de l'ordre de N^2 pour la TFD standard à $N \log_2(N/2)$ pour la FFT. Dès que la taille des signaux dépasse la centaine d'échantillons, le gain est très significatif. Ainsi, pour $N = 256 = 2^8$ passe-t-on de $2^{16} \approx 64000$ opérations pour la TFD standard à $2^8 \cdot 7 \approx 2000$ opérations pour la FFT.

1.4.6 Transformée de Fourier et FFT

Dans la pratique, le calcul numérique d'une TF se fait le plus souvent en utilisant un algorithme de FFT après avoir échantillonné et numérisé le signal

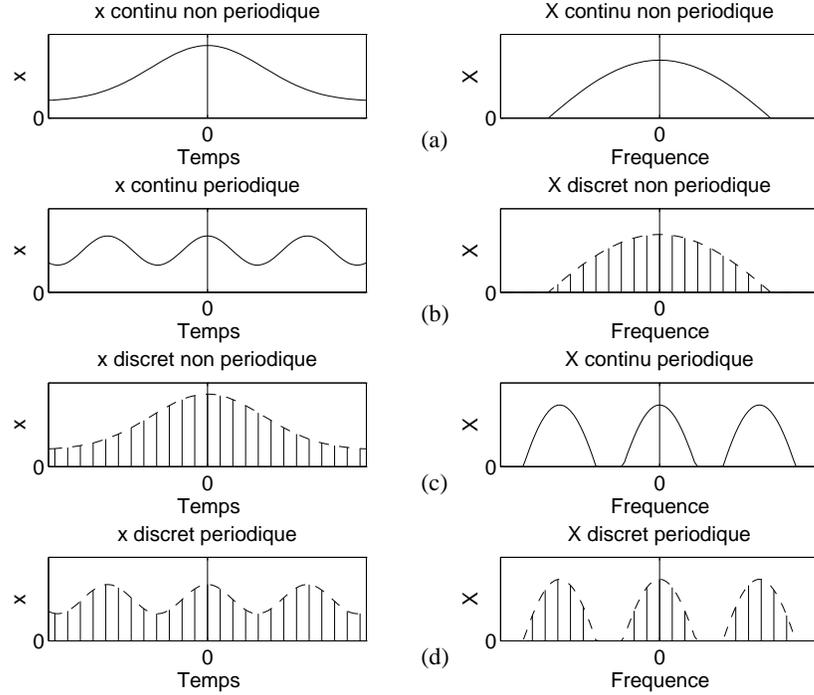


FIGURE 1.1 – Caractéristiques de la transformée de Fourier X d'un signal x . (a) Lorsque x est continu et non périodique, X est également continu et non périodique. (b) Lorsque x est continu et périodique, X est discret et non périodique. (c) Symétriquement, lorsque x est discret et non périodique, X est continu et périodique. (d) Enfin, lorsque x est discret et périodique, X est lui aussi discret et périodique. Ce dernier cas correspond aux hypothèses de la transformée de Fourier discrète. Notons que dans chacun des quatre cas, x peut être à bande limitée ou à bande infinie.

x auquel on s'intéresse. On dispose donc de N échantillons du signal $\{x_n\}$ à partir desquels on calcule les N échantillons de la TFD $\{X_k\}$. Il est important de savoir dans quelle mesure les $\{X_k\}$ sont effectivement des échantillons de la TF du signal original x . La réponse à cette question varie selon les propriétés de x :

1. si x est à *temps discret et périodique* de période N , sa TF coïncide exactement avec la TFD que calcule l'algorithme FFT (voir section précédente) ;
2. si x est à *temps discret et non périodique*, sa TF est continue et périodique. En se limitant à N échantillons du signal, on tronque la somme infinie qui fournit la valeur de la TF. Cette troncature dans le domaine temporel correspond à une convolution par un sinus cardinal dans le domaine spectral. Évidemment, l'erreur tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini ;

3. si x est à *temps continu et périodique*, il possède un spectre de raies. Si, de plus, le signal est à *bande limitée*, il est possible de l'échantillonner sans perte d'information en respectant les conditions du théorème d'échantillonnage. On est alors ramené au premier cas, et les échantillons X_k correspondent aux échantillons de la TF de x . Par contre, si x est à *bande infinie*, l'échantillonnage se traduit par un repliement spectral et provoque donc une erreur dans le calcul de la TF. L'importance de cette erreur est en général difficile à évaluer ;
4. si x est à *temps continu et non périodique*, deux situations se présentent : soit x est à *bande limitée* et peut être alors échantillonné sans perte d'information si on respecte les conditions du théorème d'échantillonnage. On se retrouve alors dans le cas n° 2 ; soit x est à *bande infinie* auquel cas on commet une erreur due au repliement de spectre en plus de celle due à la troncature.

Notons que, à titre d'illustration, les caractéristiques des TF des différents types de signaux sont présentés à la figure 1.1

Enfin, donnons quelques précisions sur le bourrage de zéros (*zero-padding* en anglais) qui est fréquemment utilisé lors du calcul numérique d'une TF. Cette pratique consiste à compléter les échantillons d'un signal à temps discret par une séquence de zéros. Ceci peut servir à obtenir un nombre total d'échantillons qui soit une puissance de 2 et donc permettre l'emploi d'un algorithme FFT. Pour comprendre l'effet de cette pratique, considérons le signal à temps continu $x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \delta(t - n)$ associé au signal à temps discret $\{x_n; 0 \leq n \leq N - 1\}$. Les échantillons de la TFD $\{X_k\}$ correspondent à des valeurs particulières de la TF $X(\nu)$ associée à $x(t)$. Or la TF n'est pas affectée par des valeurs nulles du signal. Par conséquent, la seule conséquence du bourrage de zéros est d'augmenter le nombre de points que la TFD « prélève » sur $X(\nu)$. Ceci peut permettre de résoudre les ambiguïtés que peut présenter une TF échantillonnée de manière trop lâche. Par contre, cette pratique ne permet en rien d'améliorer la « résolution » de la TF ni de résoudre les difficultés exposées ci-dessus. Une illustration de l'effet du bourrage de zéros est présentée à la figure 1.2.

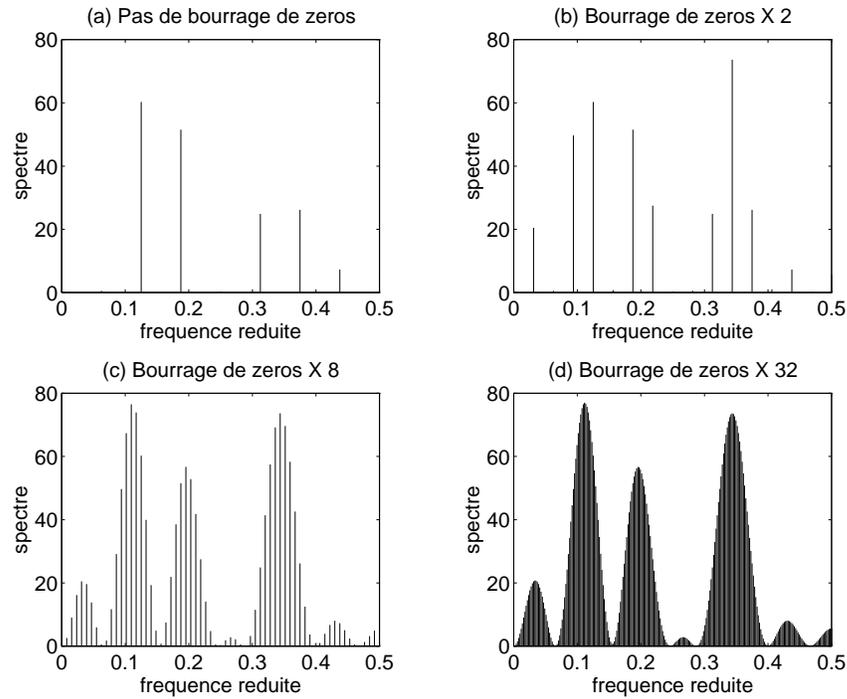


FIGURE 1.2 – Effet du bourrage de zéros. Le signal à temps discret comportait trois fréquences pures, et 16 échantillons étaient disponibles. (a) TFD du signal sans bourrage de zéros. Il y a ambiguïté sur le nombre de fréquences présentes dans le signal (deux, trois ou quatre ?) en raison de l'échantillonnage trop lâche du spectre. (b) le doublement de la taille du signal par bourrage de zéros permet de résoudre l'ambiguïté. (c) Avec un facteur multiplicatif de 8 sur la taille, le spectre discret est proche du spectre continu. (d) Le bourrage de zéros supplémentaires (ici, un facteur de 32) n'apporte peu d'informations supplémentaires sur l'allure du spectre. Soulignons que le bourrage ne se traduit par aucun gain en résolution : entre les figures (a) et (d), la largeur des pics n'a pas varié. Par contre, la finesse du pas d'échantillonnage du spectre continu a augmenté.

Chapitre 2

Filtrage linéaire

2.1 Introduction

On appelle filtre tout opérateur qui transforme un signal, dit signal d'entrée x , en un autre signal, dit signal de sortie y . Une représentation schématique d'un filtre quelconque est donnée à la figure 2.1. Les filtres tiennent une grande place en génie biomédical car ils permettent de réaliser deux types d'opérations :

- des opérations de *modélisation*. Le filtre est utilisé comme une représentation mathématique de phénomènes dans lesquels des signaux biologiques subissent une transformation. Ainsi, on peut modéliser par des filtres les transformations subies par un signal de potentiel électrique entre le lieu où se produit le phénomène (par exemple, les fibres conductrices à l'intérieur du cœur) et celui où s'effectue la mesure (par exemple, les électrodes employées pour mesurer un électro-cardiogramme). On peut également représenter par des filtres les modifications subies par une onde de pression entre son site d'émission (par exemple, l'intérieur du ventricule) et la position du capteur (par exemple, l'intérieur d'une artère) ;
- des opérations de *traitement*. Lorsqu'on désire apporter des modifications à un signal, par exemple pour en extraire certaines caractéristiques ou en supprimer certaines composantes, on réalise par définition un filtrage. Ce type d'opération est particulièrement fréquent en analyse de signaux biomédicaux et en instrumentation.

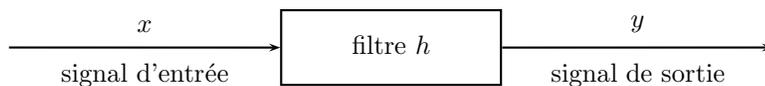


FIGURE 2.1 – Représentation schématique d'un filtre. Le filtre h représente tout opérateur transformant le signal d'entrée x en un signal de sortie, désigné par y .

Ces quelques exemples soulignent l'importance pratique des filtres et l'intérêt d'en étudier les propriétés. Bien entendu, une telle étude ne peut se faire qu'en se fixant un cadre précis. Dans ce chapitre, on se limite au cas des filtres *linéaires* et *invariants* qui conviennent dans la grande majorité des applications. De plus, on se restreint aux signaux et aux filtres à temps discret, qui correspondent aux traitements effectués à l'aide d'ordinateurs. Comme précédemment, on suppose par convention que la période d'échantillonnage des signaux est égale à 1. Pour retrouver les unités réelles, il suffit donc d'appliquer un coefficient multiplicateur de T sur l'axe temporel et de $1/T$ sur l'axe fréquentiel, où T désigne la *vraie* valeur de la période d'échantillonnage.

2.2 Filtres linéaires invariants

2.2.1 Définitions et caractérisation

Un filtre linéaire invariant peut être défini comme :

1. un système *linéaire* (c'est-à-dire satisfaisant le principe de superposition) et dont les caractéristiques sont *indépendantes du temps*;
2. un système dont la relation entrée-sortie est un *produit de convolution*;
3. un système dont les *fonctions propres* sont les *exponentielles* (ce qui inclut les exponentielles complexes).

On peut montrer que les trois définitions ci-dessus sont équivalentes, l'une d'entre elles entraînant toujours les deux autres. Mais surtout, ces définitions impliquent qu'un filtre¹ est entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* (RI), qui est le signal de sortie du filtre lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac. On désigne traditionnellement par $h = \{h(n); n \in \mathbb{Z}\}$ la RI d'un filtre. $h(n)$ étant un signal, il peut être représenté de manière équivalente par sa transformée en z ou par sa TF. On a ainsi trois représentations équivalentes d'un filtre :

- la RI $h(n)$, réponse du filtre à une impulsion de Dirac ;
- la *fonction de transfert* (FT) $H(z)$, transformée en z de la RI ;
- la *réponse fréquentielle* (RF) $H(\nu)$, transformée de Fourier de la RI.

Soulignons l'abus de notation par lequel nous désignons par le même symbole la transformée en z et la TF de la RI. Le contexte permettra de lever l'ambiguïté. Insistons aussi sur le fait que $H(\nu)$, comme TF d'un signal à temps discret, est périodique et définie pour des valeurs *continues* de ν (voir figure 1.1).

Les filtres sont fréquemment utilisés pour transformer les signaux en atténuant fortement certaines fréquences qui sont indésirables ou qui correspondent à des perturbation. Ainsi, il est nécessaire de supprimer les hautes fréquences dans un signal avant de l'échantillonner, afin de se trouver dans les conditions d'application du théorème d'échantillonnage. De même, on est souvent amené à supprimer des fréquences voisines de 50 ou 60 Hz qui correspondent à des

1. Dorénavant, le terme de filtre désignera un filtre linéaire invariant.

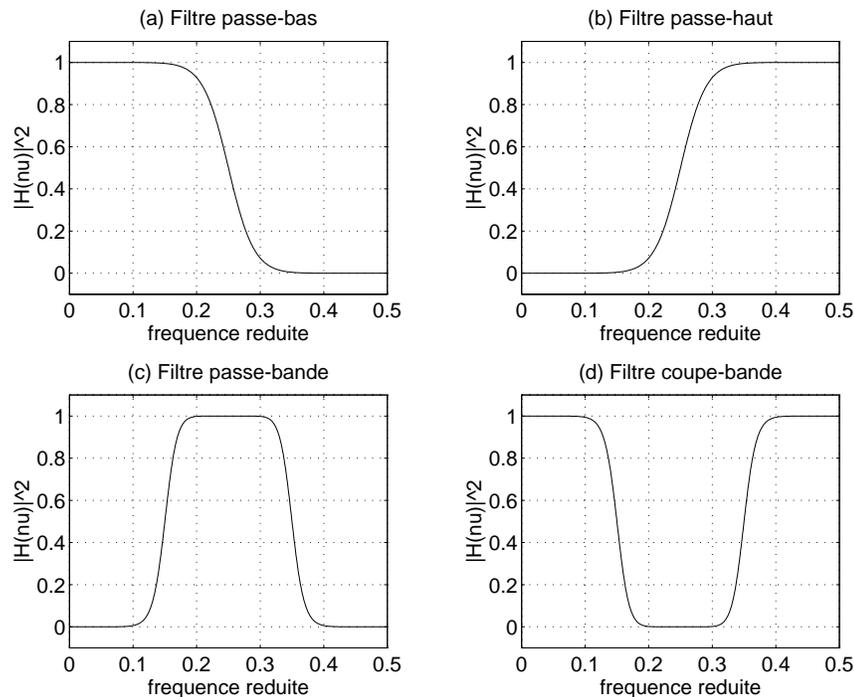


FIGURE 2.2 – Carré du module de la réponse fréquentielle de quatre types classiques de filtres. (a) Filtre passe-bas. (b) Filtre passe-haut. (c) Filtre passe-bande. (d) Filtre coupe-bande.

interférences avec le courant d'alimentation des appareils. Pour les traitements de ce genre, on utilise généralement quatre grand types de filtres :

- les filtres *passe-bas* qui atténuent fortement les hautes fréquences sans affecter fortement les basses fréquences ;
- les filtres *passe-haut* qui atténuent les basses fréquences et affectent peu les hautes fréquences ;
- les filtres *passe-bande* qui atténuent les basses et les hautes fréquences en laissant un intervalle de fréquence sans grand changement ;
- les filtres *coupe-bande* qui suppriment un intervalle de fréquence sans trop altérer les hautes et les basses fréquences.

Dans la pratique, la RF d'un filtre permet de déterminer son type de manière simple, ce qui explique que cette représentation soit très fréquemment utilisée. La figure 2.2 présente une RF typique pour chacun des quatre types de filtres mentionnés ci-dessus. La RF permet également de bien représenter la notion de *bande passante* du filtre, définie comme l'intervalle de fréquence dans lequel le signal d'entrée n'est pas atténué. Soulignons que bien souvent, on ne représente que le module ou le carré du module de la RF, ce qui suffit pour caractériser

grossièrement le type du filtre, mais n'en permet pas une analyse complète. Ce point sera illustré à la section 2.5.

Indiquons enfin que les trois représentations équivalentes d'un filtre fournissent plusieurs possibilités pour en calculer la sortie y lorsqu'on en connaît l'entrée x . On peut soit calculer le produit de convolution $y = h * x$ dans le domaine temporel, soit passer dans le domaine fréquentiel et utiliser l'expression $Y(\nu) = H(\nu)X(\nu)$, soit enfin se placer dans le domaine des z et écrire $Y(z) = H(z)X(z)$. En théorie, les trois expressions sont équivalentes. En pratique, la transformée de Fourier est très fréquemment utilisée en raison du faible coût de calcul des algorithmes FFT. Il faut néanmoins rappeler que chaque expression a des avantages et des inconvénients (possibilité de traitement récursif des données par exemple) et qu'un changement de domaine s'accompagne souvent d'erreurs numériques ou autres. Une méthode de calcul de la sortie d'un filtre doit donc être choisie en fonction des caractéristiques spécifiques de l'application.

2.2.2 Propriétés

Les deux plus importantes propriétés des filtres sont la *causalité* et la *stabilité*, que l'on définit de la manière suivante :

- un filtre est causal si sa RI satisfait la condition :

$$\forall n < 0, h(n) = 0.$$

La causalité traduit le fait que l'effet d'un phénomène ne peut précéder sa cause ou, en termes de signaux, qu'un échantillon x_n de l'entrée n'affectera pas les échantillons y_m de la sortie tels que $m < n$;

- un filtre est stable² si toute entrée bornée produit une sortie bornée. On montre que ceci équivaut à la condition suivante sur la RI du filtre :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h(n)| < \infty.$$

L'importance de la notion causalité dépend beaucoup du contexte dans lequel on se place. S'il s'agit de traiter des signaux en temps réel et au fur et à mesure de l'arrivée des données, la causalité est une condition essentielle pour pouvoir réaliser physiquement un filtre. Si par contre on traite les données globalement en temps différé, la causalité des filtres utilisés n'a que peu d'importance. Dans ce cas, on utilise fréquemment des filtres non causaux tels que, par exemple, des fenêtres de pondération $h(n)$ symétriques par rapport à $n = 0$.

Quel que soit le contexte de travail, on exigera toujours qu'un filtre soit stable, car cette propriété est nécessaire pour que la sortie du filtre ne diverge pas lorsqu'une entrée bornée lui est appliquée. La figure 2.3 illustre le phénomène de divergence d'un filtre instable.

2. On donne ici la définition de la stabilité au sens strict, ou stabilité BIBO (pour *bounded input bounded output*). Il existe d'autres définitions de la stabilité qui n'ont que peu d'intérêt dans le cadre de ce cours.

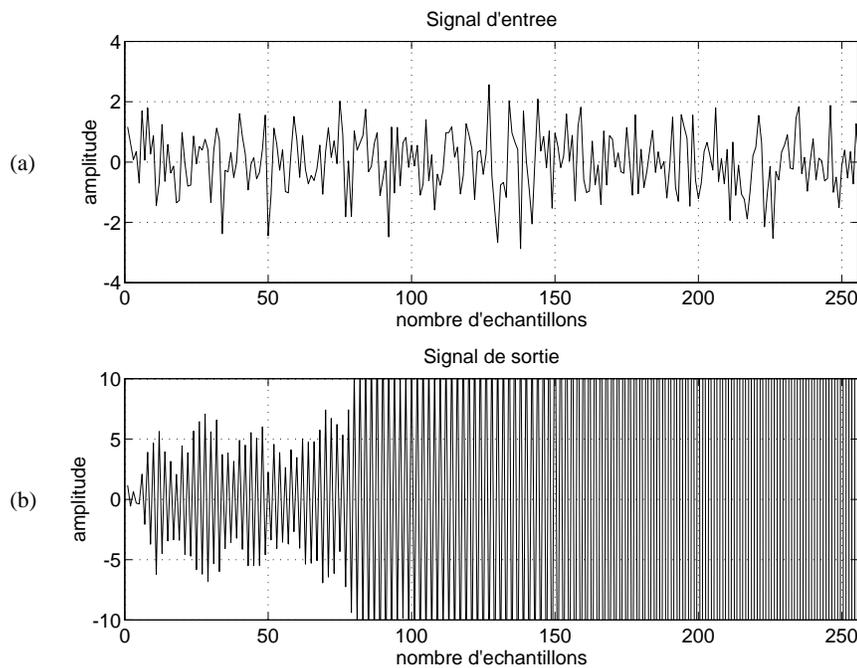


FIGURE 2.3 – Divergence d’un filtre instable. (a) Le signal d’entrée est un bruit blanc gaussien de type « bruit thermique ». (b) L’amplitude du signal de sortie du filtre instable croît très vite, et finit par dépasser les limites physiques du système.

2.3 Filtres dynamiques

Dans de nombreuses applications, la relation entrée-sortie d’un filtre apparaît sous la forme d’une équation aux différences, qui est l’équivalent en temps discret d’une équation différentielle en temps continu, et qui peut s’écrire :

$$\sum_{p=0}^P a_p y_{n-p} = \sum_{q=0}^Q b_q x_{n-q}, \quad (2.1)$$

où $\{y_n\}$ et $\{x_n\}$ représentent respectivement la sortie et l’entrée du filtre. On remarque que y_n s’exprimant en fonction des valeurs de la *sortie* aux instants précédents, les équations aux différences comportent une partie *récurrente*; ceci représente souvent un avantage pour la mise en œuvre. Dans cette section nous donnons les principales caractéristiques des filtres définis par une relation du type de (2.1).

2.3.1 Définitions

Filtres rationnels

On appelle filtre rationnel tout filtre dont la relation entrée-sortie est régie par une équation de la forme (2.1). En prenant la transformée en z des deux membres de cette équation, on obtient :

$$Y(z) \sum_{p=0}^P a_p z^{-p} = X(z) \sum_{q=0}^Q b_q z^{-q}.$$

La fonction de transfert du filtre qui, en raison des propriétés de la transformée en z , est égale à $Y(z)/X(z)$, a donc pour expression :

$$H(z) = \frac{\sum_{q=0}^Q b_q z^{-q}}{\sum_{p=0}^P a_p z^{-p}}. \quad (2.2)$$

De manière équivalente, les filtres rationnels peuvent être définis comme ceux dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle en z .

Pôles et zéros

D'après la remarque précédente, $H(z)$ prend la forme d'un quotient de deux polynômes en z . On dit que $H(z)$ est sous forme *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur de $H(z)$ n'ont aucune racine commune, c'est-à-dire lorsque toutes les simplifications ont été faites sur cette fraction rationnelle. On appelle pôles (respectivement zéros) d'un filtre rationnel les racines complexes du dénominateur (respectivement du numérateur) de sa fonction de transfert *mise sous forme irréductible*.

Filtres dynamiques

On appelle filtre dynamique tout filtre rationnel à la fois causal et stable. Les filtres dynamiques sont des filtres rationnels pour lesquels on n'observera pas (en théorie) de divergence de la sortie pourvu que l'entrée reste bornée, et qui permettront un traitement « en ligne » et récurrent des données. Ils présentent des caractéristiques très intéressantes dans la pratique.

2.3.2 Propriétés

Caractérisation des filtres dynamiques

On peut montrer que pour qu'un filtre rationnel soit causal et stable, il faut et il suffit que tous ses pôles soient de module strictement inférieur à 1. Après avoir mis (2.2) sous la forme irréductible du quotient de deux polynômes en z (et non plus en z^{-1}), la simple recherche des racines complexes du dénominateur permet donc de s'assurer que le filtre étudié est un filtre dynamique.

Types de filtres dynamiques

Si, dans l'expression de $H(z)$ donnée en (2.2), le dénominateur est tel que $P = 0$, la relation entrée-sortie peut se mettre sous la forme :

$$y(n) = \sum_{q=0}^Q b_q x_{n-q},$$

ce qui montre que la RI du filtre ne comporte que $Q+1$ valeurs non nulles $\{b_q; 0 \leq q \leq Q\}$. C'est la raison pour laquelle de tels filtres sont appelés filtres à *réponse impulsionnelle finie* (RIF). On remarquera que les filtres RIF ne comportent pas de partie récurrente. Ils sont donc toujours stables.

Si $P \neq 0$, alors la RI du filtre comporte en général un nombre infini de valeurs non nulles. On désigne de tels filtres par le terme de filtres à *réponse impulsionnelle infinie* (RII). Les filtres de ce type comportent toujours une partie récurrente, et donc des pôles. Il faut donc prendre garde aux questions de stabilité.

Un cas particulier intéressant de filtre RII se produit lorsque $Q = 0$. L'équation entrée sortie a pour expression :

$$y_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{p=1}^P a_p y_{n-p} + \frac{b_0}{a_0} x_n,$$

et la fonction de transfert prend la forme :

$$H(z) = \frac{b_0}{\sum_{p=0}^P a_p z^{-p}} = b_0 \frac{z^P}{\sum_{p=0}^P a_{P-p} z^p}.$$

les filtres sont appelés *filtres tous pôles* (FTP). Étant un cas particulier de filtres RII, ils peuvent aussi présenter des problèmes de stabilité. Les FTP sont très utilisés dans la pratique car la part prépondérante de leur partie récurrente leur confère des propriétés particulières que nous n'examinerons pas ici.

Enfin, mentionnons que, outre les instabilités liées à la position des pôles, des instabilités d'origine numérique peuvent se produire lors de la mise en œuvre des filtres RII. En effet, le calcul récurrent de la sortie peut s'accompagner d'une accumulation d'erreurs d'arrondi qui fait diverger le filtre. C'est pourquoi, dans certaines applications, il est intéressant mettre en œuvre le filtre avec des coefficients entiers. Les filtres RIF ne posent évidemment pas ce genre de problème puisqu'ils ne comportent pas de partie récurrente.

2.4 Exemples

On donne dans cette section deux exemples de filtres simples, afin d'illustrer certaines caractéristiques des types de filtres définis précédemment et d'introduire quelques notions importantes pour la synthèse de filtres.

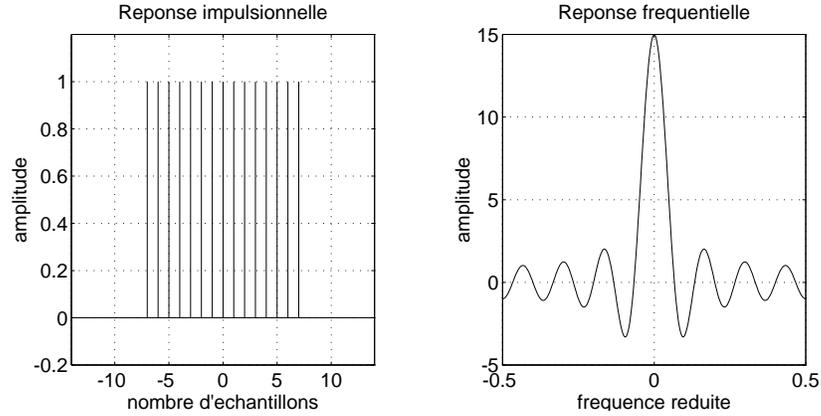


FIGURE 2.4 – Réponse impulsionnelle et réponse fréquentielle d’une fenêtre rectangulaire. La réponse fréquentielle indique un comportement passe-bas de ce filtre.

2.4.1 Fenêtre rectangulaire

Ce filtre est couramment utilisé pour opérer un lissage, ce qui permet d’éliminer certaines formes de bruit dans un signal. La relation entrée-sortie est définie par :

$$y_n = \sum_{p=-P}^P x_{n-p}.$$

Il s’agit donc d’un filtre RIF dont la RI est donnée par :

$$\begin{cases} h(p) = 1 & \text{si } -P \leq p \leq P, \\ h(p) = 0 & \text{si } p \notin [-P, P]. \end{cases}$$

En prenant la transformée de Fourier de la RI et à l’aide de quelques manipulations algébriques, on montre que la réponse fréquentielle du filtre a pour expression :

$$H(\nu) = \frac{\sin((2P+1)\pi\nu)}{\sin \pi\nu}.$$

À titre d’illustration la RI du filtre et sa RF (qui est toujours réelle) sont représentées à la figure 2.4, pour une valeur de P égale à 7. L’allure de la RF indique que le comportement du filtre est passe-bas.

Le filtre tel qu’il a été défini jusqu’à présent est stable (comme tout filtre RIF), mais n’est évidemment pas causal. Pour le rendre causal si l’application le requiert, on introduit un *retard* de P échantillons et la relation entrée-sortie devient :

$$y_n = \sum_{p=0}^{2P} x_{n-p}.$$

On peut maintenant calculer la sortie en temps réel. Cependant, un tel calcul implique $2P + 1$ échantillons de l'entrée. Il est possible de réduire ce nombre en mettant la relation entrée-sortie sous forme récurrente; en effet, en calculant la différence entre y_{n+1} et y_n à partir de l'équation précédente, on obtient immédiatement :

$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1} - x_{n-2P}.$$

Ainsi, on peut calculer la sortie du filtre de manière récurrente, et le calcul ne porte que sur trois échantillons des signaux quelle que soit la taille de la fenêtre. Cette forme est donc plus économique à mettre en œuvre que la forme non récurrente. De plus, les coefficients du filtre sont entiers, ce qui permet d'éviter de possibles instabilités numériques. Enfin, insistons sur le fait qu'il est très rare de pouvoir transformer une équation entrée-sortie non récurrente en une équation entrée-sortie récurrente; l'exemple que nous venons de présenter doit donc être interprété comme une exception plus que comme une règle.

2.4.2 Filtre tous pôles du premier ordre

On appelle filtre tous pôles du premier ordre un FTP qui comporte un seul pôle. Il s'agit donc du plus simple des FTP. Son étude est d'autant plus justifiée que les FTP du premier ordre peuvent être vus comme la « brique de base » qui permettra de construire des filtres plus complexes qui sont très largement utilisés pour le traitement des signaux biomédicaux.

En se référant à la définition des FTP et en limitant le nombre de pôles à 1, on voit immédiatement que la relation entrée-sortie d'un FTP du premier ordre est donnée par :

$$y_n = -\frac{a_1}{a_0} y_{n-1} + \frac{b_0}{a_0} x_n$$

ce qui, en posant $a = -a_1/a_0$ et $b = b_0/a_0$, s'écrit encore :

$$y_n = a y_{n-1} + b x_n.$$

Par conséquent, la fonction de transfert du filtre a pour expression :

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}.$$

Ceci montre que le pôle du filtre est égal à a . On en déduit que, pour que le filtre soit stable, il est nécessaire et suffisant que $|a| < 1$.

Nous nous intéressons maintenant à certaines caractéristiques spectrales de ce filtre. Pour cela, nous calculons sa RF qui se déduit immédiatement de la fonction de transfert. On a donc :

$$H(\nu) = \frac{b}{1 - ae^{-2i\pi\nu}}.$$

$H(\nu)$ est donc à valeurs complexes. Dans ce qui suit, nous nous limitons à l'étude du carré du module de la RF, ou spectre du filtre. D'après l'équation précédente,

celui-ci prend la forme :

$$|H(\nu)|^2 = \frac{b^2}{1 - 2a \cos(2\pi\nu) + a^2}. \quad (2.3)$$

Il est intéressant pour la suite d'obtenir une expression approchée du spectre. Pour cela, on effectue un développement limité du cosinus qui apparaît dans (2.3), puis on se place dans un repère « log-log ». On a :

$$|H(\nu)|^2 \approx \frac{b^2}{1 + a^2 - 2a(1 - 4\pi^2\nu^2/2)}.$$

Lorsque ν tend vers 0, le terme en ν^2 devient négligeable. On a donc :

$$|H(\nu)|^2 \approx \frac{b^2}{1 + a^2 - 2a} = \frac{b^2}{(1 - a)^2},$$

ce qui s'écrit encore :

$$\ln |H(\nu)|^2 \approx 2 \ln b - 2 \ln(1 - a).$$

Ceci montre que lorsque ν tend vers 0 ou, de manière équivalente, lorsque $\ln \nu$ tend vers $-\infty$, $\ln |H(\nu)|^2$ a pour asymptote la droite horizontale d'ordonnée $2 \ln b - 2 \ln(1 - a)$.

Lorsque ν se rapproche de $1/2$, c'est le terme en ν^2 qui devient prépondérant dans le dénominateur. On a donc :

$$|H(\nu)|^2 \approx \frac{b^2}{a4\pi^2\nu^2} \iff \ln |H(\nu)|^2 \approx 2 \ln b - \ln a - 2 \ln(2\pi\nu),$$

ce qui indique que, en échelles logarithmiques, $|H(\nu)|^2$ a pour asymptote la droite de pente -2 dont forme exacte apparaît dans l'équation précédente. Le spectre d'un FTP d'ordre un et ses asymptotes sont représentées à la figure 2.5. L'allure du spectre indique clairement que le FTP du premier ordre est un filtre passe-bas. On observe que les asymptotes approchent assez fidèlement le spectre. C'est la raison pour laquelle, dans la pratique, on se contente souvent de l'approximation du spectre par ses asymptotes. Celles-ci se croisent pour une valeur ν_c de la fréquence telle que :

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - a}{\sqrt{a}}.$$

Cette fréquence est appelée *fréquence de coupure* du filtre. Elle correspond approximativement à la fréquence au delà de laquelle l'atténuation devient importante.

Considérons maintenant un nouveau filtre constitué de deux FTP du premier ordre identiques mis en cascade. La RI du filtre résultant va être le produit de convolution des filtres élémentaires et, par conséquent, la RF du filtre résultant va être le carré de celle d'un filtre élémentaire. En échelles logarithmiques, le

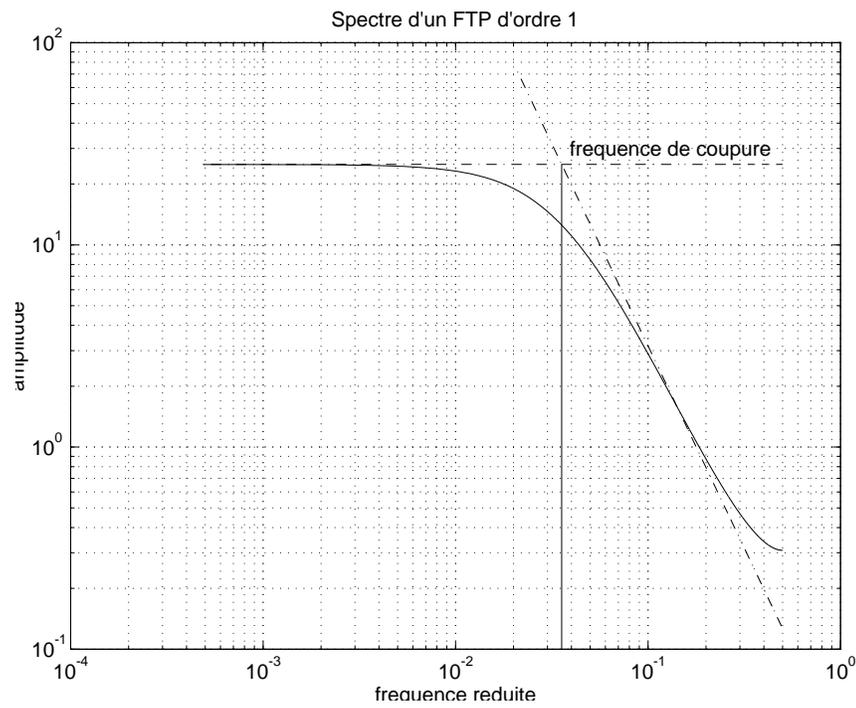


FIGURE 2.5 – Spectre d'un filtre tous pôles du premier ordre, de paramètres $a = 0.8$ et $b = 1$, représenté en échelles logarithmiques. Les asymptotes sont représentées en traits mixtes. L'allure du spectre indique que le filtre est passe-bas. Les asymptotes restent proches du spectre exact. L'intersection des deux asymptotes donne la fréquence de coupure du filtre.

spectre du filtre résultant va être le double de celui d'un filtre élémentaire, ce qui montre que la fréquence de coupure ne va pas changer, mais que la pente de l'asymptote va être deux fois plus importante. Autrement dit, le filtre résultant va atténuer plus fortement les fréquences situées au delà de la fréquence de coupure. On vient ainsi de construire un FTP passe-bas du deuxième ordre (l'ordre d'un FTP est égal au nombre de ses pôles, comptés avec leur ordre de multiplicité).

On peut évidemment mettre en cascade des filtres de caractéristiques différentes les uns des autres. On pourrait par exemple associer deux FTP du premier ordre n'ayant pas la même fréquence de coupure. On obtiendrait ainsi une atténuation modérée entre les deux fréquences de coupure et une atténuation plus forte au delà de la seconde fréquence de coupure. On peut aussi utiliser des filtres élémentaires dont la fonction de transfert est l'inverse de celle d'un FTP d'ordre 1. En représentation log-log, le spectre de ce filtre élémentaire est l'opposé de celui d'un FTP du premier ordre, et l'on a donc affaire à un filtre passe-haut. En associant des filtres passe-bas et des filtres passe-haut, on peut alors obtenir des filtres passe-bande et coupe-bande. Pour une étude rapide des caractéristiques de filtres résultant de telles associations, les diagrammes asymptotiques sont d'une grande utilité. On peut ainsi concevoir des filtres dont le spectre sera proche d'un gabarit défini à l'avance en fonction du traitement à effectuer. On aborde ainsi le domaine de la synthèse des filtres sur lequel la section suivante donne quelques précisions.

2.5 Synthèse de filtres

2.5.1 Présentation du problème

Dans de nombreuses situations, les caractéristiques de systèmes de traitement sont spécifiées dans le domaine spectral. C'est par exemple le cas des filtres anti-repliement employés lors de l'échantillonnage de signaux, des filtres utilisés pour rejeter des bandes de fréquences précises (interférence avec le courant d'alimentation) ou en isoler d'autres (modulation). Bien souvent, une grande partie des spécifications porte sur le module de la RF du filtre étudié. Or, la phase de la RF peut avoir une influence considérable sur le comportement du filtre. Ce point est illustré à la figure 2.6. Le filtre présenté a une RF dont le module est constant et égal à 1. Pourtant, les distorsions qu'il provoque sur le signal d'entrée sont considérables. Celles-ci sont la conséquence de la phase, particulièrement chaotique, de ce filtre.

L'exemple de la figure 2.6 est évidemment extrême. Dans la pratique, une variation douce de la phase de la RF se traduit par le phénomène de « rebond » asymétrique de la sortie du filtre dont un exemple est donné à la figure 2.7. Il est parfois utile de rétablir la symétrie de ces rebonds, donc celle de la RI. La TF d'une fonction symétrique étant réelle, on en déduit que dans ce cas, la phase de la RF du filtre est nulle. C'est la raison tels filtres sont appelés *filtres à phase nulle*. Ceux-ci présentent l'inconvénient de ne pas être causaux, mais l'on

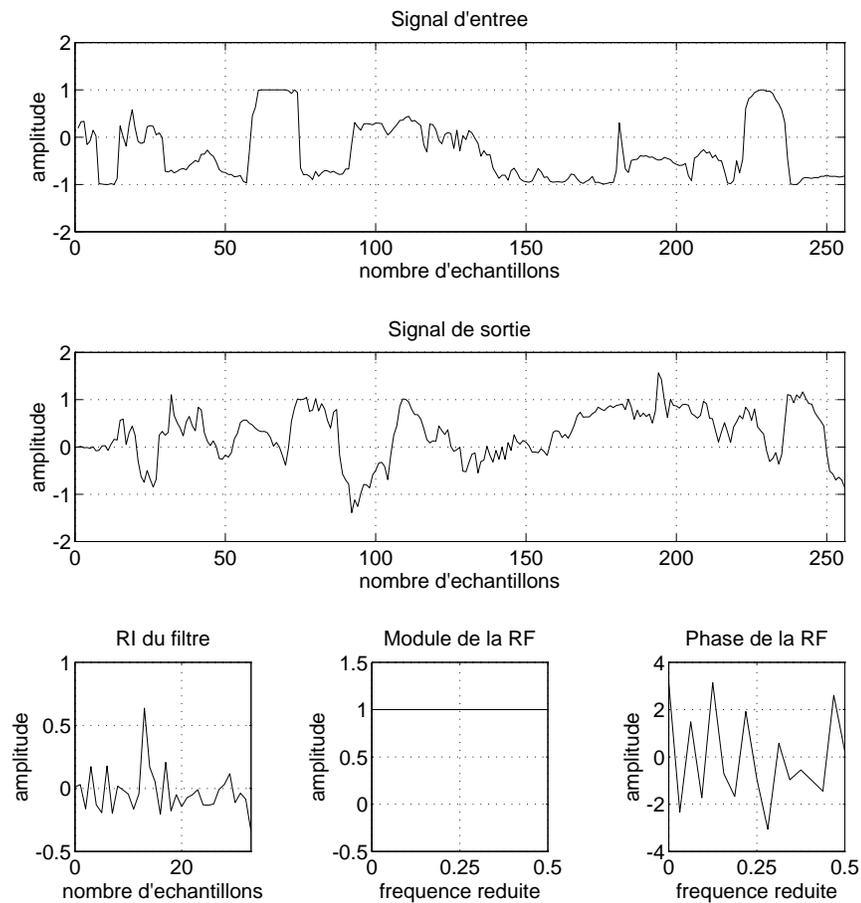


FIGURE 2.6 – Exemple de filtre passe-tout déphaseur. Bien que le module de la RF de ce filtre soit constant et égal à 1, on observe de grandes différences entre l'entrée et la sortie. Ceci est dû aux fortes variations de la phase de la RF. La RI du filtre est d'ailleurs très différente d'une simple impulsion. Néanmoins, les signaux d'entrée et de sortie ont le même contenu spectral.

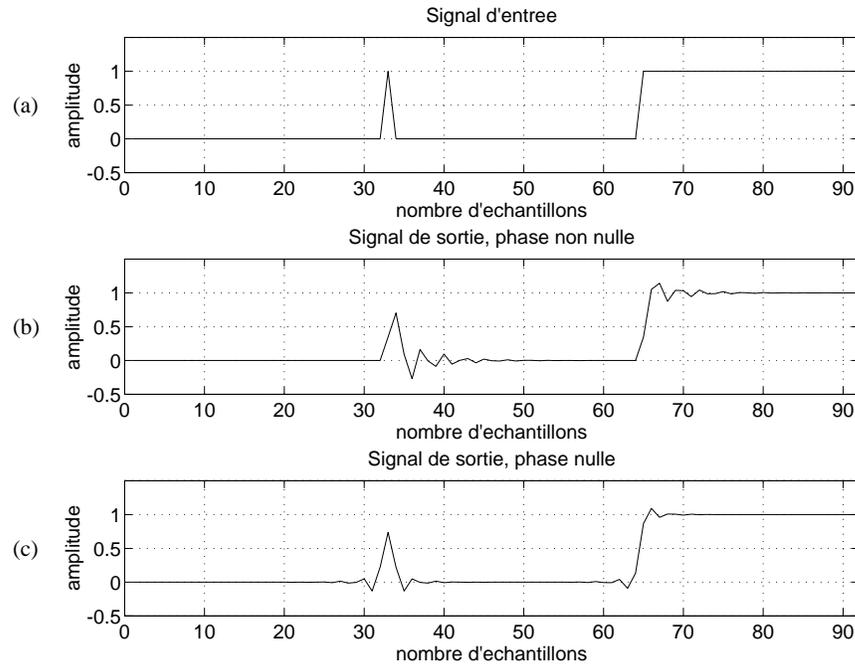


FIGURE 2.7 – Phénomène de rebond dans le domaine temporel. (a) Signal d'entrée. (b) Signal de sortie pour un filtre passe bas d'ordre 4 de fréquence de coupure réduite égale à 0.375. On observe de nombreuses oscillations asymétriques par rapport à l'impulsion et au créneau. (c) Signal de sortie pour un filtre de mêmes caractéristiques à phase nulle. Les oscillations sont symétriques par rapport à l'impulsion et au créneau. En contrepartie, ce filtre n'est pas causal.

peut facilement contourner la difficulté en introduisant un retard. Cela change la phase du filtre, qui devient alors linéaire. La figure 2.7 présente également un exemple de filtrage par un filtre à phase linéaire.

Finalement, lorsque l'on doit concevoir des filtres présentant un minimum de complexité, on doit bien souvent tenir compte de contraintes dans le domaine spectral (gabarit à respecter pour le module de la RF, amplitude des rebonds du spectre au voisinage des fréquences de coupure, possible contrainte de linéarité de la phase), mais aussi dans le domaine temporel (amplitude des rebonds). On se trouve alors face à un problème d'optimisation non linéaire pour lequel il n'existe pas de solution universelle. Par contre, il existe un certain nombre de filtres « classiques » dont les caractéristiques générales sont bien connues et pour lesquels on dispose d'outils de conception analytiques ou numériques. Nous donnons ci-après les caractéristiques majeures de quelques-uns de ces types de filtres.

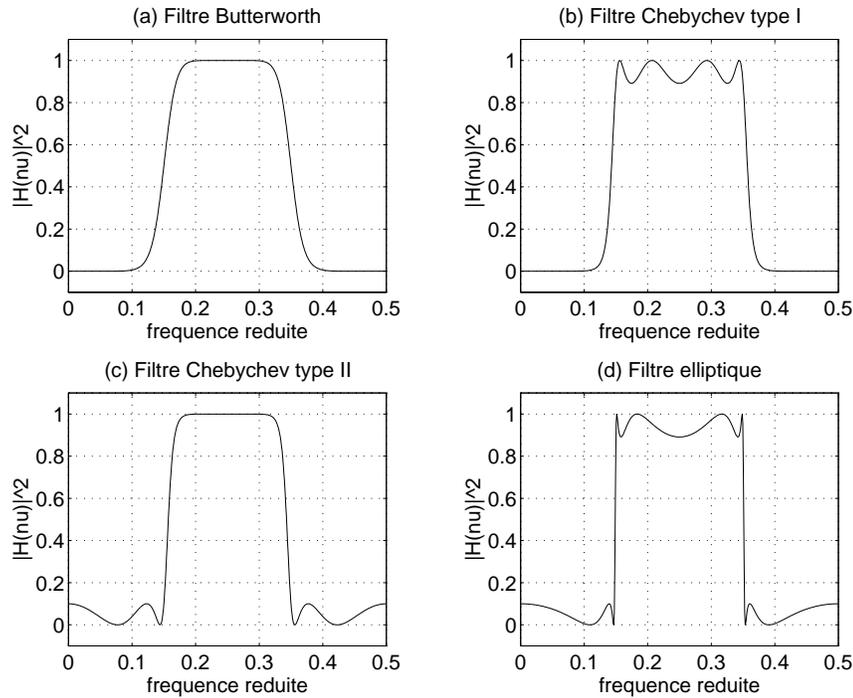


FIGURE 2.8 – Spectre d’un filtre passe-bande pour les types classiques de filtres. Les fréquences de coupure réduites étaient fixées à 0.125 et 0.375. (a) Filtre Butterworth du d’ordre 8. (b) et (c) Filtres de Chebychev d’ordre 8 de type I et II respectivement. (d) Filtre elliptique d’ordre 8.

2.5.2 Types classiques de filtres

De nombreux outils logiciels sont disponibles pour la conception des filtres présentés ci-après, soit sous forme de produits spécifiques, soit comme partie de logiciels plus complets tels que MATLAB. Les types de filtres dont nous donnons ci-après les principales caractéristiques permettent, dans leur forme la plus simple, de construire des filtres passe-bas ; cependant, par inversion de leur fonction de transfert et association de plusieurs filtres, on peut synthétiser des filtres passe-haut, passe-bande et coupe bande. Selon le type de choisi, on obtient divers compromis entre plusieurs facteurs affectant le module de la RF. Ces facteurs sont l’amplitude des oscillations dans les parties passe-bande et coupe-bande ainsi que la raideur du module de la RF au voisinage de la (ou des) fréquence(s) de coupure. Aucune contrainte n’est introduite sur la phase de la RF ni sur l’amplitude des rebonds dans le domaine temporel. À titre d’illustration, la figure (2.8) donne, pour chacun des types étudiés, le spectre d’un filtre passe-bande d’ordre 8 dont les fréquences de coupure sont égales à 0.125 et 0.375.

Filtres de Butterworth

Les filtres de butterworth présentent un spectre monotone (c'est-à-dire sans oscillations) dans les parties passe-bande et coupe-bande de la RF. En contrepartie, la pente du spectre au voisinage de la fréquence de coupure est moins forte que pour les autres types de filtres. Un des avantages de ce type de filtres est que l'on peut établir la forme analytique de la fonction de transfert en fonction des caractéristiques désirées. On évite ainsi d'avoir recours à des méthodes numériques d'optimisation.

Filtres de Chebychev de type I et II

Les filtres de Chebychev présentent des oscillations *d'amplitude uniforme* dans les parties passe-bande (type I) et coupe-bande (type II). Dans l'autre bande, le spectre est monotone. L'amplitude des oscillations fait partie des paramètres de conception du filtre. La pente du spectre au voisinage de la fréquence de coupure est plus élevée que pour les filtres de Butterworth de même ordre.

Filtres elliptiques

Les filtres elliptiques présentent des oscillations d'amplitude uniforme à la fois dans la partie passe-bande du spectre. Ici aussi, l'amplitude des oscillations fait partie des paramètres de conception du filtre. La pente du spectre au voisinage de la fréquence de coupure est plus élevée que pour les autres types de filtres, à ordre donné. En contrepartie, le problème d'optimisation permettant de déterminer les coefficients de la fonction de transfert présente une grande complexité; la synthèse d'un filtre de ce type requiert donc généralement un volume de calcul élevé.

Chapitre 3

Signal aléatoire

3.1 Introduction

Lorsque l'on étudie des phénomènes physiques ou biologiques, les observations ou mesures que l'on effectue sont toujours entachées d'incertitudes. Lorsque l'utilisation qui est faite des observations est peu sensible aux incertitudes, ces dernières peuvent être négligées. Mais, dans la plupart des cas, il est utile d'en tenir compte, ne serait-ce que pour évaluer précisément la manière dont elles se propagent dans une chaîne de traitement et affectent le résultat final. Mais comment tenir compte de quantités incertaines, donc présentant un caractère imprévisible? Une possibilité est de *modéliser* de telles incertitudes en faisant appel à la notion de phénomène aléatoire, et donc de hasard.

L'expérience montre que de telles modélisations décrivent très bien des phénomènes biologiques (par exemple, le comportement de certaines cellules nerveuses), physiques (comptes de photons en tomographie d'émission) ou autres. Par ailleurs, de telles descriptions permettent aussi d'adopter une approche systématique des problèmes d'estimation. Le but de ce chapitre est donc de présenter quelques résultats sur les signaux *aléatoires*, c'est à dire comportant des incertitudes. Les deux questions importantes auxquelles nous donnerons des éléments de réponse sont les suivantes :

1. dans quelle mesure les incertitudes affectent-elles la représentation spectrale des signaux ?
2. comment les incertitudes se propagent-elles lors des opérations de filtrage ?

Pour cela, nous nous limitons aux signaux à temps discret qui sont les plus utilisés dans la pratique. Par conséquent, la question de l'échantillonnage des signaux aléatoires à temps continu n'est pas abordée ici. De plus, la représentation spectrale de signaux aléatoires complexes posant quelques difficultés, nous nous limitons aux signaux à valeurs réelles. Enfin, comme l'étude des signaux aléatoires utilise largement le calcul des probabilités et la notion de variable aléatoire, nous rappelons ci-après quelques résultats fondamentaux sur ces questions. Il est à noter que l'introduction de toutes ces notions nécessite de faire

appel à des concepts abstraits tels que les espaces probabilisés, la théorie de la mesure, etc. Ici, on adopte un point de vue beaucoup plus concret, en omettant une bonne partie de cet arrière plan théorique. Par conséquent, quelques uns des développements ci-dessous peuvent présenter un certain flou, voire un manque de rigueur. Pour une présentation plus complète de ces notions, le lecteur est renvoyé à l'abondante littérature sur la théorie des probabilités et des processus aléatoires.

3.2 Variables aléatoires

Comme indiqué dans l'introduction, les variables aléatoires (VA) peuvent être définies de manière formelle comme des applications d'un espace probabilisé dans \mathbb{R}^N . Pour nous, elles représentent simplement une série de N mesures entachées d'incertitudes. Se pose alors la question de la caractérisation mathématique de ces incertitudes. Pour y répondre, nous allons d'abord considérer le cas d'une seule mesure scalaire (VA *scalaire*), puis d'un ensemble de mesures (VA *vectorielle* ou *vecteur aléatoire*).

3.2.1 Variables aléatoires scalaires

Dans ce qui suit, il est nécessaire d'établir une distinction entre la valeur mesurée ou l'observation effectuée d'une part, et le modèle des incertitudes ayant conduit à l'observation ou à la mesure d'autre part. Ici, le modèle, donc la VA, est désigné par une majuscule et la valeur effectivement observée par la minuscule correspondante. On dira par exemple que la VA X a conduit à l'observation x , ou a pris la valeur x .

Considérons le cas où un observateur effectue une mesure scalaire (par exemple, la mesure d'un angle de Cobb, du rythme cardiaque, de la concentration sanguine de telle ou telle substance). Cet observateur est bien souvent capable de préciser un domaine pour des valeurs vraisemblables de sa mesure, un domaine pour des valeurs plus improbables et un autre correspondant à des valeurs pratiquement interdites (en raison de la nature du phénomène observé, des limitations du système de mesure, etc.). Pour illustrer cela, il pourrait tracer une courbe dont l'axe des abscisses représente la valeur de la mesure et l'axe des ordonnées les chances pour qu'elle se produise. Un exemple en est donné à la figure 3.1 : cette courbe donne l'indication intuitive que les mesures vont certainement se situer soit entre -8 et 3 , soit entre 4 et 6 avec de plus grandes chances vers le milieu de ces intervalles qu'en leurs extrémités. Les valeurs mesurées n'ont pratiquement aucune chance d'être en dehors de ces deux intervalles.

Cette idée intuitive conduit aux notions de fonction de répartition et de densité de probabilité d'une VA, qui permettent d'en caractériser le comportement. La fonction de répartition $F_X(x)$ d'une VA X est définie comme la probabilité que X prenne une valeur inférieure ou égale à x :

$$F_X(x) \triangleq P(X \leq x).$$

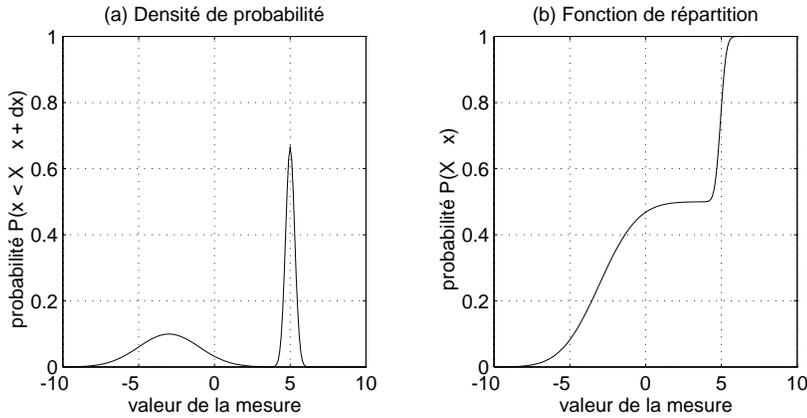


FIGURE 3.1 – Exemple de densité de probabilité et de fonction de répartition. La densité de probabilité $f_X(x)$ permet de caractériser intuitivement les valeurs probables ou non de la mesure x . La fonction de répartition $F_X(x)$ se définit comme la probabilité pour que la mesure prenne une valeur inférieure ou égale à x . La densité de probabilité est donc la dérivée de la fonction de répartition.

Si X prend des valeurs continues, on en déduit immédiatement que

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1). \quad (3.1)$$

Supposons de plus que F_X est continûment dérivable, et posons $f_x \triangleq F'_X$. Par définition :

$$f_X(x)dx = dF_X(x) \approx F_X(x + dx) - F_X(x),$$

et d'après (3.1), on a :

$$f_X(x)dx \approx P(x < X \leq x + dx). \quad (3.2)$$

La fonction f_X , que l'on désigne par le terme de *densité de probabilité*, représente, au facteur multiplicatif dx près, la probabilité pour que X prenne une valeur proche de x . Elle correspond donc à la courbe tracée intuitivement par l'observateur pour définir les valeurs plus ou moins vraisemblables de ses mesures. De par sa définition, une densité vérifie certaines propriétés importantes. En particulier, d'après (3.2) :

$$\forall x, f_X(x) \geq 0,$$

car une probabilité est toujours positive. D'autre part, d'après la définition de f_X :

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx,$$

d'où, en utilisant (3.1) :

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx = P(x_1 < X \leq x_2).$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1,$$

car $P(-\infty < X \leq +\infty)$ correspond à l'évènement certain. Une densité de probabilité est donc une fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs positives et d'intégrale égale à 1.

Le comportement des VA à valeurs continues est complètement caractérisé par leur densité de probabilité pour peu que la fonction de répartition soit continûment dérivable, ce que nous supposons vérifié. Cependant, une mesure peut parfois ne prendre que des valeurs discrètes, en nombre fini ou infini. Soit $\{x_i; i \in \mathcal{I}\}$ l'ensemble de ces valeurs possibles. La chance pour que la mesure x_i se produise est alors simplement définie par la probabilité $p_i = P(X = x_i)$, avec $\sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = 1$. Les probabilités p_i caractérisent complètement le comportement de la VA à valeurs discrètes X . On dit que f_X ou $\{p_i; i \in \mathcal{I}\}$ définissent la loi de la VA X .

Outre son interprétation intuitive, la densité de probabilité¹ d'une VA permet aussi de définir plusieurs quantités utiles. En particulier, l'*espérance mathématique* ou moyenne d'une VA est définie par :

$$E[X] \triangleq \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx. \quad (3.3)$$

Soulignons que $E[X]$ n'est pas toujours définie, l'intégrale apparaissant au 2^e membre de (3.3) pouvant diverger. De même, on définit le *moment d'ordre p* de X comme :

$$E[X^p] \triangleq \int_{\mathbb{R}} x^p f_X(x) dx,$$

et l'espérance de $\varphi(X)$, transformée de X par la fonction φ , comme :

$$E[\varphi(X)] \triangleq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x) dx.$$

Comme pour $E[X]$, le moment d'ordre p et $E[\varphi(X)]$ n'existent pas nécessairement. Par contre, on montre que si le moment d'ordre p de X existe, tous les moments d'ordre inférieur existent aussi. On a alors la définition suivante :

Ordre d'une variable aléatoire - Une VA est dite d'ordre p si son moment d'ordre p existe.

Toute VA d'ordre p est donc aussi d'ordre q si $q \leq p$.

1. Dans le reste de ce chapitre, le terme de densité de probabilité désignera aussi les probabilités p_i définissant la loi d'une VA discrète. Dans les expressions mathématiques, il suffira de remplacer les intégrales par les sommes discrètes correspondantes.

Certains moments d'une VA ont une interprétation physique simple. Par exemple, le moment d'ordre 1 représente la valeur moyenne de plusieurs mesures lorsque l'on est capable de les répéter indépendamment les unes des autres (ceci correspondrait à la moyenne des angles de Cobb ou des rythmes cardiaques d'un ensemble de patients). Le moment d'ordre 2 est lié à l'énergie moyenne des mesures (voir ci-après la définition de la variance et de l'écart-type), etc. Les moments permettent aussi de « résumer » à l'aide de quelques nombres l'allure de la densité de probabilité. L'espérance mathématique fournit son centre de masse, le moment d'ordre 2 est lié à la dispersion autour de cette valeur centrale, le moment d'ordre 3 exprime l'asymétrie par rapport à cette valeur centrale, etc. Pour les VA d'ordre supérieur ou égal à 2, on utilise généralement les quantités suivantes, définies à l'aide des deux premiers moments :

$$\begin{array}{ll} \text{moyenne} & m = E[X] \quad , \\ \text{variance} & \text{var}[X] = E[(X - m)^2] = E[X^2] - m^2 \quad , \\ \text{écart-type} & \sigma = \sqrt{\text{var}[X]} \quad . \end{array}$$

L'écart-type représente la dispersion moyenne des mesures par rapport à la valeur moyenne. La variance correspond à l'énergie des déviations par rapport à la valeur moyenne.

Soulignons enfin que parmi tous les types de VA, les VA gaussiennes jouent un rôle très important. Deux raisons expliquent cela : d'une part, lorsque plusieurs phénomènes aléatoires se combinent, le phénomène résultant a souvent tendance à se rapprocher de la gaussienne (ce résultat est formalisé par le théorème de la limite centrale). Les VA gaussiennes constituent donc des modèles adéquats pour de nombreux phénomènes ; d'autre part, les densités gaussiennes se manipulent relativement simplement et permettent souvent de mener les calculs assez loin. Sauf contradiction flagrante avec la physique des phénomènes étudiés, l'utilisateur aura donc tendance à préférer un modèle gaussien. Une VA X est de loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si sa densité de probabilité est de la forme :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On montre qu'une telle VA est du second ordre, de moyenne m et de variance σ^2 . La variable est dite réduite si $m = 0$ et $\sigma = 1$.

Enfin, signalons que pour une VA gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, la probabilité pour que la mesure soit éloignée de plus de 2σ de la moyenne m est inférieure à 5%. Cette valeur tombe à moins de 1% pour que la mesure soit à plus de 3σ de la moyenne m . En première approximation, on peut donc considérer que la probabilité pour que la mesure soit à plus de deux ou trois écarts-types de la moyenne est, à toutes fins pratiques, nulle.

3.2.2 Couples de variables aléatoires

Les notions introduites au paragraphe 3.2.1 permettent de caractériser le comportement d'une mesure entachée d'incertitude. Or, dans la pratique, on

dispose souvent de deux mesures ou plus se rapportant au même phénomène. Se posent alors les questions de la caractérisation du comportement d'ensemble de ces mesures entachées d'incertitudes, et aussi de la manière dont une partie de ces mesures nous renseigne sur les valeurs vraisemblables des autres. La réponse est fournie d'une part en étendant les notions introduites au paragraphe précédent, et d'autre part faisant appel à la règle de Bayes qui joue un rôle important non seulement pour l'étude des VA, mais aussi en estimation. Pour présenter les principaux résultats, nous considérons un couple (X, Y) de variables aléatoires scalaires, qui correspondrait donc à deux mesures entachées d'incertitude. L'extension à des mesures plus nombreuses, mais en nombre fini, ne pose pas de difficulté et sera présentée brièvement au paragraphe 3.2.3.

Comme pour les VA scalaires, les couples de VA sont caractérisés par leur loi; pour des VA à valeurs continues², nous supposons ici que la loi admet une densité de probabilité f_{XY} que l'on définit comme

$$f_{XY}(x, y) dx dy \triangleq P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy).$$

Au terme $dx dy$ près, la densité de probabilité du couple représente donc la probabilité pour que les valeurs des deux mesures soient proches de x et y . La densité de probabilité de chacune des variables se déduit de la densité de probabilité du couple par les formules de projection suivantes :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dy, \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y) dx. \end{aligned}$$

Notons que la densité de probabilité de chacune des variables renseigne sur les valeurs probables d'une mesure *sans tenir compte de l'autre*, contrairement à la densité du couple qui exprime aussi le lien entre les deux mesures. C'est pourquoi il n'est en général pas possible de déduire la densité du couple à partir de la densité de chacune des variables. Les variables *indépendantes* font exception à cette règle. En effet, on a :

Indépendance - Deux VA X et Y sont indépendantes si et seulement si $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Remarquons que, des VA indépendantes n'ayant justement aucun lien, il est naturel que la densité du couple puisse s'exprimer à partir de celle des deux variables.

La densité du couple permet de définir l'espérance mathématique d'une fonc-

2. Pour les VA à valeurs discrètes, les densités de probabilité sont à remplacer par des probabilités discrètes, comme pour les VA scalaires.

tion du couple, et en particulier la moyenne du couple qui prend pour expression :

$$\begin{aligned} E[(X, Y)] &= \int \int_{\mathbb{R}} (x, y) f_{XY}(x, y) dx dy, \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx, \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy \right), \\ &= (E[X], E[Y]). \end{aligned}$$

Notons que $E[(X, Y)]$ n'existe pas nécessairement. La moyenne du couple apparaît comme le couple de la moyenne de chaque VA. Le lien entre les deux éléments du couple n'intervient donc pas dans le calcul de la moyenne. Pour exprimer simplement ce lien, on fait souvent appel à la covariance du couple définie par :

$$\begin{aligned} \text{cov}[X, Y] &\triangleq E[(X - E[X])(Y - E[Y])], \\ &= E[XY] - E[X]E[Y], \\ &= \int \int_{\mathbb{R}} xy f_{XY}(x, y) dx dy - E[X]E[Y], \end{aligned}$$

ou encore au coefficient de corrélation ρ_{XY} qui s'exprime comme :

$$\rho_{XY} \triangleq \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{var}[X]\text{var}[Y]}}.$$

On peut montrer que le coefficient de corrélation, lorsqu'il existe, est nécessairement compris entre -1 et 1 . Lorsque la covariance de deux VA est nulle, on dit qu'elles sont décorrélées. On a la propriété importante suivante :

Indépendance et corrélation - *Deux variables indépendantes sont nécessairement décorrélées, mais la réciproque est généralement fausse.*

De la même manière que les moments d'une VA permettent de « résumer » l'allure de sa densité de probabilité, la covariance permet de « résumer » le lien entre X et Y exprimé par f_{XY} . Une caractérisation complète à l'ordre 2 de f_{XY} est constituée par la matrice de covariance que l'on définit par :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{XY} &\triangleq E \left[\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} (X, Y) \right] - \begin{pmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{pmatrix} (E[X], E[Y]), \\ &= \begin{pmatrix} E[X^2] & E[XY] \\ E[XY] & E[Y^2] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E[X]^2 & E[X]E[Y] \\ E[X]E[Y] & E[Y]^2 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \text{var}[X] & \text{cov}[X, Y] \\ \text{cov}[X, Y] & \text{var}[Y] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette matrice résume donc les propriétés énergétiques de X et Y par ses termes diagonaux, et le lien entre X et Y par ses termes rectangles.

Lorsque deux VA sont liées, la mesure de l'une renseigne sur les valeurs probables de l'autre. Cette situation est illustrée à la figure 3.2 : supposons que

l'on cherche à mesurer le rythme cardiaque d'une certaine population. Des analyses préliminaires (épidémiologiques par exemple) ont montré que le rythme cardiaque moyen de cette population est de 60 Hz avec un écart-type de 10 Hz. On modélise donc le rythme cardiaque des individus de cette population par une VA gaussienne de moyenne 60 et d'écart-type 10. La densité correspondante est donnée à la figure 3.2-b, en traits pleins. On observe que ce modèle interdit pratiquement les mesures inférieures à 30 Hz et supérieures à 90 Hz. Pour mesurer le rythme cardiaque de chaque individu, on dispose d'un appareil relativement imprécis, puisque sa dispersion moyenne autour de la vraie valeur est de 5 Hz. On modélise ici encore cette dispersion par une gaussienne, dont une représentation apparaît à la figure 3.2-a. On observe que des écarts allant jusqu'à 15 Hz par rapport à la vraie valeur peuvent se produire. En combinant les informations apportées par ces deux modèles, il est intuitif que des mesures seront vraisemblables dans un domaine un peu plus large que celui de vraies valeurs du rythme cardiaque, en raison de la dispersion du capteur. C'est ce que l'on observe effectivement sur la courbe en traits interrompus de la figure 3.2-b, qui donne la densité des mesures.

Supposons maintenant que l'on ait mesuré une valeur de rythme cardiaque à l'aide de l'appareil. Quelle information cette mesure nous donne-t-elle sur la vraie valeur du rythme cardiaque? Intuitivement, si la mesure se situe dans le domaine des valeurs probables du rythme cardiaque, on pourra déduire que la vraie valeur se situe autour de la valeur mesurée, avec une dispersion assez semblable à celle du capteur. C'est effectivement ce que l'on constate à la figure 3.2-c, pour une valeur mesurée égale à 50 Hz. Par contre, si la mesure se situe vers les extrémités du domaine des valeurs probables, il semble logique que la vraie valeur ait plus de chance d'être vers l'intérieur de ce domaine que vers l'extérieur. C'est ce que l'on observe à la figure 3.2-d, où le calcul montre que les valeurs les plus probables du vrai rythme cardiaque se situent autour de 80 Hz, et non pas de 90 Hz.

Pour formaliser ces notions, il est nécessaire de faire appel à la règle de Bayes : considérons un couple de VA (X, Y) , et supposons que X ait pris la valeur x (x représente donc la valeur mesurée). La densité de Y une fois que l'on sait que X a pris la valeur x , que l'on note $f_{Y|X=x}(y)$, prend l'expression suivante :

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} .$$

On remarque que $f_{Y|X=x}$ est entièrement déterminée par la densité du couple, puisque le dénominateur de l'expression ci-dessus se déduit de f_{XY} par projection. Soulignons l'importance de la relation ci-dessus, qui indique la manière de combiner les informations amenées d'une part par les modèles des incertitudes et d'autre part par les mesures. Indiquons également que $f_{Y|X=x}$ étant la densité de probabilité d'une VA scalaire, elle permet de définir les grandeurs usuelles : espérance mathématique (que l'on désigne alors par le terme d'*espérance conditionnelle*), moments, etc.

Enfin, comme pour les VA scalaires, les couples de VA gaussiennes ont une grande importance. La densité de probabilité d'un couple (X, Y) de VA gaus-

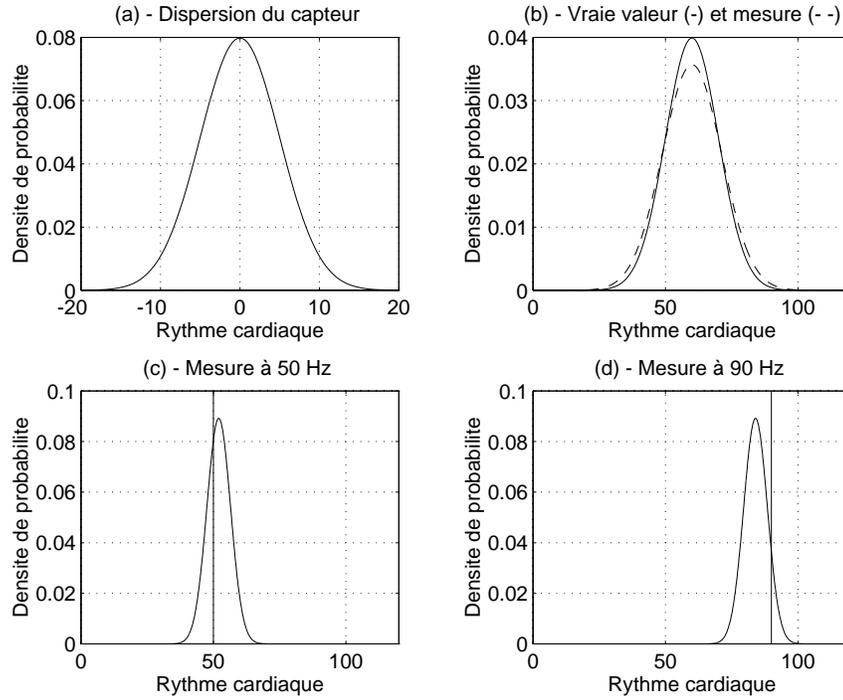


FIGURE 3.2 – Illustration du phénomène de conditionnement. (a) Dispersion du capteur ; (b) distribution *a priori* de la grandeur d'intérêt (traits pleins) et de la valeur de la mesure (traits interrompus) ; (c) distribution de la grandeur d'intérêt, pour une observation de 50. Cette distribution reproduit sensiblement celle du capteur, et est presque centrée sur la valeur observée ; (d) distribution de la grandeur d'intérêt, pour une observation de 90. Cette dernière n'est plus centrée sur la valeur observée, en raison de la forme de la distribution *a priori* de la grandeur mesurée qui rend les valeurs supérieures à 90 très peu vraisemblables.

siennes est complètement définie par la moyenne du couple (m_X, m_Y) et par sa matrice de covariance \mathbf{R}_{XY} . Elle a pour expression

$$f_{XY}(x, y) \triangleq \frac{1}{2\pi |\mathbf{R}_{XY}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - m_X, y - m_Y) \mathbf{R}_{XY}^{-1} \begin{pmatrix} x - m_X \\ y - m_Y \end{pmatrix} \right\},$$

et est généralement notée $\mathcal{N}((m_X, m_Y), \mathbf{R}_{XY})$. Enfin, parmi les propriétés des couples de VA gaussiennes, mentionnons que chaque élément du couple est lui-même gaussien, et que toutes les lois conditionnelles sont gaussiennes.

3.2.3 Vecteurs aléatoires

Lorsque l'on dispose de N mesures scalaires entachées d'incertitudes, on peut alors définir la VA vectorielle ou *vecteur aléatoire* \mathbf{X} dont chaque élément est constitué par une des mesures scalaires. Les vecteurs aléatoires sont une généralisation immédiate des couples de VA. En fait, pour en établir les propriétés, il suffit d'introduire le couple composé de la première VA scalaire X_1 et de la VA vectorielle \mathbf{Y} contenant les mesures 2 à N , d'utiliser formellement les notions définies au paragraphe précédent, puis de recommencer en prélevant de manière récurrente un élément de \mathbf{Y} . Nous indiquons ci-après les principales définitions et propriétés des vecteurs aléatoires, qui sont exprimées dans un formalisme vectoriel.

Le comportement d'un vecteur aléatoire est complètement défini par sa loi. Pour un vecteur aléatoire à valeurs continues, nous supposons que sa densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ existe. Celle-ci a pour propriété :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = P(x_1 < X_1 \leq x_1 + dx_1, \dots, x_N < X_N \leq x_N),$$

où $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ et $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_N$, le symbole $(\cdot)^T$ désignant la transposition. Au terme $d\mathbf{x}$ près, $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ représente donc la probabilité pour que \mathbf{X} prenne une valeur proche de \mathbf{x} . Cette densité est positive, d'intégrale égale à 1, et la densité de tout sous-vecteur s'obtient par projection : si \mathbf{X} est partitionné en deux sous-vecteurs \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 , alors

$$f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) = \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_2.$$

Par ailleurs, les deux sous-vecteurs \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 sont indépendants si et seulement si

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)f_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_2).$$

Le densité de probabilité du vecteur aléatoire permet d'en définir l'espérance mathématique :

$$E[\mathbf{X}] \triangleq \int \mathbf{x} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

L'expression ci-dessus montre que $E[\mathbf{X}]$ est un vecteur composé des espérances des éléments de \mathbf{X} . On définit aussi que la matrice de covariance de \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}} &\triangleq E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T], \\ &= E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] - E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}]^T. \end{aligned}$$

Les éléments diagonaux de $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ correspondent à la variance des éléments de \mathbf{X} et les termes rectangles sont égaux aux covariances entre les éléments correspondants de \mathbf{X} .

Comme pour les couples, on peut introduire la notion de conditionnement d'un sous-vecteur par rapport à un autre. Supposons que l'on s'intéresse à un vecteur \mathbf{X} dont on a effectivement observé un sous-vecteur \mathbf{x}_1 . La densité du

sous-vecteur complémentaire \mathbf{X}_2 , une fois que \mathbf{x}_1 a été observé, s'exprime à l'aide de la règle de Bayes :

$$f_{\mathbf{X}_2|\mathbf{X}_1=\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2) = \frac{f_{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)} = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{f_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)}.$$

Comme au paragraphe précédent, on constate que la densité conditionnelle est complètement définie par la loi du vecteur complet, puisque le dénominateur s'en déduit par projection.

Enfin, les vecteurs aléatoires gaussiens sont d'une grande importance pratique. Leur densité de probabilité a pour expression :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right),$$

où \mathbf{m} désigne l'espérance mathématique de \mathbf{X} et $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ sa matrice de covariance. Une telle densité de probabilité est souvent notée $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{R}_{\mathbf{X}})$. Lorsqu'un vecteur aléatoire est gaussien, tous ses sous-vecteurs le sont aussi, ainsi que toutes les densités conditionnelles qui s'en déduisent.

Chapitre 4

Estimation

4.1 Introduction

Dans de nombreuses situations expérimentales en physique et en biologie, on ne dispose pas directement de mesures des quantités qui nous intéressent. Seules sont disponibles des observations qui sont liées à la grandeur inconnue, et qui, la plupart du temps, comportent des incertitudes. L'objet des techniques d'estimation est d'utiliser « au mieux » (en un sens à définir) les mesures effectuées pour en extraire de l'information sur la grandeur d'intérêt, et, dans la majorité des cas, prendre une décision « raisonnable » sur sa valeur. Comme il n'existe pas de critère universel d'optimalité pour l'extraction de l'information présente dans les données, l'utilisateur se trouve devant la nécessité de faire des choix : choix de modèles d'incertitudes (sur les données, sur la quantité à estimer), choix de la relation mathématique, plus ou moins approximative, qui lie la grandeur à estimer et les données observées, choix d'un critère pour l'attribution d'une valeur estimée à la grandeur inconnue. Cette multiplicité de choix constitue une des difficultés de l'estimation. Dans ce qui suit, nous présentons une approche assez systématique de l'estimation qui permet de résoudre la plupart des problèmes usuels tout en s'adaptant à leurs caractéristiques particulières. Après avoir défini la problématique de l'estimation et présenté cette méthodologie de résolution, nous nous intéressons plus particulièrement au cas où les phénomènes étudiés peuvent être modélisés par des systèmes linéaires, et où les incertitudes peuvent être considérées comme gaussiennes en première approximation.

4.2 Problématique de l'estimation

Plaçons nous dans la situation où l'on cherche à mesurer expérimentalement une grandeur scalaire x (par exemple, un angle de Cobb à partir d'une radiographie, ou le gain d'un amplificateur utilisé en instrumentation). Supposons de plus que la mesure n'introduise pas de distorsion, mais soit simplement entachée d'incertitude. Si l'on ne dispose que d'une seule mesure z (une seule radiogra-

phie, une seule mesure du gain de l'amplificateur), le mieux que l'on puisse faire en l'absence de toute autre information est d'attribuer à l'estimée de x , notée \hat{x} , la valeur de la mesure. Dans ce cas, on a donc :

$$\hat{x} = z .$$

Supposons maintenant que l'on dispose de N mesures indépendantes $z_n; 1 \leq n \leq N$. La décision de la plupart des expérimentateurs sera alors de prendre pour estimée de x la moyenne des mesures effectuées. On a donc :

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n . \quad (4.1)$$

Il est important de voir que l'équation (4.1) est en fait basée sur plusieurs hypothèses implicites. L'expérimentateur suppose que la moyenne va permettre de réduire l'influence des incertitudes sans pour autant affecter la valeur de x . Selon lui, l'effet des incertitudes serait de fournir une mesure tantôt inférieure à x , tantôt supérieure à x . En d'autres termes, il suppose que les incertitudes sont additives et de moyenne nulle, et donc que l'on peut modéliser les phénomènes par :

$$z_n = x + b_n , \quad (4.2)$$

où b_n représente les incertitudes, ou le bruit affectant la mesure n . L'expérimentateur émet donc une *hypothèse de structure* sur le phénomène étudié. Ici, cette hypothèse de structure prend la forme relativement simple de (4.2) ; celle-ci sépare clairement la partie certaine (x) de la partie incertaine (le bruit b), les deux étant liées aux mesures z par une relation déterministe (addition).

Par ailleurs, en supposant que la moyenne intervenant dans (4.1) permet de réduire l'influence des incertitudes, l'utilisateur admet implicitement que les échantillons de bruit b_n ont un comportement plutôt agité et réparti autour de zéro, alors que x reste constant. Il formule donc une *hypothèse probabiliste* qui décrit ici le comportement statistique du bruit (bruit centré et peu corrélé), et qui fait apparaître un *contraste* entre la quantité à estimer et les incertitudes (ici, contraste entre l'invariance de x et les fortes variations des échantillons du bruit b).

Dans l'exemple ci-dessus, les hypothèses probabilistes portent seulement sur les incertitudes affectant les mesures. Aucune information sur les valeurs plausibles de x n'est introduite, et on se fie exclusivement aux mesures pour prendre une décision sur la valeur de l'estimée. Aucune valeur n'étant interdite, \hat{x} peut donc théoriquement prendre n'importe quelle valeur, même si certaines d'entre elles sont incompatibles avec la physique des phénomènes étudiés. Ceci peut se révéler pénalisant, surtout dans des conditions d'estimation difficiles (fortes incertitudes sur les mesures, mauvais contraste...). Si l'on dispose d'informations *a priori* sur x , il peut être intéressant de les formuler également sous la forme d'hypothèses probabilistes. Par exemple, si l'on connaît des zones de valeurs probables de x (par exemple, x positif, x inférieur à une borne donnée, x plutôt distribué autour de telle ou telle valeur connue à l'avance...), on peut résumer

cette connaissance dans une densité de probabilité, ce qui revient à considérer x comme une variable aléatoire. En pratique, l'effet d'une telle hypothèse est d'introduire un compromis entre l'information apportée par les mesures et celle introduite *a priori* sur x . Si l'information présente dans les mesures est compatible avec l'information *a priori*, l'effet de cette dernière est peu visible. Par contre, si l'information présente dans les mesures conduit à une estimée en dehors du domaine des valeurs plausibles x , l'information *a priori* a tendance à rapprocher \hat{x} de ce domaine. Ce comportement est illustré à la section 4.3 (voir la figure 4.1).

Finalement, toute procédure d'estimation peut être scindée en deux étapes : tout d'abord, la mise en équation le problème posé, c'est à dire la formulation des hypothèses de structure et des hypothèses probabilistes. Ces hypothèses constituent un modèle des phénomènes étudiés et des incertitudes qui les affectent, et permettent aussi d'introduire des connaissances préalables sur la quantité à estimer ; ensuite, l'utilisation d'un nécessaire contraste entre les incertitudes sur les mesures et la quantité à estimer pour prendre une décision raisonnée sur la valeur de cette dernière. Le contraste porte généralement sur le comportement statistique et sur les dimensions respectives de ces grandeurs. Nous précisons maintenant la manière de prendre cette décision.

4.3 Méthodologie de l'estimation

4.3.1 Principe

Considérons la situation où l'on désire estimer une quantité scalaire ou vectorielle x à partir de mesures z . Supposons que les hypothèses de structure et les hypothèses probabilistes aient été formulées. x et z étant des quantités incertaines, on leur associe respectivement les VA X et Z . L'ensemble des hypothèses émises permet de définir deux types d'incertitudes :

- l'incertitude sur z lorsqu'on suppose x connu. Cette incertitude découle de la structure des phénomènes et du modèle des incertitudes sur les mesures. La VA Z qui lui est associée est caractérisée par sa densité de probabilité qui, comme on suppose x connu, est la densité *conditionnelle* $f_{Z|X=x}(z)$;
- l'incertitude *a priori* sur x . Cette incertitude représente les hypothèses probabilistes sur la quantité à estimer. Celles-ci sont formulées par l'intermédiaire de la densité de probabilité *a priori* de la VA X que l'on note $f_X(x)$.

L'objet de la procédure d'estimation est d'extraire toute l'information disponible sur x , une fois les mesures effectuées. Traduite en termes probabilistes, cette information correspond exactement à la loi de X un fois que l'on connaît Z , ou encore à la loi conditionnelle de X sachant que Z a pris la valeur z , que l'on représente par sa densité $f_{X|Z=z}(x)$. Or il nous est possible de calculer

$f_{X|Z=z}(x)$ à partir de nos hypothèses en appliquant la règle de Bayes ; en effet :

$$\begin{aligned} f_{X|Z=z}(x) &= \frac{f_{XZ}(x, z)}{f_Z(z)}, \\ &= \frac{f_{Z|X=x}(z) f_X(x)}{f_Z(z)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Le numérateur de (4.3) découle directement des hypothèses émises. Quant au dénominateur, il représente une simple constante de normalisation, la densité f_Z étant évaluée pour la valeur de z correspondant aux mesures. Il est possible de déterminer formellement $f_Z(z)$ à partir de $f_{XZ}(x, z)$ par projection. Mais dans la plupart des cas, on ne s'intéresse qu'au comportement de $f_{X|Z=z}(x)$ et surtout à la position de ses maxima, qui ne sont pas affectés par une constante multiplicative. Le terme $f_Z(z)$ peut alors être ignoré.

En toute rigueur, la densité *a posteriori* $f_{X|Z=z}(x)$ représente la totalité de l'information disponible sur x une fois les hypothèses émises et les mesures effectuées. On remarque que cette connaissance sur x résulte de la combinaison de l'information fournie par les mesures (représentée par $f_{Z|X=x}(z)$) et de l'information *a priori* disponible sur x (représentée par $f_X(x)$). La manière de combiner ces deux sources d'information nous est fournie par la règle de Bayes, d'où le nom d'*approche bayésienne* donné à cette démarche. Dans la pratique, on souhaite souvent résumer l'information disponible sur x par une seule valeur, l'estimée \hat{x} . La question est donc de déduire de $f_{X|Z=z}(x)$ une valeur raisonnable de x . Il existe plusieurs réponses classiques dont la pertinence dépend en partie des caractéristiques particulières du problème traité. Ici, nous nous limitons à l'estimation au sens du *maximum a posteriori* (MAP), dont les performances sont satisfaisantes dans une grande variété de situations. Cette approche consiste à choisir pour estimée la valeur de x « la plus probable », c'est-à-dire celle qui maximise la densité de probabilité *a posteriori* de x . On a donc

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{MAP}} &\triangleq \arg \max_x f_{X|Z=z}(x), \\ &= \arg \max_x \{ f_{Z|X=x}(z) f_X(x) \}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

où, pour obtenir (4.4), on a pu négliger le terme $f_Z(z)$ qui n'intervient pas dans la maximisation.

Il est à noter que la nature des hypothèses de structure et probabilistes a un impact important sur la forme des densités $f_{Z|X=x}$ et f_X , et donc sur la difficulté du problème de maximisation permettant d'obtenir \hat{x}_{MAP} . Dans la pratique, un modèle précis des phénomènes observés peut conduire à d'excellentes performances, mais aussi à des calculs longs et difficiles, voire impossible à mettre en œuvre. C'est pourquoi, il est généralement nécessaire de faire un compromis entre la précision des hypothèses et les performances d'une part, et les difficultés de calcul et de mise en œuvre d'autre part. Ce compromis doit évidemment être adapté aux caractéristiques particulières du problème traité et à la difficulté de l'estimation. Si le contraste entre les données mesurées et

la quantité à estimer est bon, ce qui indique que l'information fournie par les mesures est riche, l'information *a priori* sur x a peu d'importance. On peut alors supposer sans danger que x peut prendre ses valeurs n'importe où dans un très grand domaine. On traduit cette idée en prenant pour f_X une fonction constante sur le domaine considéré. En faisant croître la taille du domaine jusqu'à l'infini¹, $f_X(x) = \text{constante}$ disparaît de (4.4) et on obtient l'estimateur au sens du *maximum de vraisemblance* (MV) :

$$\hat{x}_{\text{MV}} \triangleq \arg \max_x f_{Z|X=x}(z). \quad (4.5)$$

On observe sur (4.5) que l'estimation MV revient à faire exclusivement confiance aux données pour déterminer la valeur de x . Cette approche risque donc de ne pas convenir à des situations où les données sont peu informatives. On préférera alors une approche MAP où l'information *a priori* sur x viendra pallier le manque relatif d'information apporté par les mesures.

4.3.2 Exemples

L'objet des exemples présentés ci-dessous est d'indiquer comment les concepts introduits au paragraphe 4.3.1 peuvent être utilisés en pratique. Le premier exemple illustre dans un cas très simple la démarche générale que nous avons présentée et la différence de comportement entre les estimateurs MV et MAP. Le second exemple montre que la technique classique d'estimation d'un retard par corrélation peut être obtenue par la même démarche.

Estimation d'une quantité scalaire en présence de bruit fort

Supposons que l'on désire estimer une quantité scalaire x à partir de N observations $\{z_n; 1 \leq n \leq N\}$ entachées d'une grande incertitude. Pour fixer les idées, on suppose que les valeurs usuelles de x sont comprises approximativement entre -2 et 2 , et que l'incertitude sur chaque mesure peut aller jusqu'à ± 20 , le tout étant exprimé dans des unités arbitraires.

Pour estimer x , la première étape est de formuler les hypothèses probabilistes et de structure. En l'absence d'autres informations, on suppose que les incertitudes viennent s'ajouter à la vraie valeur de x pour former les mesures. On a donc le modèle suivant :

$$z_n = x + b_n, \quad (4.6)$$

où b_n représente l'incertitude sur la n^{e} mesure. Ceci constitue l'hypothèse de structure, et il nous faut maintenant préciser les hypothèses probabilistes. En ce qui concerne les incertitudes sur les mesures, on peut raisonnablement supposer qu'elles sont de moyenne nulle (elles varient de autour de 0) et indépendantes les unes des autres. En l'absence d'autres renseignements, on peut également supposer que ces incertitudes suivent une loi gaussienne, cette hypothèse simplifiant

1. Soulignons ici que ce raisonnement est qualitatif, une densité uniforme sur un domaine infini n'étant en toute rigueur pas définie.

généralement la mise en œuvre. La valeur moyenne ayant déjà été choisie, il reste à spécifier la variance ou l'écart-type de cette loi. En raison des caractéristiques des lois gaussiennes (voir le chapitre 3), on peut prendre pour écart-type σ_B une valeur de 10, ce qui rend très invraisemblables les valeurs de b supérieures à 20 ou 30 en valeur absolue. On a donc :

$$\begin{aligned} f_{B_n}(b_n) &= \mathcal{N}(0, \sigma_B^2) ; \quad \sigma_B = 10, \\ &= \frac{1}{K_B} \exp\left(-\frac{b_n^2}{2\sigma_B^2}\right), \end{aligned}$$

où K_B désigne le coefficient de normalisation de cette gaussienne. D'après l'hypothèse d'indépendance des incertitudes, on en déduit que la densité de probabilité de (B_1, \dots, B_N) prend la forme :

$$f_{B_1 \dots B_N}(b_1, \dots, b_N) = \frac{1}{K_B^N} \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N b_n^2}{2\sigma_B^2}\right). \quad (4.7)$$

Formulons maintenant une hypothèse probabiliste sur x . Le plus simple est évidemment de ne rien supposer sur les valeurs plausibles de x , donc de prendre pour $f_X(x)$ la fonction constante. Cette hypothèse conduit à l'estimateur MV. Une autre option est de tenir compte des valeurs plausibles de x , comprises entre -2 et 2 . Par le même raisonnement que précédemment, on peut prendre pour $f_X(x)$ une distribution gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma_X = 1$ qui a pour expression :

$$f_X(x) = \frac{1}{K_X} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right), \quad (4.8)$$

où K_B désigne le coefficient de normalisation de cette densité *a priori*. L'utilisation de cette loi *a priori* conduit à un estimateur MAP.

La seconde étape consiste à trouver l'expression de la densité conditionnelle $f_{Z_1 \dots Z_N | X=x}$ et de la densité *a priori* f_X . Cette dernière nous est directement fournie par (4.8) dans le cas de l'estimation MAP et est constante dans le cas de l'estimation MV. En ce qui concerne la densité des mesures connaissant x , l'hypothèse de structure formalisée dans (4.6) montre que les mesures suivent la même loi que les incertitudes, à l'exception de la moyenne qui est décalée de x . D'après (4.7), la densité conditionnelle prend la forme :

$$f_{Z_1 \dots Z_N | X=x}(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{K_B^N} \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x)^2}{2\sigma_B^2}\right). \quad (4.9)$$

La troisième étape consiste à trouver l'expression de l'estimée. D'après (4.4) et (4.5), on a :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\text{MAP}} &= \arg \max_x \left\{ \frac{1}{K_B^N K_X} \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x)^2}{2\sigma_B^2} - \frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \right\}, \\ \hat{x}_{\text{MV}} &= \arg \max_x \left\{ \frac{1}{K_B^N} \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x)^2}{2\sigma_B^2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

Dans un cas comme dans l'autre, maximiser la fonction revient à minimiser l'opposé de l'argument de l'exponentielle. On en déduit que

$$\begin{aligned}\hat{x}_{\text{MAP}} &= \arg \min_x \left\{ \frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x)^2}{2\sigma_B^2} + \frac{x^2}{2\sigma_X^2} \right\}, \\ \hat{x}_{\text{MV}} &= \arg \min_x \left\{ \frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x)^2}{2\sigma_B^2} \right\}.\end{aligned}$$

Pour trouver l'argument minimisant chacune de ces fonctions, il suffit d'écrire que leur dérivée par rapport à x est nulle. On obtient alors :

$$\hat{x}_{\text{MAP}} = \frac{1}{N + \sigma_B^2/\sigma_X^2} \sum_{n=1}^N z_n, \quad (4.10)$$

$$\hat{x}_{\text{MV}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n. \quad (4.11)$$

On observe que les deux estimateurs ne diffèrent que par le terme σ_B^2/σ_X^2 au dénominateur du second membre de (4.10). Lorsque N est petit et que les mesures sont très incertaines (σ_B grand), ce terme, qui correspond à l'information *a priori* sur x , a une influence significative. Celle-ci vient pallier la pauvreté des informations contenues dans les données. Lorsque N est grand ou que l'incertitude sur les mesures est faible, ce terme devient négligeable. Ceci correspond au fait que l'information contenue dans les mesures est alors suffisante pour estimer x correctement. Dans ce cas, les deux estimateurs sont pratiquement identiques.

Une illustration de ce comportement est donnée à la figure 4.1. Le système simulé correspond exactement à celui traité en exemple : les mesures sont obtenues en ajoutant à la grandeur x un bruit pseudo-aléatoire gaussien blanc de moyenne nulle et d'écart type égal à 10. Les courbes représentent la valeur de l'estimée en fonction du nombre N de mesures pour les deux estimateurs et pour deux valeurs de x . On observe tout d'abord que l'estimateur MAP a un comportement *stable* : quelle que soit la vraie valeur de x et quel que soit le nombre de mesures, les valeurs estimées varient de manière relativement douce en fonction de N . Par contre, lorsque N est inférieur à 100, l'estimateur MV présente de grandes variations lorsque le nombre de mesures varie. Ceci s'explique par le fait que l'estimateur MV se fie exclusivement aux mesures pour déterminer \hat{x} . Pour les petites valeurs de N , l'information contenue dans les mesures est relativement pauvre, et une seule mesure fortement entachée d'erreur est suffisante pour faire varier sensiblement la valeur de l'estimée. L'estimateur MAP ne présente pas ce comportement, l'information *a priori* sur x venant contrebalancer l'effet des incertitudes sur les mesures. Pour les grandes valeurs de N , les deux estimateurs présentent un comportement semblable. Ceci correspond au fait que, dans cette situation, l'information contenue dans les mesures est suffisante pour déterminer une estimée correcte de x . Pour l'estimateur MAP, l'information *a priori* sur x devient alors négligeable.

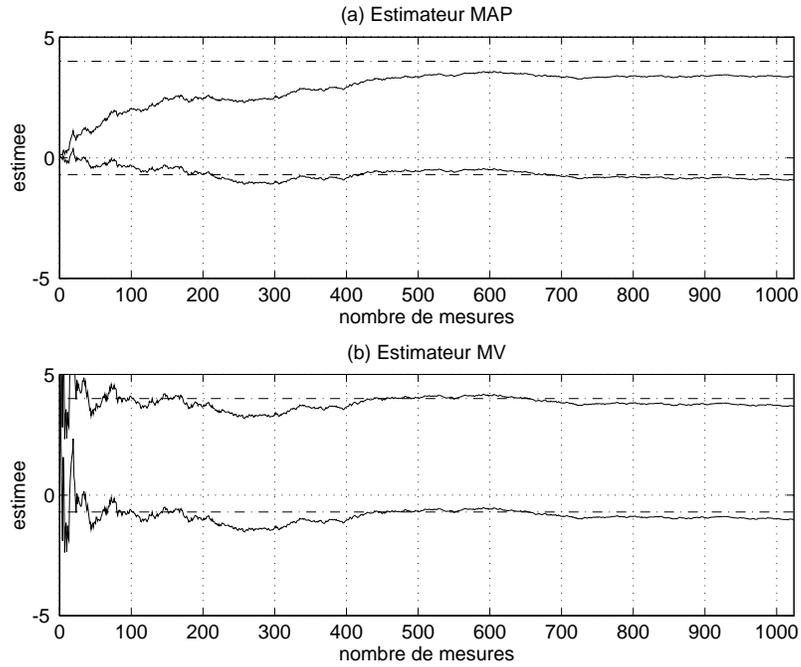


FIGURE 4.1 – Comparaison d’estimateurs MAP et MV pour l’estimation d’une grandeur scalaire x affectée d’incertitudes importantes. Celles-ci sont représentées par un bruit gaussien centré additif. Pour l’estimateur MAP, la grandeur à estimer est modélisée comme une VA gaussienne centrée de variance unité. Ces diagrammes représentent la valeur des estimées en fonction du nombre de mesures pour $x = -1$ et $x = 4$. L’estimateur MV présente des instabilités lorsque le nombre de mesures est faible. Lorsque le nombre de mesures est élevé, les deux estimateurs ont un comportement comparable. Lorsque l’information *a priori* est pertinente ($x = -1$) l’estimateur MAP est clairement supérieur. Lorsque l’information *a priori* n’est pas pertinente, l’estimateur MAP a tendance à sous estimer x pour ramener l’estimée dans le domaine des valeurs *a priori* vraisemblables, alors que l’estimateur MV ne présente pas ce comportement.

Il est également intéressant de comparer le comportement des estimateurs pour les deux valeurs de x . La première valeur ($x = -1$) est conforme à l'information *a priori* introduite sur x . L'estimateur MAP se comporte alors beaucoup mieux que l'estimateur MV puisque \hat{x}_{MAP} reste au voisinage de la vraie valeur de x quel que soit le nombre de mesures. La deuxième valeur ($x = 4$) n'est pas conforme à l'information *a priori*, puisque cette dernière rend très peu vraisemblables les valeurs de x supérieures à 3. Lorsque le nombre de mesures est relativement petit, l'estimateur MAP a tendance à sous-estimer x pour ramener la valeur estimée dans le domaine des valeurs vraisemblables de x . Plus N augmente, plus le poids de l'information *a priori* diminue et plus \hat{x}_{MAP} se rapproche de la vraie valeur de x . Comme l'estimateur MV ne tient compte d'aucune hypothèse sur x , il se comporte de la même manière dans les deux cas : instabilité lorsque N est petit, comportement satisfaisant lorsque N est grand. Ceci illustre une des difficultés de l'approche bayésienne : l'information *a priori* permet généralement d'obtenir des estimées satisfaisantes lorsque les conditions d'estimation sont difficiles (faible contraste, fortes incertitudes), mais elle peut également conduire à des résultats médiocres lorsque l'hypothèse formulée n'est pas vérifiée. On a donc généralement intérêt à se montrer « conservateur » en introduisant une information *a priori* juste suffisante pour stabiliser le problème d'estimation, quitte à en rajouter si la situation le nécessite.

Estimation d'un retard

Le problème consiste à déterminer l'instant d'arrivée d'un signal (ou d'une onde) de forme et d'amplitude connues, lorsque le signal que l'on mesure est entaché d'incertitudes. Une solution classique consiste à calculer la fonction d'intercorrélation entre le signal mesuré et la forme d'onde connue, et à choisir pour instant d'arrivée celui qui maximise la fonction de corrélation. On montre ici que cette solution est en fait une estimation MV, sous des hypothèses probabilistes et de structure que nous précisons ci-après.

On dispose donc de la forme d'onde dont on veut estimer l'instant d'arrivée. Nous modélisons celle-ci par un signal à temps discret connu x_n . Pour pouvoir effectuer numériquement les calculs, on suppose que ce signal ne comporte qu'un nombre fini d'échantillons non nuls. On dispose par ailleurs de mesures z_n qui contiennent une version décalée de x et sont entachées d'incertitudes. En supposant que ces incertitudes sont additives, on peut traduire les hypothèses par le modèle suivant :

$$z_n = x_{n-\tau} + b_n, \quad (4.12)$$

où τ désigne l'instant d'arrivée de la forme d'onde par rapport au signal de référence x , et où b_n représente les incertitudes. L'objet de la procédure d'estimation est de déterminer τ . Formulons maintenant les hypothèses probabilistes. En ce qui concerne les incertitudes b_n , vu le peu d'informations disponibles à leur sujet, on peut les modéliser par des VA gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance σ^2 . Quant à τ , puisqu'on ne dispose d'aucune indication sur ses valeurs vraisemblables, on choisit de lui attribuer une densité *a priori* égale à la fonction constante, ce qui conduit à un estimateur MV. Il nous faut

maintenant exprimer la densité des données observées z_n lorsque l'on suppose τ connu. Or l'équation (4.12) montre que z_n suit la même loi que b_n , à l'exception de sa moyenne qui est décalée de $x_{n-\tau}$. Lorsque l'on suppose τ connu, les mesures peuvent donc être considérées comme des VA indépendantes de loi $\mathcal{N}(x_{n-\tau}, \sigma^2)$ dont la densité a pour expression :

$$f_{Z_n|\tau}(z_n) = \frac{1}{K} \exp\left(-\frac{(z_n - x_{n-\tau})^2}{2\sigma^2}\right),$$

où K désigne la constante de normalisation de la gaussienne. Il s'agit maintenant d'établir l'expression de la densité conditionnelle de l'ensemble des mesures. Pour ce faire, on doit supposer que celles-ci sont en nombre fini N , et que la forme d'onde est incluse dans les N échantillons disponibles. On peut alors écrire, en raison de l'indépendance des incertitudes :

$$\begin{aligned} f_{Z_1 \dots Z_N|\tau}(z_1, \dots, z_N) &= \prod_{n=1}^N f_{Z_n|\tau}(z_n), \\ &= \frac{1}{K^N} \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x_{n-\tau})^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Déterminons maintenant l'estimée de τ . Comme nous avons choisi une densité de probabilité *a priori* uniforme pour τ , l'estimateur est de type MV. On a donc :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{MV}} &= \arg \max_{\tau} f_{Z_1 \dots Z_N|\tau}(z_1, \dots, z_N) \\ &= \arg \max_{\tau} \left\{ \frac{1}{K^N} \exp\left(-\frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x_{n-\tau})^2}{2\sigma^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Maximiser la fonction ci-dessus revient évidemment à minimiser l'opposé de l'argument de l'exponentielle, d'où :

$$\hat{\tau}_{\text{MV}} = \arg \min_{\tau} \left\{ \frac{\sum_{n=1}^N (z_n - x_{n-\tau})^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

En omettant le dénominateur qui n'intervient pas dans la minimisation et en développant le carré, on obtient :

$$\hat{\tau}_{\text{MV}} = \arg \min_{\tau} \left\{ \sum_{n=1}^N z_n^2 + \sum_{n=1}^N x_{n-\tau}^2 - 2 \sum_{n=1}^N z_n x_{n-\tau} \right\}.$$

Le terme $\sum_{n=1}^N z_n^2$ ne dépend pas de τ . Le terme $\sum_{n=1}^N x_{n-\tau}^2$ est lui aussi indépendant de τ ; en effet, comme nous avons supposé que la forme d'onde, donc le signal x , est incluse dans les N échantillons mesurés, on peut faire le changement de variable $p = n - \tau$ sans modifier la valeur de la somme. Les deux premiers

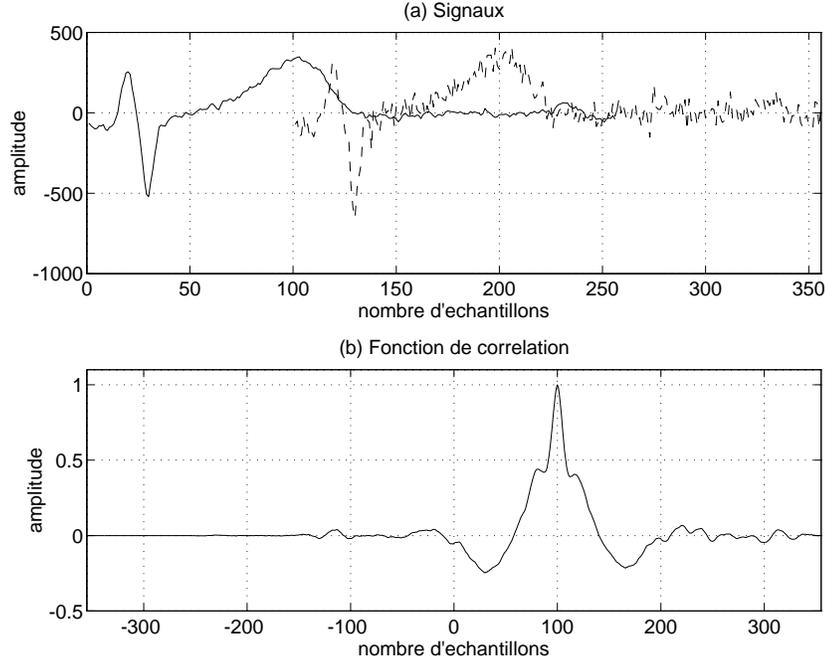


FIGURE 4.2 – Estimation du temps d’arrivée d’un signal par MV. (a) Signaux disponibles : en traits pleins, la forme d’onde originale (période d’électrocardiogramme) ; en traits interrompus, le signal mesuré, version décalée et bruitée du signal original. (b) Fonction de corrélation des deux signaux. Celle-ci présente un pic marqué pour $\tau = 100$ ms, valeur du temps d’arrivée de la forme d’onde dans le signal mesuré. Le maximum de la fonction de corrélation correspond à l’estimée MV du temps d’arrivée.

termes n’interviennent donc pas dans la minimisation. Quant à la troisième somme, on reconnaît en elle l’expression de la fonction de corrélation $\gamma_{xz}(\tau)$ des signaux x et z (voir chapitre 1). Il en découle que :

$$\hat{\tau}_{MV} = \arg \max_{\tau} \{ \gamma_{xz}(\tau) \} ,$$

et l’estimée MV du temps d’arrivée du signal est obtenue comme la valeur qui maximise la fonction de corrélation entre les deux signaux². Ceci justifie donc la technique classique qui consiste à calculer la fonction de corrélation entre la forme d’onde connue et le signal mesuré, et de prendre la valeur qui maximise cette fonction comme estimée de τ . Un exemple d’application est présenté à la figure 4.2. La forme d’onde est constituée par une période d’électrocardiogramme,

2. On pourrait démontrer que ce résultat reste valable lorsque l’on connaît seulement la forme, mais pas l’amplitude de l’onde contenue dans z .

et le signal mesuré est une version décalée de 100 ms et bruitée du signal original. La fonction de corrélation présente un pic marqué pour $\tau = 100$ ms, ce qui permet une bonne estimation de l'instant d'arrivée. Le pic serait beaucoup moins marqué si les conditions d'estimation étaient moins favorables (par exemple, incertitudes sur z plus grandes, signal x plus court, etc.).

4.3.3 Remarque

Soulignons que la démarche présentée ici a un caractère très systématique :

- formulation d'une hypothèse de structure (mise en équation du problème), puis d'hypothèses probabilistes portant sur les incertitudes affectant les mesures et sur la quantité à estimer ;
- utilisation des hypothèses pour exprimer la densité de probabilité conditionnelle des observations et la densité de probabilité *a priori* de la quantité à estimer ;
- définition de l'estimée comme argument maximisant le produit des deux densités calculées à l'étape précédente, et calcul effectif de l'estimée.

Cette approche permet de résoudre l'immense majorité des problèmes rencontrés dans la pratique, du moins en première approximation. Cependant, comme les exemples l'ont montré, l'utilisateur doit faire des choix à chacune des étapes de la résolution du problème d'estimation. Il est souvent amené à émettre des hypothèses qui peuvent se révéler non justifiées. Une partie importante d'une procédure d'estimation consiste donc à remettre en cause les hypothèses émises à la lumière des résultats obtenus, d'en formuler d'autres le cas échéant, voire de faire appel à des méthodes d'estimation plus sophistiquées que celles présentées ici si les conditions le nécessitent.

4.4 Caractéristiques des estimateurs

Les techniques d'estimation que nous avons décrites, aussi intéressantes soient-elles, nous fournissent rarement la valeur *exacte* de la grandeur que l'on cherche à déterminer. Les estimées sont entachées d'erreurs, erreurs qui sont la conséquence des incertitudes qui affectent les mesures. Il est utile de caractériser l'incertitude sur les estimées pour savoir, par exemple, si ces dernières sont généralement loin ou proches de la vraie grandeur. Comme toute quantité incertaine, une estimée peut être caractérisée par sa loi de probabilité. Cependant, une telle loi peut être très difficile, voire impossible à calculer explicitement. De plus, la loi complète de l'estimée peut être trop lourde à manipuler. On préfère généralement « résumer » cette loi par ses caractéristiques au deuxième ordre, soit sa moyenne et sa matrice de covariances. Notons \mathbf{x} la quantité vectorielle à estimer, $\hat{\mathbf{x}}$ son estimée et \mathbf{z} le vecteur contenant l'ensemble des mesures. Les expressions de la moyenne et de la matrice de covariance de l'estimateur sont

obtenues en appliquant les définitions données au paragraphe 3.2.3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}} &\triangleq E[\hat{\mathbf{X}}] \\ \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}} &\triangleq E[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}})(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}})^T]. \end{aligned}$$

Soulignons que, dans les expressions ci-dessus comme dans la suite de cette section, les espérances mathématiques sont à prendre en supposant \mathbf{x} connu. La seule source d'incertitude provient donc des erreurs affectant les observations \mathbf{z} .

$\mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}}$ et $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}}$ nous renseignent respectivement sur la moyenne des valeurs estimées et sur leur dispersion autour de la valeur moyenne. Mais ils nous donnent peu d'indications sur la proximité entre l'estimée et la vraie valeur de \mathbf{x} . Une telle information nous est fournie par le biais $\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{X}}}$ défini comme :

$$\mathbf{b}_{\hat{\mathbf{X}}} \triangleq \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}} - \mathbf{x}.$$

Le biais nous indique simplement si la valeur moyenne de l'estimée est proche de vraie valeur de \mathbf{x} . En d'autres termes, il nous renseigne sur l'existence d'une erreur d'estimation systématique (sur-estimation ou sous-estimation). Mais il ne nous donne aucune indication sur la distance moyenne entre $\hat{\mathbf{x}}$ et \mathbf{x} . En effet, un estimateur centré sur la vraie valeur, mais affecté d'une très grande variance fournira en moyenne des estimées éloignées de la vraie valeur.

Avant de parler de distance moyenne entre $\hat{\mathbf{x}}$ et \mathbf{x} , il est nécessaire de définir préalablement la distance employée. En général, on utilise la distance euclidienne, qui conduit à des calculs simples. On définit alors l'erreur moyenne quadratique de l'estimateur comme la moyenne de la distance euclidienne entre $\hat{\mathbf{x}}$ et \mathbf{x} . On a donc :

$$\text{EMQ}_{\hat{\mathbf{X}}} \triangleq E[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x})^T(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x})].$$

Cette expression peut se mettre sous une forme simple : en écrivant que $\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x} = (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}}) + (\mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}} - \mathbf{x}) = (\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}}) + \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{X}}}$, en développant le produit scalaire et en utilisant la linéarité de l'espérance mathématique, on obtient :

$$\text{EMQ}_{\hat{\mathbf{X}}} = E[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}})^T(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}})] + 2E[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}})^T \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{X}}} + \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{X}}}^T \mathbf{b}_{\hat{\mathbf{X}}}] .$$

Par définition, $E[(\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_{\hat{\mathbf{X}}})] = 0$ ce qui annule le second terme du deuxième membre de l'équation ci-dessus. Le troisième terme est égal au carré de la norme euclidienne du biais de l'estimateur. Quant au premier terme, il représente la somme des termes diagonaux de $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{X}}}$, que l'on appelle généralement variance de l'estimateur. Ceci montre que l'erreur moyenne quadratique est égale à la somme de la variance et du carré de la norme du biais.

En général, une erreur moyenne quadratique minimale est obtenue pour des valeurs non nulles de la variance et du biais. En d'autre termes, il est souvent intéressant de biaiser légèrement l'estimateur, donc d'introduire une petite erreur systématique, afin de réduire la variance, le tout se traduisant par une

diminution de l'erreur moyenne quadratique. C'est précisément ce que font les estimateurs MAP, par l'intermédiaire de la densité *a priori*. Par contre, les estimateurs MV sont généralement non biaisés, mais peuvent présenter une forte variance. On observe ces deux comportements à la figure 4.1 pour les faibles valeurs du nombre de mesures.

Enfin, une caractéristique souhaitable des estimateurs est que l'addition de nouvelles mesures en améliore les performances, et en particulier réduise l'erreur moyenne quadratique. En effet, de nouvelles mesures amènent des informations supplémentaires sur \boldsymbol{x} dont l'estimateur doit être capable de tirer parti. Si l'erreur moyenne quadratique tend vers 0 lorsque le nombre N de mesures tend vers l'infini, \boldsymbol{x} *restant de taille constante*, on dit que l'estimateur est convergent. Cette propriété est vérifiée par les estimateurs MV et MAP sous des hypothèses faibles. La figure 4.1 illustre d'ailleurs cette propriété, la valeur des estimées se rapprochant de la vraie valeur lorsque le nombre de mesures croît.

4.5 Estimation dans le cas linéaire et gaussien

Avant de formuler mathématiquement le problème, il est nécessaire de préciser le vocabulaire et de justifier l'étude du cas linéaire et gaussien. Le qualificatif linéaire s'applique ici à la structure des phénomènes étudiés. L'hypothèse linéaire constitue souvent une première approximation de structures plus complexes et permet en général de mener les calculs assez loin. C'est pourquoi l'hypothèse de structure linéaire est faite fréquemment et mérite une attention particulière.

Le qualificatif gaussien s'applique évidemment aux densités de probabilité qui modélisent le comportement des quantités incertaines intervenant dans le problème. On suppose donc ici que les incertitudes affectant les mesures suivent une loi gaussienne. Si l'on désire introduire une information *a priori* sur la quantité à estimer, on le fera également en utilisant une loi gaussienne. Comme en ce qui concerne l'hypothèse linéaire, l'hypothèse gaussienne a des justifications à la fois physiques et pratiques. Physiques car les processus gaussiens modélisent assez bien certains phénomènes (bruits thermiques ou électroniques par exemple) que l'on rencontre souvent. De plus, lorsque l'on ne connaît que la moyenne et la covariance d'une grandeur incertaine, il est naturel de lui attribuer une loi gaussienne³. Pratiques car les densités de probabilité gaussiennes sont parmi les rares qui soient facilement manipulables et permettent de mener les calculs assez loin. Ceci est d'autant plus vrai dans le cadre d'une hypothèse de structure linéaire, car la transformée linéaire d'une grandeur gaussienne reste gaussienne.

Dans ce qui suit on émet donc les hypothèses de structure linéaire et d'incertitudes gaussiennes, et on étudie la forme des estimateurs MAP et MV correspondants. Le point remarquable est que tous ces estimateurs ont la même structure, qui est elle-même linéaire par rapport aux données observées. Ceci en simplifie considérablement la mise en œuvre, et permet aussi le calcul *récurrent* de la solution. Ces points sont abordés dans la deuxième partie de cette section.

3. Ceci peut être justifié théoriquement en utilisant le principe du maximum d'entropie.

4.5.1 Formulation du problème

On établit ici les équations qui sont à la base des résultats présentés dans la suite de ce chapitre. Pour cela, on adopte un formalisme matriciel qui permet de simplifier considérablement les notations.

On considère que l'on dispose d'un vecteur de mesures \mathbf{z} entachées d'incertitudes, qui dépend linéairement de la quantité vectorielle \mathbf{x} à estimer. Cette dépendance linéaire s'exprime nécessairement par une relation matricielle entre \mathbf{z} et \mathbf{x} . En tenant compte des incertitudes, on peut donc écrire :

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (4.13)$$

où \mathbf{H} représente la relation linéaire entre \mathbf{z} et \mathbf{x} , et où \mathbf{b} désigne le vecteur des incertitudes. L'équation (4.13) traduit l'hypothèse de structure linéaire.

Exprimons maintenant les hypothèses probabilistes : on suppose que les incertitudes \mathbf{b} sont gaussiennes. Ici, nous les supposons de plus de moyenne nulle⁴, et l'on désigne leur matrice de covariance par $\sigma_{\mathbf{B}}^2 \mathbf{R}_{\mathbf{B}}$, où le plus grand élément de la matrice $\mathbf{R}_{\mathbf{B}}$ est normalisé à 1. Cette manière d'écrire la matrice de covariance de \mathbf{b} permet de séparer la variance $\sigma_{\mathbf{B}}^2$, qui représente l'importance des incertitudes, de la matrice de covariance normalisée $\mathbf{R}_{\mathbf{B}}$, qui traduit la corrélation entre les différents éléments du vecteur \mathbf{b} . Si on désire introduire une information *a priori* sur la quantité à estimer, on modélise cette dernière comme un vecteur aléatoire gaussien de moyenne \mathbf{x}_0 et de matrice de covariance $\sigma_{\mathbf{X}}^2 \mathbf{R}_{\mathbf{X}}$, où, comme précédemment, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ désigne la matrice de covariance normalisée de \mathbf{X} .

Établissons l'expression de la densité conditionnelle des données observées et, pour l'estimateur MAP, de la densité *a priori* de \mathbf{X} . Lorsque \mathbf{x} est supposé connu, (4.13) montre que la densité des données observées est identique à celle des incertitudes, sauf pour la moyenne qui est décalée de $\mathbf{H}\mathbf{x}$. D'après nos hypothèses probabilistes, la densité conditionnelle des observations est donc une gaussienne de moyenne $\mathbf{H}\mathbf{x}$ et de covariance $\sigma_{\mathbf{B}}^2 \mathbf{R}_{\mathbf{B}}$ qui a pour expression (voir le paragraphe 3.2.3) :

$$f_{\mathbf{z}|\mathbf{X}=\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{\mathbf{B}}^2)^{N/2} |\mathbf{R}_{\mathbf{B}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_{\mathbf{B}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{2\sigma_{\mathbf{B}}^2}\right), \quad (4.14)$$

où N désigne la taille du vecteur \mathbf{z} . D'après nos hypothèses, dans le cas de l'estimateur MAP, la densité *a priori* de la quantité à estimer prend la forme :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{\mathbf{X}}^2)^{P/2} |\mathbf{R}_{\mathbf{X}}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{R}_{\mathbf{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{2\sigma_{\mathbf{X}}^2}\right), \quad (4.15)$$

où P désigne la taille du vecteur \mathbf{x} . Les équations (4.14) et (4.15) permettent d'établir l'expression exacte des estimées MV et MAP, comme nous le montrons au paragraphe suivant.

4. Le cas d'une moyenne non nulle ne pose pas de difficulté, mais est de peu d'intérêt pratique et alourdit les équations.

4.5.2 Forme compacte des estimateurs

Estimateur MAP

D'après la définition (4.4), l'estimée MAP de \mathbf{x} est définie par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} \triangleq \arg \max_{\mathbf{x}} \{f_{Z|X=\mathbf{x}}(z) f_X(\mathbf{x})\}.$$

En remplaçant les densités de probabilité par les expressions obtenues au paragraphe précédent, et en omettant les coefficients de normalisation qui n'interviennent pas dans la maximisation, on obtient :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \left\{ \exp \left(-\frac{(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_B^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{2\sigma_B^2} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{R}_X^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{2\sigma_X^2} \right) \right\}.$$

Maximiser une exponentielle étant équivalent à minimiser l'opposé de son argument, on aboutit finalement à :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_B^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{2\sigma_B^2} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{R}_X^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{2\sigma_X^2} \right\}.$$

La fonction entre accolades est une forme quadratique. Pour trouver l'argument de son minimum, il suffit d'écrire que son gradient est nul. Le calcul d'un tel gradient est détaillé à l'annexe B. Ici, on obtient :

$$-\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{\sigma_B^2} + \frac{\mathbf{R}_X^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\sigma_X^2} = 0.$$

Retrancher le terme $\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} \mathbf{H}\mathbf{x}_0 / \sigma_B^2$ aux deux membres de l'équation ci-dessus conduit à :

$$-\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\sigma_B^2} + \frac{\mathbf{R}_X^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\sigma_X^2} = -\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} \mathbf{H}\mathbf{x}_0}{\sigma_B^2},$$

d'où :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} \mathbf{H}}{\sigma_B^2} + \frac{\mathbf{R}_X^{-1}}{\sigma_X^2} \right)^{-1} \frac{\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1}}{\sigma_B^{-1}} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0),$$

ou encore, en intégrant le coefficient σ_B^{-1} dans le premier facteur du deuxième terme du second membre :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MAP}} = \mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} \mathbf{H} + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_X^2} \mathbf{R}_X^{-1} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_B^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0). \quad (4.16)$$

L'équation ci-dessus donne la forme générale d'une estimée MAP sous hypothèses linéaires et gaussiennes. Quelques points méritent d'être soulignés. Tout

d'abord, l'estimée apparaît comme une fonction explicite des données. Ceci simplifie la mise en œuvre de l'estimateur, puisqu'il n'est pas nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques d'optimisation. Ensuite, cette fonction explicite est linéaire (ou plus précisément affine) ; ceci simplifie encore plus la mise en œuvre, puisque le calcul de l'estimée fait uniquement appel à des inversions de matrices et des produits matriciels. Mentionnons que la matrice dont l'inverse apparaît dans (4.16) est souvent appelée *matrice normale* du problème. Au cours des calculs ci-dessus, il a été implicitement supposé de cette matrice normale est inversible. Cette hypothèse est toujours vérifiée lorsque le terme $\sigma_{\mathbf{B}}^2/\sigma_{\mathbf{X}}^2$ est non nul. Enfin, soulignons l'importance du rapport $\sigma_{\mathbf{B}}^2/\sigma_{\mathbf{X}}^2$, qui règle une grande partie du compromis entre l'information *a priori* sur \mathbf{x} et l'information apportée par les mesures.

Estimateur MV

D'après la définition (4.5), l'estimée MV de \mathbf{x} est définie par :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MV}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \{f_{Z|\mathbf{X}=\mathbf{x}}(z)\} .$$

En remplaçant la densité de probabilité conditionnelle par son expression obtenue précédemment et en omettant la constante de normalisation, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\text{MV}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \left\{ \exp \left(-\frac{(z - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_{\mathbf{B}}^{-1} (z - \mathbf{H}\mathbf{x})}{2\sigma_{\mathbf{B}}^2} \right) \right\} , \\ &= \arg \min_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{(z - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{R}_{\mathbf{B}}^{-1} (z - \mathbf{H}\mathbf{x})}{2\sigma_{\mathbf{B}}^2} \right\} . \end{aligned}$$

Ici encore, la fonction à minimiser est une forme quadratique. Annuler son gradient conduit à :

$$-\frac{\mathbf{H}^T \mathbf{R}_{\mathbf{B}}^{-1} (z - \mathbf{H}\mathbf{x})}{\sigma_{\mathbf{B}}^2} = 0 ,$$

d'où

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MV}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}_{\mathbf{B}}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{\mathbf{B}}^{-1} z . \quad (4.17)$$

La comparaison des expressions des estimateurs MAP et MV amène les commentaires suivants. Tout d'abord, l'estimée MV est elle aussi une fonction explicite et linéaire des observations, ce qui présente les mêmes avantages de la mise en œuvre. Ensuite, l'estimateur MV peut être obtenu comme cas particulier de l'estimateur MAP en prenant $\sigma_{\mathbf{B}}^2/\sigma_{\mathbf{X}}^2 = 0$. \mathbf{x}_0 disparaît alors de (4.16) et on obtient exactement (4.17). Ceci s'interprète de la manière suivante : faire tendre $\sigma_{\mathbf{B}}^2/\sigma_{\mathbf{X}}^2$ vers 0 ou $\sigma_{\mathbf{X}}^2$ vers l'infini revient à supposer que les valeurs vraisemblables de \mathbf{x} couvrent un domaine de plus en plus grand. À la limite, \mathbf{x} peut *a priori* prendre n'importe quelle valeur, ce qui traduit une absence d'information *a priori* sur \mathbf{x} . Ceci correspond exactement à l'hypothèse formulée en estimation MV, qui se traduit ici très simplement sous forme algébrique.

Par ailleurs, indiquons que la matrice normale de l'estimateur MV peut ne pas être régulière. Ceci traduit algébriquement que l'information contenue dans

les mesures est trop pauvre pour permettre l'estimation de \mathbf{x} . Ceci contraste avec la situation rencontrée en estimation MAP, ou un possible manque d'information dans les mesures est compensé par l'information *a priori* sur \mathbf{x} , ce qui garantit la régularité de la matrice normale.

Enfin, en supposant que les incertitudes sur les mesures sont non corrélées, ce qui se traduit par $\mathbf{R}_B = \mathbf{I}$ où \mathbf{I} désigne l'identité, on obtient l'estimateur des moindres carrés, dont l'expression est la suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MC}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z}. \quad (4.18)$$

Cette estimateur est certainement celui qui est le plus utilisé. Il correspond aussi à une information très pauvre sur le système, puisque aucune hypothèse n'est émise sur \mathbf{x} et que la seule hypothèse sur les incertitudes affectant les mesures est qu'elles sont non corrélées et de moyenne nulle.

Choix d'un estimateur

Nous donnons ici des éléments de réponse à la question suivante : dans une situation pratique, quel estimateur choisir et, le cas échéant, comment spécifier des paramètres tels que la moyenne *a priori* \mathbf{x}_0 , la matrice de covariance du bruit \mathbf{R}_B , etc. ?

Notons tout d'abord que les questions de mise en œuvre ne sont pas déterminantes pour faire un choix. En effet, les estimateurs auxquels nous avons abouti sont tous des fonctions explicites, linéaires ou affines, des mesures \mathbf{z} . Le choix se fait donc essentiellement en fonction de la difficulté du problème d'estimation (c'est à dire du contraste entre \mathbf{x} et les incertitudes sur les mesures), qui dépend principalement de trois paramètres :

- la taille respective de \mathbf{x} et \mathbf{z} . Plus ce rapport se rapproche de 1 (il peut même dépasser cette valeur), plus l'estimation de \mathbf{x} est difficile ;
- la nature de \mathbf{H} . La transformation linéaire modélisée par \mathbf{H} peut, dans certains cas, atténuer ou supprimer certaines caractéristiques de \mathbf{x} . Par exemple, si \mathbf{H} représente un filtrage passe bas, les composantes à hautes fréquences de \mathbf{x} ne seront pas présentes dans \mathbf{z} et seront donc très difficile à déterminer sans apport d'information *a priori*. En règle générale, plus \mathbf{H} a tendance à réduire le spectre de \mathbf{x} , plus le problème d'estimation est difficile ;
- l'importance relative des incertitudes \mathbf{b} dans les mesures \mathbf{z} . Plus celles-ci sont grandes, plus l'information sur \mathbf{x} présente dans \mathbf{z} est difficile à extraire, et plus l'estimation de \mathbf{x} est difficile.

Une fois que l'on a évalué la difficulté du problème d'estimation, il est recommandé de procéder avec prudence, c'est à dire d'introduire le minimum d'information *a priori* nécessaire pour obtenir une solution satisfaisante. De cette manière, on évite de trop restreindre le domaine des solutions vraisemblables, et donc de nuire à la généralité de la méthode. C'est pourquoi on commence généralement par mettre en œuvre et tester un estimateur des moindres carrés. Si les résultats ne donnent pas satisfaction et si la cause peut en être attribuée à

une information insuffisante dans les mesures, on peut tester un estimateur MV avec une matrice $\mathbf{R}_B \neq \mathbf{I}$. Cependant, l'amélioration correspondante est bien souvent très limitée; l'étape suivante consiste alors à essayer un estimateur avec des matrices \mathbf{R}_X et \mathbf{R}_B égales à l'identité. Le seul paramètre de réglage de la méthode est alors le rapport σ_B^2/σ_X^2 , que l'on fait varier sur un large domaine. Selon la nature des résultats obtenus, on peut ensuite introduire des informations *a priori* de corrélation des incertitudes (par l'intermédiaire de \mathbf{R}_B) et/ou de « douceur » de la quantité \mathbf{x} (par l'intermédiaire de \mathbf{R}_X). L'amélioration correspondante est généralement moins spectaculaire que lors du passage d'un estimateur des moindres carrés à un estimateur MAP. Le comportement de ces estimateurs dans différentes conditions est illustré au paragraphe 4.5.4.

Signalons enfin qu'il existe des méthodes permettant de choisir les paramètres de réglage de la méthode (en particulier le coefficient σ_B^2/σ_X^2) automatiquement à partir des mesures \mathbf{z} . L'étude de telles méthodes, que l'on peut interpréter comme des estimateurs, dépasse le cadre de ce document.

4.5.3 Forme récurrente des estimateurs

Dans ce paragraphe, on présente une technique permettant le calcul des estimateurs présentés précédemment tout en tenant compte de caractéristiques particulières de certains problèmes rencontrés en génie biomédical. Dans ce domaine, le volume de données est souvent très important, ce qui peut rendre malaisé le calcul d'une solution sous forme compacte en raison de la taille des matrices à manipuler. D'autre part, les phénomènes étudiés dépendent fréquemment du temps. Il est intéressant de tenir compte de cette dépendance et d'obtenir des procédures fonctionnant en *temps réel* ou capables de traiter les données *en ligne*.

L'algorithme des moindres carrés récurrents (MCR) présenté ici est basé sur une récurrence sur la dimension du vecteur \mathbf{z} , et permet précisément de tenir compte de telles caractéristiques. Il s'applique aux calculs des estimées MAP et MV dont l'expression est donnée en (4.16) et (4.17). Pour simplifier le problème, on considère dans la suite de ce paragraphe que la matrice \mathbf{R}_B est égale à l'identité, ce qui équivaut à supposer que les incertitudes sur les mesures \mathbf{z} sont non corrélées.

Résultat préliminaire : lemme d'inversion de matrice

Le principal outil nécessaire pour établir les équations de l'algorithme MCR est l'algèbre matricielle. En particulier, on utilise fréquemment le *lemme d'inversion de matrice* dont l'énoncé est le suivant :

- Soient \mathbf{A} et \mathbf{C} deux matrices carrées régulières, et \mathbf{B} et \mathbf{D} deux matrices quelconques dont les dimensions soient telles que $\dim(\mathbf{A}) = \dim(\mathbf{BCD})$. Si $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$ est une matrice régulière, alors :
1. $\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B}$ est une matrice régulière ;

$$2. (A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}.$$

Pour prouver la première partie du lemme, il suffit d'exhiber l'inverse de $C^{-1} + DA^{-1}B$. Si le second point est vrai, cet inverse ne peut qu'être égal à $C - CD(A + BCD)^{-1}BC$. Cette dernière écriture a un sens puisque $A + BCD$ est supposée régulière. On calcule donc le produit de matrices P défini par :

$$P = (C^{-1} + DA^{-1}B)(C - CD(A + BCD)^{-1}BC).$$

En développant le produit ci dessus, il vient :

$$P = I - D((A + BCD)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}BCD(A + BCD)^{-1})BC,$$

et, en mettant le terme $(A + BCD)^{-1}$ en facteur dans la parenthèse, on obtient :

$$P = I - D((I + A^{-1}BCD)(A + BCD)^{-1} - A^{-1}).$$

L'équation ci-dessus peut encore s'écrire :

$$P = I - D(A^{-1}(A + BCD)(A + BCD)^{-1} - A^{-1}),$$

et on obtient donc immédiatement :

$$P = I,$$

ce qui démontre la régularité de $C^{-1} + DA^{-1}B$. Pour prouver le second point, il suffit de montrer que :

$$(A + BCD)(A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}) = I.$$

Ce résultat s'établit par des calculs en tous points analogues à ceux que nous venons de présenter. Le lemme d'inversion de matrice est souvent utilisé dans le cas particulier où $C = 1$ et $B = D^T = \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est un vecteur de dimension appropriée ; il prend alors la forme :

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}\mathbf{u}(1 + \mathbf{u}^T A^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{u}^T A^{-1}.$$

Établissement des équations récurrentes

Pour établir les équations de l'algorithme, on part de l'expression de l'estimée MAP dans le cas où $R_B = I$, soit :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_X^2} \mathbf{R}_X^{-1} \right)^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}_0).$$

Le calcul de l'estimée MV se déduit immédiatement de celui de l'estimée MAP en choisissant un rapport σ_B^2/σ_X^2 égal à 0. L'objectif est d'introduire une récurrence sur le nombre n de données observées. Plusieurs quantités, fixes jusqu'à présent, dépendent maintenant de l'indice n . C'est évidemment le cas du vecteur

d'observation qui, à l'instant n , est désigné par \mathbf{z}_n . La matrice \mathbf{H} , de dimensions (n, P) est elle aussi indexée par n . Le vecteur \mathbf{x} à estimer a une dimension fixe P . Par contre, la valeur (et non la taille) de l'estimée dépend du nombre d'observations utilisées pour en faire le calcul, et on la désigne par $\hat{\mathbf{x}}_n$ à l'instant n . Celle-ci prend donc l'expression :

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x}_0 + \left(\mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_X^2} \mathbf{R}_X^{-1} \right)^{-1} \mathbf{H}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \mathbf{x}_0). \quad (4.19)$$

De manière à alléger les notations, on pose :

$$\mathbf{P}_n \triangleq \left(\mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_X^2} \mathbf{R}_X^{-1} \right)^{-1}. \quad (4.20)$$

Les équations de l'algorithme récurrent s'établissent en considérant que l'on dispose d'une estimée obtenue à partir du vecteur \mathbf{z}_n de taille n , et en évaluant les variations de cette estimée lorsque l'on tient compte d'une $(n+1)^{\text{e}}$ mesure z_{n+1} . Pour cela, on écrit l'expression de $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$, qui, avec les notations introduites ci-dessus, prend la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{H}_{n+1}^T (\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{H}_{n+1} \mathbf{x}_0). \quad (4.21)$$

Puis on partitionne \mathbf{H}_{n+1} et \mathbf{z}_{n+1} :

$$\mathbf{H}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n \\ \dots \\ \mathbf{h}_{n+1}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_{n+1} = \begin{pmatrix} z_n \\ \dots \\ z_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

où \mathbf{h}_{n+1}^T désigne la dernière ligne de \mathbf{H}_{n+1} . \mathbf{h}_{n+1} est donc un vecteur de dimension P . Ce partitionnement de \mathbf{H}_{n+1} et \mathbf{z}_{n+1} est compatible avec l'établissement de formules récurrentes car, à tout instant n , \mathbf{H}_n et \mathbf{z}_n font partie des données du problème. D'après (4.20) et (4.22), et en utilisant les règles de calcul pour les matrices décrites par blocs, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1} &= \left(\mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_X^2} \mathbf{R}_X^{-1} + \mathbf{h}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1}^T \right)^{-1}, \\ &= \left(\mathbf{P}_n^{-1} + \mathbf{h}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1}^T \right)^{-1}. \end{aligned}$$

De l'égalité ci-dessus, on déduit immédiatement que :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{P}_n^{-1} &= \mathbf{P}_{n+1} (\mathbf{P}_n^{-1} - \mathbf{h}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1}^T), \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1}^T. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Utilisons maintenant le partitionnement de \mathbf{H}_{n+1} et \mathbf{z}_{n+1} pour développer l'expression de l'estimée $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$ donnée en (4.21). On obtient :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}_{n+1} (\mathbf{H}_n^T (\mathbf{z}_n - \mathbf{H}_n \mathbf{x}_0) + \mathbf{h}_{n+1} (z_{n+1} - \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{x}_0)).$$

Or, d'après (4.19) et (4.20), le terme $\mathbf{H}_n^T(z_n - \mathbf{H}_n \mathbf{x}_0)$ qui intervient dans l'expression ci-dessus est égal à $\mathbf{P}_n^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_0)$. On a donc :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{P}_n^{-1}(\hat{\mathbf{x}}_n - \mathbf{x}_0) + \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1}(z_{n+1} - \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{x}_0),$$

ce qui, en utilisant l'identité (4.23) et en éliminant les termes qui se compensent, conduit à :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{P}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} (z_{n+1} - \mathbf{h}_{n+1}^T \hat{\mathbf{x}}_n). \quad (4.24)$$

L'équation ci-dessus est une relation de récurrence entre $\hat{\mathbf{x}}_{n+1}$ et $\hat{\mathbf{x}}_n$; on observe qu'elle ne fait pas intervenir \mathbf{x}_0 . Par contre, elle dépend de la matrice \mathbf{P}_{n+1} . Pour obtenir un algorithme récurrent, il faut exprimer cette matrice en fonction de quantités connues à l'instant n , ce que l'on fait en appliquant le lemme d'inversion de matrice à l'expression (4.23). On obtient :

$$\mathbf{P}_{n+1} = \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1} (1 + \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1})^{-1} \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n.$$

En multipliant à droite les deux membres de l'égalité ci-dessus par \mathbf{h}_{n+1} et en utilisant l'identité :

$$(1 + \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1})^{-1} \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1} = 1 - (1 + \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1})^{-1},$$

on aboutit à :

$$\mathbf{P}_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} = \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1} (1 + \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1})^{-1}.$$

En reportant cette expression dans (4.24) et en définissant les quantités :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n &\triangleq \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1}, \\ r_n &\triangleq 1 + \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1}, \end{aligned}$$

on obtient finalement la forme classique de l'algorithme MCR :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{n+1} &= \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{k}_n r_n^{-1} (z_{n+1} - \mathbf{h}_{n+1}^T \hat{\mathbf{x}}_n), \\ \mathbf{k}_n &= \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1}, \\ r_n &= 1 + \mathbf{h}_{n+1}^T \mathbf{P}_n \mathbf{h}_{n+1}, \\ \mathbf{P}_{n+1} &= \mathbf{P}_n - \mathbf{k}_n r_n^{-1} \mathbf{k}_n^T. \end{cases} \quad (4.25)$$

L'algorithme ci-dessus permet le calcul récurrent de l'estimée puisque, à la $(n+1)^{\text{e}}$ itération il n'utilise que les quantités fournies par l'algorithme à l'itération précédente ($\hat{\mathbf{x}}_n$ et \mathbf{P}_n) et celles qui caractérisent le système à l'instant $n+1$ (z_{n+1} et \mathbf{h}_{n+1}). On observe par ailleurs que les quantités $\sigma_{\mathbf{B}}^2$, $\sigma_{\mathbf{X}}^2$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ n'interviennent pas explicitement dans l'algorithme. Celui-ci peut donc être utilisé indifféremment pour le calcul d'une estimée MAP ou MV. La différence intervient seulement à l'initialisation de l'algorithme, et c'est point le que nous abordons maintenant.

Initialisation de l'algorithme

Dans le cas d'un estimateur MAP, l'initialisation de l'algorithme ne pose aucune difficulté. Il suffit en effet de choisir pour instant initial l'instant $n = 0$, c'est à dire celui qui précède la première observation. D'après (4.20), le terme $\mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n$ disparaît de l'expression de la matrice \mathbf{P}_n , et on a donc :

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_B^2} \mathbf{R}_X .$$

De même, on prend pour valeur estimée de \mathbf{x} avant la première mesure la valeur moyenne *a priori* de \mathbf{X} , soit :

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 .$$

L'estimateur MV est obtenu à partir de l'estimateur MAP en faisant tendre σ_X^2 vers l'infini. On voit alors qu'il n'est pas possible d'initialiser l'algorithme MCR comme précédemment, puisque, d'après (4.20), le terme $(\sigma_B^2/\sigma_X^2) \mathbf{R}_X^{-1}$ n'apparaît plus dans l'expression de \mathbf{P}_n . En toute rigueur, on doit choisir un instant initial n_0 tel que $\mathbf{P}_{n_0} = (\mathbf{H}_{n_0}^T \mathbf{H}_{n_0})^{-1}$ soit définie, calculer exactement \mathbf{P}_{n_0} et en déduire la valeur correspondante de $\hat{\mathbf{x}}_{n_0}$ à l'aide de la forme compacte de l'estimateur (4.18). Pour assurer la régularité de la matrice $\mathbf{H}_{n_0}^T \mathbf{H}_{n_0}$, on est contraint de choisir un instant initial $n_0 \geq P$. Une telle initialisation présente deux inconvénients majeurs. D'une part, elle brise l'homogénéité du traitement en introduisant deux phases : $n \leq n_0$ et $n > n_0$. D'autre part, elle requiert l'inversion d'une matrice de dimension (P, P) alors que l'une des caractéristiques intéressantes de l'algorithme MCR (4.25) est de ne demander aucune inversion de matrice. Pour ces raisons, on recommande souvent de choisir $n_0 = 0$ comme instant initial et de prendre :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \lambda \mathbf{I} \quad , \quad \lambda \text{ grand} , \\ \hat{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{0} . \end{aligned}$$

Une telle technique d'initialisation, souvent présentée comme une astuce peu avouable car non conforme à la théorie, prend tout son sens si on l'interprète dans un cadre bayésien. En effet, on est ramené à l'estimateur MAP avec une matrice de covariance *a priori* très grande, donc une information *a priori* très peu contraignante. Une telle manière de procéder se justifie d'autant plus que le poids de l'*a priori* diminue en proportion du nombre d'observations traitées. Dans la pratique, la valeur de l'estimée devient assez rapidement indépendante des conditions initiales choisies. On se trouve donc dans une situation où une information *a priori* minimale permet de faire fonctionner une méthode sans pour autant contraindre la solution de manière sensible.

Remarques

Soulignons tout d'abord la structure du système d'équations (4.25) qui définit l'algorithme MCR. La première de ces équations sert à remettre à jour

l'estimée de \mathbf{x} selon une structure très classique puisqu'elle est de la forme :

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \hat{\mathbf{x}}_n + \varphi(\varepsilon_n)$$

où ε_n désigne l'erreur entre une valeur observée et une valeur prédite à l'aide du modèle disponible à l'instant n . De nombreux algorithmes d'optimisation récurrents sont de cette forme. Ici, la fonction φ est linéaire, ce qui est la conséquence directe de la structure linéaire des estimateurs étudiés. Le calcul de cette fonction φ est effectué par les trois dernières équations du système (4.25), et on remarque que celles-ci sont indépendantes des mesures \mathbf{z} . Par conséquent, on peut imaginer de calculer à l'avance l'ensemble des produits $\mathbf{k}_n r_n^{-1}$, ce qui permet ensuite une estimation *en ligne* de \mathbf{x} avec un minimum de calculs. Cette propriété peut être utilisée dans des situations où l'on désire suivre en temps réel l'évolution de l'estimée tout en ne disposant que d'une puissance de calcul limitée.

En ce qui concerne le volume de calcul, un décompte précis du nombre d'opération nécessaire pour calculer l'estimée sous forme compacte et avec l'algorithme MCR ne montre aucun avantage marquant pour l'une ou l'autre approche, du moins dans le cas le plus courant où N est très supérieur à P . L'intérêt de l'algorithme MCR ne réside donc pas dans une réduction du volume des calculs, mais plutôt dans la possibilité de traiter les données en ligne et dans une simplification de la mise en œuvre. En effet, bien que le système (4.25) nécessite le stockage de la matrice \mathbf{P}_n de dimension (P, P) ce qui peut être pénalisant si \mathbf{x} est de très grande dimension, aucune inversion de matrice n'est requise pour calculer la solution. De plus, l'algorithme MCR ne nécessite pas le stockage de la totalité du vecteur \mathbf{z} , mais seulement de la mesure z_n à l'instant courant. Il peut d'ailleurs fonctionner sans connaissance préalable du nombre total de mesures N .

Par ailleurs, les quantités \mathbf{P}_n et r_n que nous avons introduites comme des intermédiaires de calcul ont une interprétation statistique : \mathbf{P}_n représente, à un terme de normalisation près, la matrice de covariance de l'estimateur, et r_n est la variance de la quantité $\varepsilon_n = z_{n+1} - \mathbf{h}_{n+1}^T \hat{\mathbf{x}}_n$. En pratique, cela signifie que la matrice \mathbf{P}_n est nécessairement symétrique définie positive, et que r_n est lui aussi positif. Or on observe que des instabilités numériques se manifestent dans l'algorithme MCR lorsque \mathbf{P}_n ou r_n perd cette propriété. On dispose ainsi à la fois d'indicateurs d'instabilité et de moyens d'améliorer la stabilité numérique de l'algorithme. On peut par exemple assurer la symétrie de \mathbf{P}_n en ne calculant qu'une de ses sous-matrices triangulaires supérieure ou inférieure, (ou en faisant la moyenne des deux). On peut aussi surveiller le signe de r_n pour, le cas échéant, réinitialiser l'algorithme. Des techniques plus sophistiquées, faisant appel à la décomposition de \mathbf{P}_n en *racine carrée*, ont également été proposées.

Enfin, insistons particulièrement sur le fait que, dans une situation donnée, il faut distinguer très nettement d'une part ce qui a trait aux hypothèses émises et à l'estimateur utilisé, et d'autre part ce qui a trait à l'algorithme employé. En effet, un algorithme n'est qu'une technique de calcul d'un estimateur particulier qui, si la représentation numérique des données avait une précision

parfaite, fournirait un résultat identique à celui donné par la forme compacte. Dans la pratique, les erreurs d'arrondi liées à la représentation des données avec un nombre fini de bits produisent une dégradation de la performance des estimateurs par rapport aux résultats théoriques. Ceci est vrai pour toute la méthode numérique, qu'elle soit récurrente ou pas. Nous venons de voir que, pour l'algorithme MCR, quelques précautions simples permettent de limiter considérablement l'importance des erreurs d'origine purement numérique. Par conséquent, les résultats d'estimation doivent être interprétés plus en fonction des hypothèses émises et des performances théoriques de l'estimateur choisi que de la technique algorithmique particulière employée pour calculer la solution.

4.5.4 Exemple

L'objet de ce paragraphe est double : d'une part, indiquer une nouvelle fois comment un problème que l'on rencontre en génie biomédical peut être mis en équation pour permettre l'application des techniques exposées ci-dessus ; d'autre part, illustrer concrètement l'effet des divers paramètres qui influent sur la difficulté d'un problème d'estimation. L'exemple choisi est l'identification d'un système linéaire représenté par sa réponse impulsionnelle. Un tel problème se pose entre autres en modélisation de systèmes biologiques.

Mise en équation du problème

On suppose que l'on dispose de mesures de l'entrée x et de la sortie z du système inconnu. On émet l'hypothèse que le système est linéaire, et qu'il est possible de le représenter par une réponse impulsionnelle *finie* h . En supposant de plus que les incertitudes b se comportent de manière additive sur le signal de sortie, on peut écrire :

$$z = h * x + b.$$

Plaçons nous maintenant à l'instant n , et supposons que la réponse impulsionnelle du système ait au plus P éléments non nuls h_0, h_1, \dots, h_{P-1} . D'après la définition de la convolution en temps discret, l'équation ci-dessus prend la forme suivante :

$$z_n = \sum_{p=0}^{P-1} h_p x_{n-p} + b_n. \quad (4.26)$$

Or on reconnaît dans le premier terme du second membre le produit scalaire entre le vecteur \mathbf{h} qui contient les échantillons inconnus de la réponse impulsionnelle et un vecteur \mathbf{x}_n de taille P défini par :

$$\mathbf{x}_n \triangleq (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-P+1})^T.$$

On peut donc réécrire (4.26) sous la forme :

$$z_n = \mathbf{x}_n^T \mathbf{h} + b_n \quad (4.27)$$

En supposant que l'on dispose de N mesures de la sortie du système, et en concaténant les équations (4.27) lorsque n varie de 1 à N , on aboutit à :

$$\mathbf{z} = \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{b}, \quad (4.28)$$

où les vecteurs \mathbf{z} et \mathbf{b} contiennent respectivement les N échantillons de la sortie et des incertitudes, et où la n^{e} ligne de la matrice \mathbf{X} est égale au vecteur \mathbf{x}_n^T . L'équation qui modélise le système étudié est donc de la même forme que (4.13) et, à condition d'émettre une hypothèse gaussienne sur la distribution des incertitudes \mathbf{b} et sur la loi *a priori* de \mathbf{h} , on peut appliquer directement les résultats établis à la section 4.5. Nous supposons que les incertitudes sont indépendantes les unes des autres, ce qui revient à prendre $\mathbf{R}_B = \mathbf{I}$ et que, dans le cas MAP, la moyenne *a priori* de \mathbf{h} est nulle. Les estimateurs MAP et MV prennent donc la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_{\text{MAP}} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \lambda \mathbf{R}_H^{-1})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{z}, \\ \hat{\mathbf{h}}_{\text{MV}} &= (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{z}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda \triangleq \sigma_B^2 / \sigma_H^2$. Ces estimateurs peuvent être mis en œuvre indifféremment sous la forme compacte ou sous la forme récurrente exposées aux paragraphes précédents.

Résultats

Afin d'illustrer le comportement des deux estimateurs ci-dessus, nous avons simulé un système passe-bas du troisième ordre dont la réponse impulsionnelle, qui comporte $P = 32$ échantillons non nuls, est représentée à la figure 4.3. Ce modèle représente assez bien la relation pression-débit dans le lit vasculaire pulmonaire. Nous avons ensuite utilisé des entrées pseudo-aléatoires de taille et de nature différentes, et ajouté à la sortie correspondante un bruit blanc gaussien indépendant de l'entrée de manière à obtenir un rapport signal à bruit (défini comme le rapport des puissances respectives de la sortie et du bruit) de 20 dB et 0 dB.

Dans la première expérience, l'entrée choisie était un signal blanc de taille $N = 256$ précédé de valeurs nulles, et le rapport signal-à-bruit était de 20 dB. Ces conditions d'estimation sont favorables car nous avons un rapport N/P élevé et de faibles incertitudes sur les mesures. De plus, l'entrée, étant un signal blanc, va stimuler le système à toutes les fréquences et donc favoriser son identification. Les résultats obtenus avec l'estimateur MV sont présentés à la figure 4.4. Ils sont conformes à ce que l'on pouvait attendre, c'est à dire de très bonne qualité, l'estimée se distinguant à peine de la vraie valeur. L'utilisation d'un estimateur MAP fournirait des résultats extrêmement voisins.

Nous nous sommes ensuite placés dans les mêmes conditions que précédemment, mais avec un rapport signal-à-bruit de 0 dB. Ceci correspond à des conditions moins favorables, car la puissance des incertitudes est maintenant du même ordre de grandeur que celle des mesures. C'est ce que montre la figure 4.5 où les

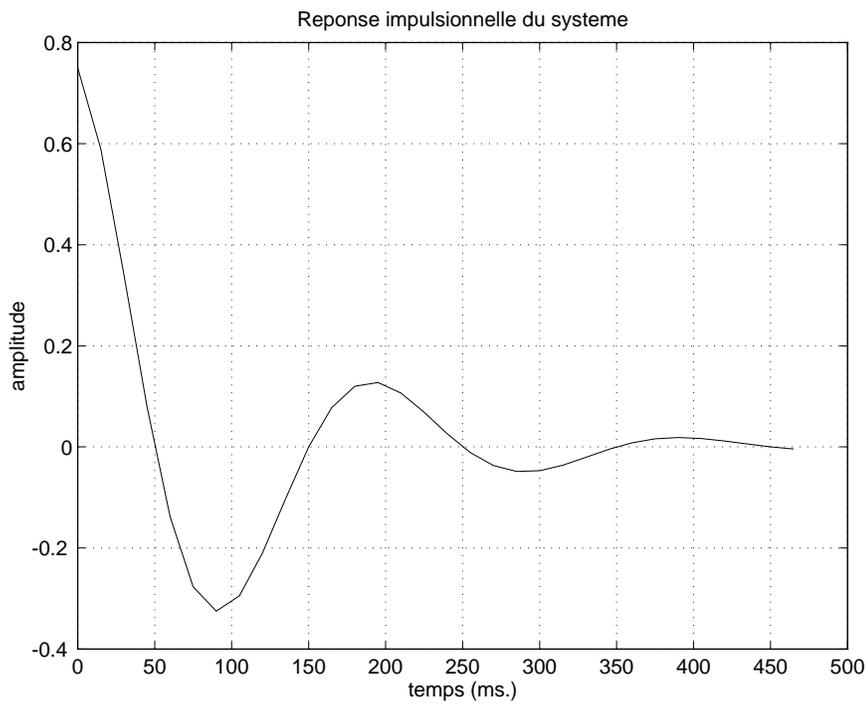


FIGURE 4.3 – Réponse impulsionnelle du système simulé. Celle-ci comporte $P = 32$ échantillons non nuls et représente un système passe-bas du 3^e ordre, qui modélise assez bien la relation pression-débit dans le lit vasculaire pulmonaire.

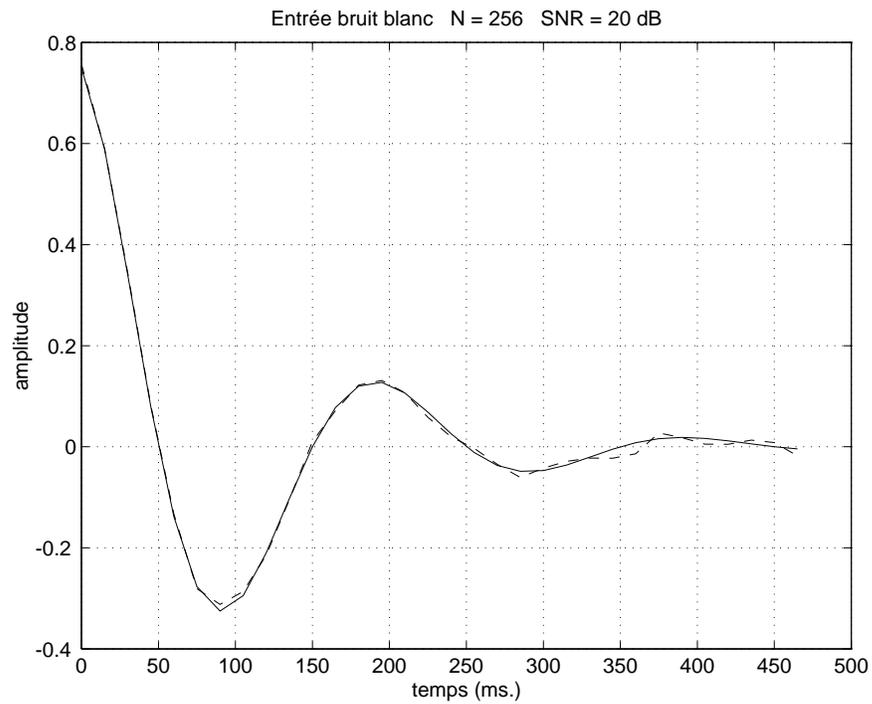


FIGURE 4.4 – Résultats d'identification obtenus avec l'estimateur MV dans les conditions suivantes : entrée blanche comprenant $N = 256$ échantillons, rapport signal-à-bruit de 20 dB. En traits pleins : réponse impulsionnelle à estimer. En traits interrompus : résultats obtenus. Ces résultats sont de bonne qualité en raison des conditions d'estimation favorables.

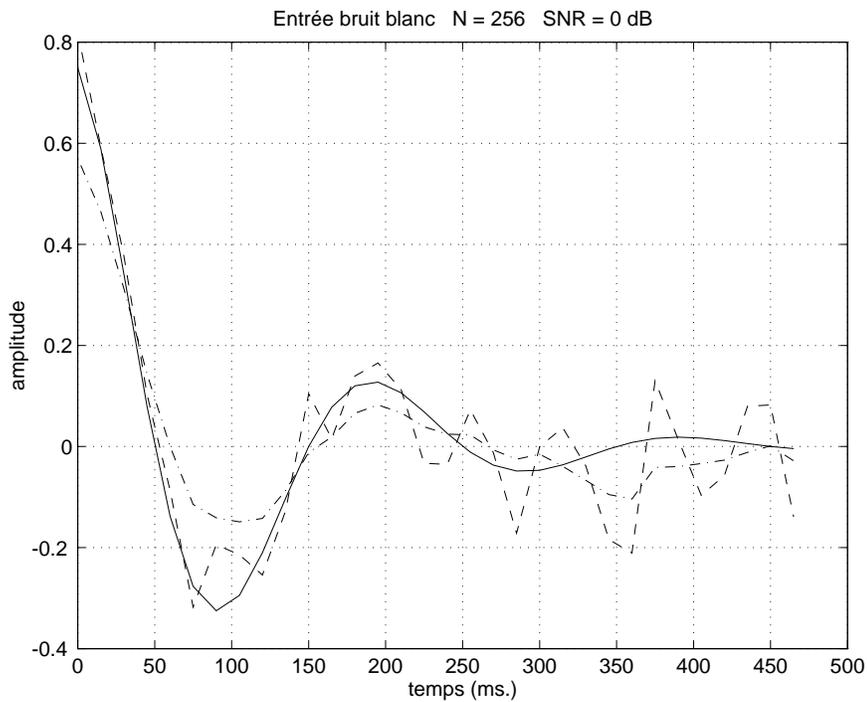


FIGURE 4.5 – Résultats d'identification obtenus avec les estimateurs MV et MAP dans les conditions suivantes : entrée blanche comprenant $N = 256$ échantillons, rapport signal-à-bruit de 0 dB. En traits pleins : réponse impulsionnelle à estimer. En traits interrompus : résultats obtenus avec l'estimateur MV. En traits mixtes : résultats obtenus avec un estimateur MAP traduisant la douceur de la réponse impulsionnelle. Cette information *a priori* améliore les résultats de manière significative.

résultats obtenus avec l'estimateur MV sont de moins bonne qualité que dans le cas précédent. L'utilisation d'un estimateur MAP dans lequel l'information *a priori* est spécifiée sous forme d'une matrice \mathbf{R}_H non diagonale permet d'obtenir une amélioration appréciable de la qualité des résultats. Cette dernière permet de traduire l'idée de douceur de la réponse impulsionnelle à identifier en introduisant une corrélation entre ses échantillons.

Si le signal d'entrée ne comporte plus que 32 échantillons, le contraste devient médiocre car le rapport N/P est alors égal à 1. Ceci correspond à des conditions défavorables, comme le montrent les résultats présentés à la figure 4.6. Bien que les incertitudes sur les mesures soient relativement faibles (rapport signal-à-bruit de 20 dB), la solution obtenue avec l'estimateur MV présente de grandes oscillations (amplitude maximale de l'ordre de 1000!) qui la rendraient inexploitable dans la pratique. Ces oscillations s'interprètent comme une variance excessive de la solution. Plus encore que dans le cas précédent, l'utilisation d'un estimateur MAP produit une amélioration spectaculaire en réduisant cette variance dans des proportions importantes.

Enfin, si le signal d'entrée est composé non plus d'un signal blanc, mais d'un signal corrélé, on peut là aussi s'attendre à des résultats de mauvaise qualité. Intuitivement, cela est dû à ce qu'un signal corrélé a un contenu spectral limité; il apporte donc moins d'information qu'un signal blanc sur le système à identifier, car il n'en stimule qu'une partie du comportement dynamique. Ceci se traduit d'ailleurs de manière algébrique par une détérioration du conditionnement de la matrice $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, ce qui rend l'estimée plus sensible aux incertitudes. Ce comportement est illustré par les figures 4.7 à 4.9. L'entrée corrélée utilisée pour stimuler le système a été obtenue par filtrage d'un signal blanc. La figure 4.7 présente les modules des transformées de Fourier respectives du filtre servant à corréler l'entrée et de la réponse impulsionnelle à identifier. Il est apparent que le signal d'entrée a un contenu fréquentiel limité aux très basses fréquences, et stimule donc très peu les hautes fréquences du système à identifier.

Les résultats obtenus pour des rapports signal-à-bruit de 20 dB et 0 dB apparaissent respectivement aux figures 4.8 et 4.9. On constate là aussi que l'estimateur MV fournit des résultats de mauvaise qualité en raison d'une variance excessive sur la solution : les oscillations sont de l'ordre de 10^4 pour un rapport signal-à-bruit de 20 dB, et de 10^5 lorsque le rapport signal-à-bruit vaut 0 dB. Ceci rend évidemment les résultats totalement inexploitable. L'utilisation d'une méthode MAP dans laquelle l'information *a priori* est spécifiée sous la forme d'une matrice \mathbf{R}_H non diagonale, ce qui traduit la douceur de la réponse impulsionnelle, améliore la qualité des résultats de manière spectaculaire.

Ces résultats illustrent donc le comportement des estimateurs dans différentes conditions. Ils mettent en évidence la très grande importance pratique de trois paramètres : le rapport entre le nombre de mesures et le nombre de paramètres à estimer, l'importance des incertitudes et la nature de la matrice liant les mesures à la grandeur à estimer (il s'agit ici de la matrice \mathbf{X}). Lorsque cette matrice ne transmet qu'une petite partie du comportement de la quantité inconnue, ce qui se produisait ici pour une entrée corrélée, l'estimation est beaucoup difficile. Ceci suggère également la démarche pratique à adopter. Après avoir mis

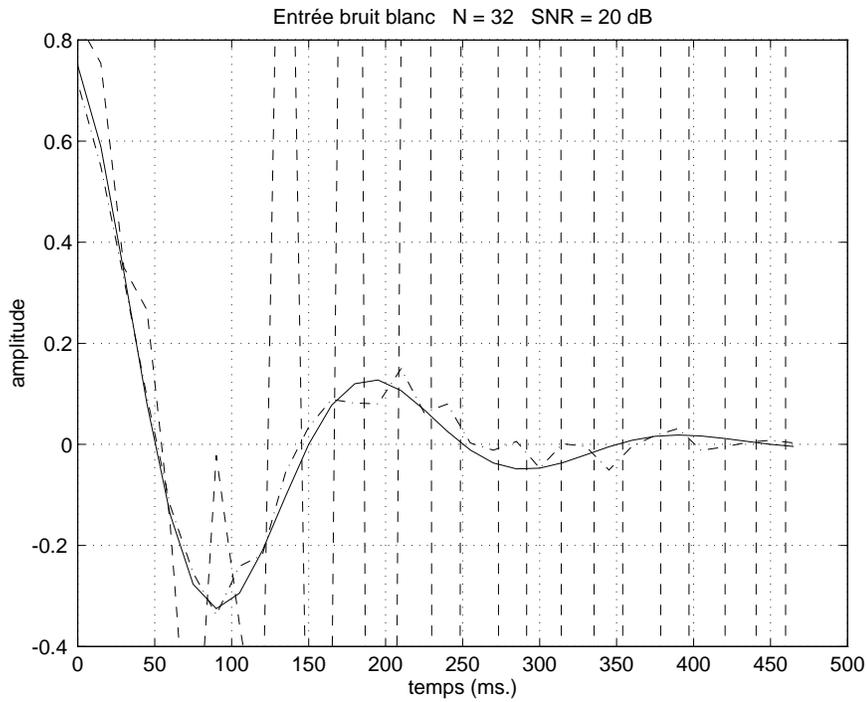


FIGURE 4.6 – Résultats d'identification obtenus avec les estimateurs MV et MAP dans les conditions suivantes : entrée blanche comprenant $N = 32$ échantillons, rapport signal-à-bruit de 20 dB. En traits pleins : réponse impulsionnelle à estimer. En traits interrompus : résultats obtenus avec l'estimateur MV. En traits mixtes : résultats obtenus avec un estimateur MAP traduisant la douceur de la réponse impulsionnelle. La solution MV est inexploitable, l'amplitude des oscillations étant de l'ordre de 1000. L'information *a priori* utilisée par l'estimateur MAP améliore les résultats de manière spectaculaire en réduisant ces oscillations.

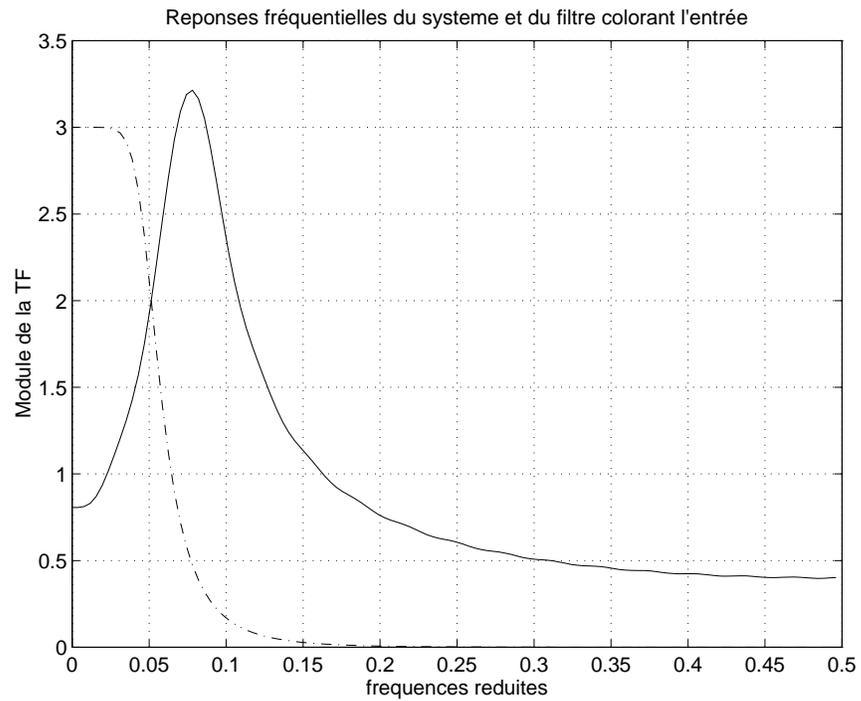


FIGURE 4.7 – Module de la réponse fréquentielle et du filtre servant à corrélérer le signal d'entrée (traits pointillés) et du système à identifier (traits pleins). Le signal d'entrée a un contenu spectral limité aux basses fréquences. Les hautes fréquences du système à identifier sont donc très peu stimulées.

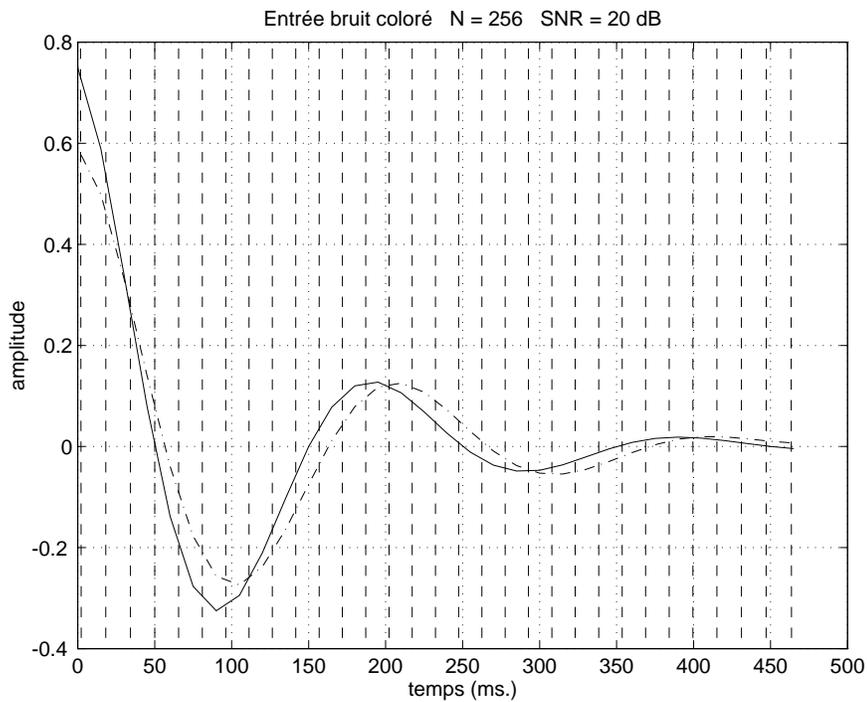


FIGURE 4.8 – Résultats d'identification obtenus avec les estimateurs MV et MAP dans les conditions suivantes : entrée corrélée comprenant $N = 256$ échantillons, rapport signal-à-bruit de 20 dB. En traits pleins : réponse impulsionnelle à estimer. En traits interrompus : résultats obtenus avec l'estimateur MV. En traits mixtes : résultats obtenus avec un estimateur MAP traduisant la douceur de la réponse impulsionnelle. Cette information *a priori* améliore les résultats de manière significative.

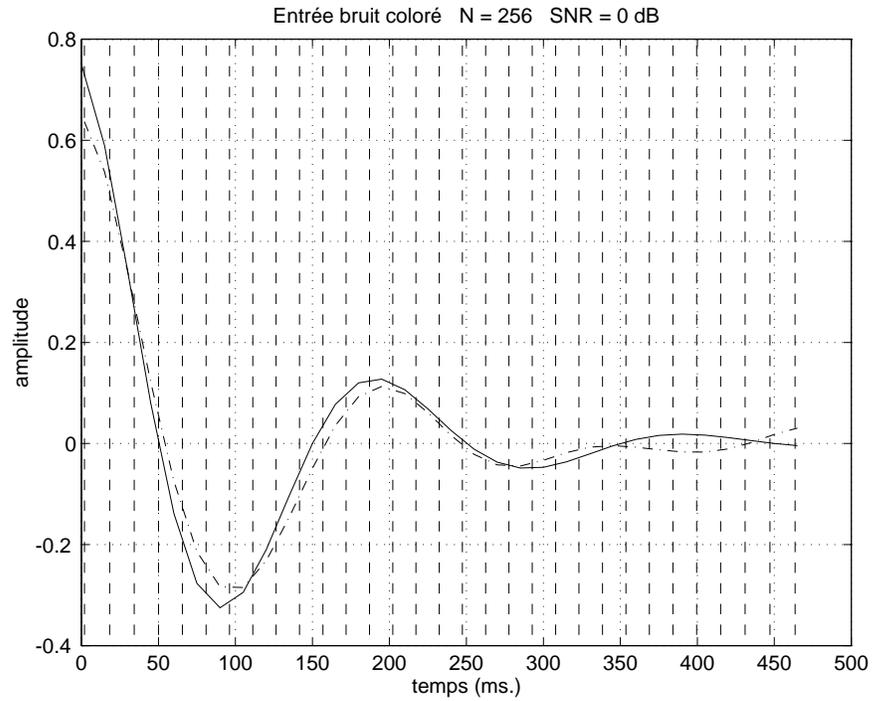


FIGURE 4.9 – Résultats d'identification obtenus avec les estimateurs MV et MAP dans les conditions suivantes : entrée corrélée comprenant $N = 256$ échantillons, rapport signal-à-bruit de 0 dB. En traits pleins : réponse impulsionnelle à estimer. En traits interrompus : résultats obtenus avec l'estimateur MV. En traits mixtes : résultats obtenus avec un estimateur MAP traduisant la douceur de la réponse impulsionnelle. Ici encore, l'information *a priori* améliore les résultats de manière spectaculaire.

en équation le problème, il faut tout d'abord évaluer la difficulté du problème d'estimation à l'aide des trois paramètres énumérés ci-dessus. Il faut ensuite choisir et mettre en œuvre un estimateur. Il est possible pour cela de tirer partie de la structure commune des estimateurs MV et MAP dans le cadre linéaire et gaussien, quelle que soit la forme (compacte ou récurrente) utilisée. Il suffit en effet de programmer un seul algorithme, l'estimateur MV étant obtenu comme cas particulier de l'estimateur MAP. Il est ensuite recommandé de procéder avec prudence, en introduisant une information *a priori* la moins contraignante possible de manière à ne pas trop restreindre la généralité de l'estimateur, et en analysant les résultats obtenus à la lumière de la difficulté supposée du problème d'identification.

Une dernière remarque porte sur l'interprétation probabiliste de l'information *a priori* utilisée avec l'estimateur MAP. Dans l'exemple ci-dessus, une interprétation classique de la loi *a priori* serait de considérer \mathbf{h} comme la réalisation d'un vecteur aléatoire gaussien. Or il est peu probable d'obtenir une réponse impulsionnelle comme celle représentée à la figure 4.3 en tirant aléatoirement des vecteurs gaussiens. C'est pourquoi l'interprétation de la loi *a priori* en termes d'incertitude ou de valeurs probables de \mathbf{h} est beaucoup plus satisfaisante. Ceci traduit aussi le fait que, en estimation bayésienne, il n'est généralement ni nécessaire, ni souhaitable de prendre comme loi *a priori* un modèle fidèle du comportement de la quantité à estimer. Il est préférable d'introduire une information *a priori* juste suffisante pour obtenir des résultats acceptables, et d'ajuster au mieux le compromis entre complexité de l'estimateur et qualité des résultats. consiste

Annexe A

Précisions sur la transformée de Fourier

A.1 Cadre de travail

On se place dans le cadre des signaux complexes dépendant d'une variable réelle. On considère donc des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} x & \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto x(t) \end{aligned}$$

la variable t variant de $-\infty$ à $+\infty$. On désire étudier les propriétés de la transformée de Fourier (TF) définie par :

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (\text{A.1})$$

Les questions auxquelles il est nécessaire de donner des réponses sont les suivantes :

1. pour quelle classe de signaux la transformation ci-dessus a-t-elle un sens ?
2. existe-t-il une formule d'inversion ?

On s'intéressera particulièrement à l'effet de la transformation (A.1) sur la composition des signaux par les opérateurs usuels tels que l'addition, la multiplication et surtout la convolution.

A.2 Transformée de Fourier dans L_1

On considère dans un premier temps que x appartient à l'ensemble L_1 des fonctions de module intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \quad \text{converge}$$

On montre alors que la transformation de Fourier

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt$$

a bien un sens, et possède les principales propriétés suivantes (on suppose que x et y appartiennent à L_1) :

- linéarité
 $\mathcal{F}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha X(\nu) + \beta Y(\nu)$;
- translation en temps
 $\mathcal{F}(x(t - \alpha)) = X(\nu) e^{-2i\pi\alpha\nu}$;
- homothétie en temps
 $\mathcal{F}(x(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|} X(\nu/\alpha)$;
- translation en fréquence
 $\mathcal{F}(x(t) e^{2i\pi\alpha t}) = X(\nu - \alpha)$;
- homothétie en fréquence
 $\mathcal{F}(\frac{1}{|\alpha|} x(t/\alpha)) = X(\alpha\nu)$;
- conjugaison
 $\mathcal{F}(x(-t)^*) = X(\nu)^*$;
- convolution
 $\mathcal{F}(x(t) * y(t)) = X(\nu) Y(\nu)$;
- dérivation en temps
si $x'(t) \in L_1$ $\mathcal{F}(x'(t)) = 2i\pi\nu X(\nu)$;
- dérivation en fréquence
si $t x(t) \in L_1$, alors $X(\nu)$ est dérivable et $\mathcal{F}(-2i\pi t x(t)) = X'(\nu)$.

Ces propriétés sont intéressantes, mais insuffisantes pour l'instant car à ce stade, il n'est pas possible d'établir de formule d'inversion. La raison en est que le fait que $x \in L_1$ n'implique pas que sa transformée de Fourier appartienne à L_1 . En fait, on a :

Si $x \in L_1$, alors X est une fonction continue et

$$\lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} X(\nu) = 0.$$

Si on émet l'hypothèse que x et X appartiennent à L_1 , alors on a :

$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu$ existe, est continue, tend vers 0 lorsque t tend vers $\pm\infty$ et est égale à x presque partout (partout si x est continue).

Il en découle que si x et y ainsi que leurs transformées de Fourier appartiennent à L_1 , alors

$$\mathcal{F}(x(t)y(t)) = X(\nu) * Y(\nu).$$

L'énoncé de ces propriétés met en évidence l'intérêt, mais aussi les limites de la transformée de Fourier dans L_1 . Parmi ces dernières, nous en soulignerons trois :

1. il n'y a pas d'équivalence entre l'espace temporel et l'espace fréquentiel, ce qui interdit l'emploi d'une formule générale d'inversion ;

2. un certain nombre de fonctions « intéressantes » telles que les fonctions périodiques bornées, ne font pas partie de L_1 et n'ont pas de transformée de Fourier au sens défini jusqu'à présent ;
3. l'espace L_1 se prête mal aux manipulations algébriques en raison de l'absence d'un produit scalaire. (En fait, L_1 n'a pas la structure d'espace de Hilbert).

Pour remédier à ces inconvénients, une première étape consiste à s'intéresser non plus à L_1 , mais à L_2 , espace des fonctions de carré sommable.

A.3 Transformée de Fourier dans L_2

L'espace L_2 des fonctions complexes d'une variable réelle est constitué des fonctions telles que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{converge}$$

L_2 présente deux propriétés intéressantes : d'une part, il représente l'ensemble des signaux d'énergie finie, ce qui a une interprétation physique immédiate. D'autre part, l'opérateur

$$(x, y) \longmapsto \langle x \cdot y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t)^* dt \quad (\text{A.2})$$

est toujours défini pour x et y dans L_2 et définit un produit scalaire dans cet espace. On peut même montrer que L_2 , muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

L_1 et L_2 sont deux espaces tels que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $L_1 \not\subset L_2$ et $L_2 \not\subset L_1$. Pour définir la transformée de Fourier sur L_2 , on commence par s'intéresser à $L_1 \cap L_2$. L'expression (A.1) définissant \mathcal{F} a alors un sens, et toutes les propriétés énoncées précédemment sont valables. On observe ensuite que $L_1 \cap L_2$ est dense dans L_2 . Par des passages à la limite rendus possibles par la structure d'espace de Hilbert de L_2 , on peut alors prolonger la transformée de Fourier sur $L_1 \cap L_2$ à L_2 tout entier. On a alors le résultat suivant :

À toute fonction $x(t) \in L_2$, on peut associer une autre fonction $X(\nu) \in L_2$ telle que

- si $x(t) \in L_1 \cap L_2$, $X(\nu) = \mathcal{F}(x(t))$ au sens de L_1 ;*
 - plus généralement, au sens de la norme dans L_2*

$$X(\nu) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \text{ et}$$

$$x(t) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A X(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu ;$$
 - théorème de Plancherel*

$$\forall (x, y) \in L_2^2, \langle x \cdot y \rangle = \langle X \cdot Y \rangle ;$$
 - conséquence*

$$\|x\|_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \|X\|_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\nu)|^2 d\nu.$$
- Ceci indique que la transformée de Fourier définit une isométrie de L_2 sur lui-même.*

Nous venons donc de définir un outil intéressant, dans la mesure où il permet de représenter indifféremment dans l'espace temporel ou dans l'espace fréquentiel une importante classe de signaux. Malheureusement, L_2 ne contient pas certains signaux très importants dans la pratique, comme les signaux continus périodiques bornés. Une extension supplémentaire est nécessaire, et elle requiert à la fois un changement d'espace de travail et un changement de définition de la transformée. L'instrument principal de cette extension est la notion de dualité qui permet d'introduire naturellement à la fois les espaces de distributions et la définition de leur transformée de Fourier. Nous ne rentrerons pas plus dans les détails, et nous indiquerons seulement que :

- l'espace sur lequel la transformée de Fourier est défini, l'ensemble \mathcal{S}' des distributions tempérées, comprend
 - les distributions à support compact,
 - les fonctions sommables ou bornées,
 - les fonctions à croissance lente (au plus polynomiale).

Ces deux dernières catégories incluent la plupart des fonctions périodiques. \mathcal{S}' permet donc de traiter tous les cas d'intérêt pratique ;

- la transformation de Fourier sur \mathcal{S}' étend bien sûr les propriétés déjà énoncées des transformées sur L_1 et L_2 . De plus, elle réalise une bijection continue de \mathcal{S}' sur lui-même. On a donc, de nouveau, équivalence entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel ;
- les propriétés supplémentaires portent essentiellement sur les transformées des distributions et des fonctions périodiques. On a en particulier :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(1_t) &= \delta(\nu), \\ \mathcal{F}(\delta(t)) &= 1_\nu.\end{aligned}$$

On montre aussi que si $x(t)$ est à support compact, alors $X(\nu)$ n'est pas à support compact. De même, si $X(\nu)$ est à support compact, alors $x(t)$ n'est pas à support compact.

D'un point de vue pratique, le calcul analytique d'une transformée de Fourier s'effectue en utilisant les propriétés élémentaires résumées au tableau 1.1 et les règles de composition. On rappelle que, comme indiqué à la section 1.3, le cas des fonctions périodiques nécessite une étape de décomposition en série de Fourier.

A.4 Transformée de Fourier discrète

Dans ce cas, on rappelle que l'on dispose de N échantillons d'un signal $x = \{x(n); 0 \leq n \leq N - 1\}$. Comme indiqué au chapitre 1, la transformée de Fourier discrète de x est définie par :

$$\mathcal{F}(x) = X_k, 0 \leq k \leq N - 1 \quad (\text{A.3})$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2i\pi nk/N}. \quad (\text{A.4})$$

Les équations (A.3)-(A.4) définissent une transformation d'un espace vectoriel de dimension finie N à un autre espace de même dimension. On peut démontrer pour la transformée de Fourier discrète des propriétés analogues à celles de la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' . L'étude est considérablement plus simple en raison de la dimension finie des espaces de signaux. Cependant, on peut aussi considérer la transformée de Fourier discrète comme un cas particulier de la transformée de Fourier sur \mathcal{S}' .

Annexe B

Calcul du gradient de formes quadratiques

B.1 Résultat général

On établit l'expression du gradient par rapport à \mathbf{u} d'une forme quadratique $\psi(\mathbf{u})$ définie par :

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u}) \mathbf{A} \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{u})}{2},$$

où \mathbf{u} est un vecteur de dimension N , $\boldsymbol{\phi}$ un vecteur de dimension P qui dépend de \mathbf{u} et \mathbf{A} une matrice symétrique définie positive. En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \phi_i(\mathbf{u}) \phi_j(\mathbf{u}), \quad (\text{B.1})$$

où a_{ij} désigne l'élément (i, j) de la matrice \mathbf{A} , et où $\phi_i(\mathbf{u})$ est la i^{e} coordonnée du vecteur $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u})$. Calculons maintenant la k^{e} composante du gradient de ψ , qui est par définition égale à $\partial\psi/\partial u_k$. D'après (B.1), on a :

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial\phi_i(\mathbf{u})}{\partial u_k} \phi_j(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \phi_i(\mathbf{u}) \frac{\partial\phi_j(\mathbf{u})}{\partial u_k}. \quad (\text{B.2})$$

\mathbf{A} étant une matrice symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$ et les deux sommes apparaissant au second membre de (B.2) sont égales. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_k} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial\phi_i(\mathbf{u})}{\partial u_k} \phi_j(\mathbf{u}),$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u})}{\partial u_k} \right)^T \mathbf{A} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{u}). \quad (\text{B.3})$$

Ce résultat nous permet d'exprimer le gradient de ψ sous forme matricielle. En effet, d'après (B.3), la k^{e} composante du gradient est égale au produit du vecteur ligne $(\partial\phi(\mathbf{u})/\partial u_k)^T$ et du vecteur colonne $\mathbf{A}\phi(\mathbf{u})$. Il en découle que le vecteur gradient est égal au produit de la matrice dont chaque ligne est égale à $(\partial\phi(\mathbf{u})/\partial u_k)^T$, k variant de 1 à P , et du vecteur colonne $\mathbf{A}\phi(\mathbf{u})$. L'élément (k, i) de cette matrice est égal à $\partial\phi_i(\mathbf{u})/\partial u_k$, ce qui montre que cette matrice est égale à la transposée de la matrice jacobienne de $\phi(\mathbf{u})$. En notant $\mathbf{J}(\phi(\mathbf{u}))$ la matrice jacobienne de $\phi(\mathbf{u})$, on obtient :

$$\nabla\psi(\mathbf{u}) = \mathbf{J}(\phi(\mathbf{u}))^T \mathbf{A}\phi(\mathbf{u}). \quad (\text{B.4})$$

B.2 Application au critère des moindres carrés

On utilise maintenant le résultat précédent pour évaluer le gradient d'un critère de la forme :

$$\psi_{\text{MC}}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T \mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x})}{2},$$

où \mathbf{A} a la même signification que précédemment, où \mathbf{z} et \mathbf{x} sont deux vecteurs de taille respective N et P , et où \mathbf{H} est une matrice de dimension (N, P) . Il s'agit d'un cas particulier du problème traité plus haut avec $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}$. Il suffit donc de déterminer l'expression de la matrice jacobienne de $\phi(\mathbf{x})$. D'après la définition du produit d'une matrice et d'un vecteur, la i^{e} composante ϕ_i de ϕ a pour expression :

$$\phi_i = z_i - \sum_{k=1}^P h_{ik} x_k,$$

où h_{ik} désigne l'élément (i, k) de la matrice \mathbf{H} . Il en découle immédiatement que :

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x_k} = -h_{ik},$$

ce qui indique que l'élément (i, k) de la matrice jacobienne est égal à $-h_{ik}$. La matrice jacobienne est donc égale à $-\mathbf{H}$, et on a :

$$\nabla\psi_{\text{MC}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{H}^T \mathbf{A}(\mathbf{z} - \mathbf{H}\mathbf{x}).$$