

Cadre adopté

- Signaux réels
- Signaux échantillonnés. $T_s = 1$ (fréquence échantillonnage)
- On dispose de N échantillons x_n $0 \leq n \leq N-1$.
- Soit on considère que $\{x_n\}$ est un signal déterministe échantillonné.
- Soit on considère $\{x_n\}$ comme une partie de la réalisation d'un signal aléatoire X_n s'étendant de $-\infty$ à $+\infty$. Signal stationnaire du 2^e ordre
- Question: que vont nous donner ces deux points de vue lorsque l'on s'intéresse aux caractéristiques spectrales du signal?

Densité spectrale de puissance:

- Signal ~~aléatoire~~ déterministe.

$$x_n \rightarrow X_F$$

On a montré que $|X_F|^2 = \mathcal{F}\{r_{xx}(n)\}$

$r_{xx}(n)$: fonction de corrélation du signal.

$$r_{xx}(n) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x_p x_{p-n}$$

$|X_F|^2$: spectre ou densité spectrale de puissance du signal déterministe

- Signal aléatoire.

On cherche à écrire.

$$X_n = \int g_x(\omega) e^{i\omega n} d\omega ; \text{ problème: intégrale stochastique.}$$

On a ~~admis~~ admis que.

- On peut donner un sens à l'intégrale.
 - Le calcul direct de la quantité aléatoire $g_x(\nu)$ est hors de notre portée
 - Par contre, on peut calculer simplement $E[|g_x(\nu)|^2] = \Gamma_x(\nu)$
- On peut montrer (grâce au lemme de Loève) que.

$\Gamma_x(\nu) = E[|g_x(\nu)|^2] = \mathcal{F}(\gamma_x(n))$ où $\gamma_x(n)$ désigne la fonction d'autocorrélation du signal aléatoire X : $\gamma_x(n) = E[x(p)x(p-n)]$

- Remarque: $\gamma_x(n)$ ne dépend pas de p à cause de la stationnarité de X .
- $\Gamma_x(\nu)$: spectre ou densité spectrale de puissance de X
- Conclusion

- Dans un cas comme dans l'autre, le spectre est la TF de la fonction d'autocorrélation.
- ~~Selon le cas~~ La définition de la fonction d'autocorrélation diffère selon que le signal est considéré comme aléatoire ou déterministe.

Analyse spectrale classique

- Remarque introductive.
- Si x est considéré comme déterministe: aucune difficulté ~~le spectre~~ le spectre peut être calculé soit directement par TF des échantillons de x , soit par l'intermédiaire de la fonction de corrélation déterministe. Attention aux approximations introduites par l'observation sur un horizon fini. (voir chapitre 1)

- ~~Analyse~~ Dans la suite: signal aléatoire stationnaire de deuxième ordre.

Problème posé: estimation de sa fonction de corrélation à partir des échantillons dont on dispose.

$$x_n \xrightarrow{\text{estim.}} \hat{\gamma}_x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\Gamma}_x(\omega)$$

- Application de la technique d'estimation.
 - On a le vecteur aléatoire \underline{x}
 - on suppose \underline{x} à moyenne nulle.
 - on veut estimer sa matrice de covariance R_x qui est Toeplitz (stationnarité de x)
 - $f(\underline{x} | R_x) = \frac{1}{K |R_x|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \underline{x}^T R_x^{-1} \underline{x}\right\}$.
 - $f(R_x) = \text{constante}$. (pour simplifier)
 - On doit donc maximiser.
 - $-\frac{1}{2} \ln |R_x| - \frac{1}{2} \underline{x}^T R_x^{-1} \underline{x}$ p/r aux éléments de la matrice Toeplitz R_x .
 - Problème pas encore résolu de manière exacte.

- Nécessité de recourir à des estimateurs empiriques:

$$\gamma_x(n) = \sum x(p) x(p-n)$$

deux estimateurs de ce type:

$$\hat{\gamma}_x(n) = \frac{1}{N-|n|} \sum_{p=|n|}^{N-1} x(p) x(p-n) \quad \text{non biaisé}$$

$$\hat{\gamma}_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{p=|n|}^{N-1} x(p) x(p-n) \quad \text{biaisé}$$

Référence au
labo 1

- Calcul du biais:

Estimateur non biaisé

$$E[\hat{\gamma}_x(n)] = \frac{1}{N-|n|} \sum_{p=|n|}^{N-1} E[x(p)x(p-n)]$$

$$= \gamma_x(n) \quad \Rightarrow \text{biais nul pour } |n| \leq N$$

Estimateur biaisé.

$$E[\hat{\gamma}_x(n)] = \frac{1}{N} \sum_{p=|n|}^{N-1} E[x(p)x(p-n)]$$

$$= \frac{N-|n|}{N} \gamma_x(n) \quad \Rightarrow \text{biais non nul pour } n \neq 0.$$

- Calcul de la variance: complexe, même sous hypothèse gaussienne.

- D'un point de vue pratique.

1) ~~pour~~ l'estimateur biaisé est souvent préférable, car de l'erreur totale plus faible. biais ↑, mais variance ↓.

2) On remarque que.

$$\begin{aligned} \parallel \text{ Cas } \overset{\text{non biaisé}}{\text{biaisé}} & E[\hat{\gamma}_x(n)] = R_N(n) \cdot \gamma_x(n) \\ \parallel \text{ Cas biaisé} & E[\hat{\gamma}_{bc}(n)] = T_N(n) \cdot \gamma_x(n) \end{aligned}$$

• Corrélogramme.

Une fois calculée une estimation de $\gamma_x(n)$:

$$\hat{\Gamma}_x(\omega) = \mathcal{F}(\hat{\gamma}_x(n)) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_x(n) e^{-2i\pi\omega n}$$

→ estimée du spectre

On peut calculer son biais:

$$E[\widehat{\Gamma}_x(\omega)] = \mathcal{F} [E[\widehat{r}_x(n)]] \quad (\text{linéarité de } \mathcal{F} \text{ et } E).$$

Or

- Cas ~~bi~~ non biaisé.

$$E[\widehat{r}_x(n)] = R_N(n) r_x(n).$$

$$\rightarrow E[\widehat{\Gamma}_x(\omega)] = R_N(\omega) * \Gamma_x(\omega)$$

- Cas biaisé.

$$E[\widehat{r}_x(n)] = T_N(n) r_x(n)$$

$$\rightarrow E[\widehat{\Gamma}_x(\omega)] = T_N(\omega) * \Gamma_x(\omega).$$

$$\text{Or } R_N(\omega) = \frac{\sin \pi \omega (2N-1)}{\sin \pi \omega}$$

$$T_N(\omega) = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin \pi \omega N}{\sin \pi \omega} \right]^2$$



D'où: cas non biaisé: l'estimée de la DSP peut être négative!

cas biaisé: l'estimée de la DSP est toujours positive.

Résolution non biaisé > résolution biaisé.

Dans tous les cas: biais $\rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

- Défauts du corrélogramme

* possibilité d'estimées négatives.

* Observation pas explicites dans l'expression de l'estimée \Rightarrow 2 opérations en cascade.

l'étude difficile.

• Périodogramme.

- Idée: remédier aux défauts précédents.
se va rapprocher des cas où se est considéré comme déterministe.

- Définition:

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-zi\omega n} \right|^2$$

- Lien avec le corrélogramme avec estimateur biaisé,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_x(\omega) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \hat{\gamma}_{xx}(n) e^{-zi\omega n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(p) \tilde{x}_N(p) x(p-n) \tilde{x}_N(p-n) e^{-zi\omega n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(p) \tilde{x}_N(p) x(p-n) \tilde{x}_N(p-n) e^{-zi\omega n} \end{aligned}$$

On pose $k = p - n$.

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_x(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(p) \tilde{x}_N(p) x(k) \tilde{x}_N(k) e^{-zi\omega p} e^{zi\omega k} \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_N(n) x(n) e^{-zi\omega n} \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}_N(n) x(n) e^{-zi\omega n} \right|^2 \end{aligned}$$

- Remarque: On retrouve le carré du module de la TF des échchantillons observés: à un facteur près, c'est le spectre du signal considéré comme déterministe.

- Question: comment ce spectre est il lié à la PSD du signal aléatoire sous-jacent?

- Biais et variance du périodogramme.

- biais: $P(\lambda)$ identique au corrélogramme avec estimateur biaisé.

$$\Rightarrow E[P(\lambda)] = \Gamma_x(\lambda) \neq T_N(\lambda).$$

le biais tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$.

- Variance.

On peut calculer

$$\begin{aligned} \text{Var}(P(\lambda)) &= E[|P(\lambda) - E[P(\lambda)]|^2] \\ &= E[|P(\lambda)|^2] - |E[P(\lambda)]|^2 \end{aligned}$$

Sous hypothèses gaussiennes, on montre que

$$\text{Var}(P(\lambda)) \geq |E(P(\lambda))|^2$$

lorsque $N \rightarrow +\infty$: $\text{Var}(P(\lambda)) > |\Gamma_x(\lambda)|^2$

\Rightarrow estimateur non convergent

T —

- Conclusion sur le périodogramme:

- Simple à employer

- Peu satisfaisant d'un point de vue ~~conver~~ convergence

- On peut étendre l'idée des fenêtres (ici rectangulaires puis triangulaires) à d'autres formes

- ~~Peu~~ Modification des compromis

biais/variance, mais toujours estimateur non convergent

T —

- Périodogramme moyenné.
- N échantillons au total
- L blocs de K échantillons
- Hypothèse: décorrélation entre blocs.
- Principe de la méthode:
 - * calcul d'un périodogramme par bloc
 - * moyennage des L périodogrammes obtenus.

- biais Sur chaque bloc:

$$E[P_k(\omega)] = \Gamma_{xx}(\omega) * T_k(\omega)$$

en moyennant: $E[P_M(\omega)] = \Gamma_x(\omega) * T_k(\omega)$.

⇒ perte de résolution p/sz du périodogramme simple.

- Variance Par la loi des grands nombres

$$\text{Var}(P_M(\omega)) = \frac{1}{L} \text{Var}(P(\omega)). \quad \text{car décorrélation entre les blocs.}$$

Pour K suffisamment grand, $\text{Var}(P(\omega))$ est borné
d'où: estimateur convergent.

On peut prendre par exemple $K=L=\sqrt{N}$

- Autres possibilités.

- * Fenêtre différente sur chaque bloc. (lobes secondaires)
- * Chevauchement des horizons (mais décorrélation plus basse)
- * Estimateur de Welch (fonction spectrum de matlab)
 - meilleurs résultats avec chevauchement de $K/2$

* Dans tous les cas, si N donné, réglage des compromis biais / variance !

• Périodogramme lissé

- Idée générale: considérer la DSP estimée comme un signal bruité.
- Réduire le bruit (la variance d'estimation) par un filtrage fréquentiel,

$$P_L(j) = P(j) * W(j)$$

$W(j)$ Fenêtre spectrale. Questions:
 * Comment choisir la fenêtre?
 * Lien avec ce qui précède?

- Hypothèses:

$w(n)$ a support compact $[-k+1, k-1]$. $k \ll N$

Périodogramme = corrélogramme avec estimateur biaisé pour la fonction de corrélation:

$$P(j) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \widehat{r}_x(n) e^{-2i\pi j n}$$

$$\Rightarrow P_L(j) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \widehat{r}_x(n) w(n) e^{-2i\pi j n}$$

Pour avoir de bonnes propriétés (conservation de l'énergie...) w doit satisfaire: w paire et $\int |w(\omega)|^2 d\omega = 1$.

- Biais du périodogramme lissé.

$$\begin{aligned} E[P_L(j)] &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} E[\widehat{r}_x(n)] w(n) e^{-2i\pi j n} \\ &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \frac{N-|n|}{N} r_x(n) w(n) e^{-2i\pi j n} \end{aligned}$$

si $k \ll N$, la somme peut être réduite à $[-k+1, k-1]$ et on a alors

$$E[P_L(j)] \sim \sum_{n=-k+1}^{k-1} r_x(n) w(n) e^{-2i\pi j n}$$

$$E[P_L(\omega)] \sim \Gamma_x(\omega) * W(\omega)$$

pour un biais faible, on veut $W(\omega) \sim \delta(\omega)$.

⇒ largeur fréquentielle faible

⇒ grande largeur temporelle.

- Variance du périodogramme lissé.

Etude très difficile. Sous des hypothèses draconiennes (N grand, spectre à variations lentes)

$$\text{Var}(P_L(\omega)) \sim \Gamma_x(\omega)^2 * W^2(\omega).$$

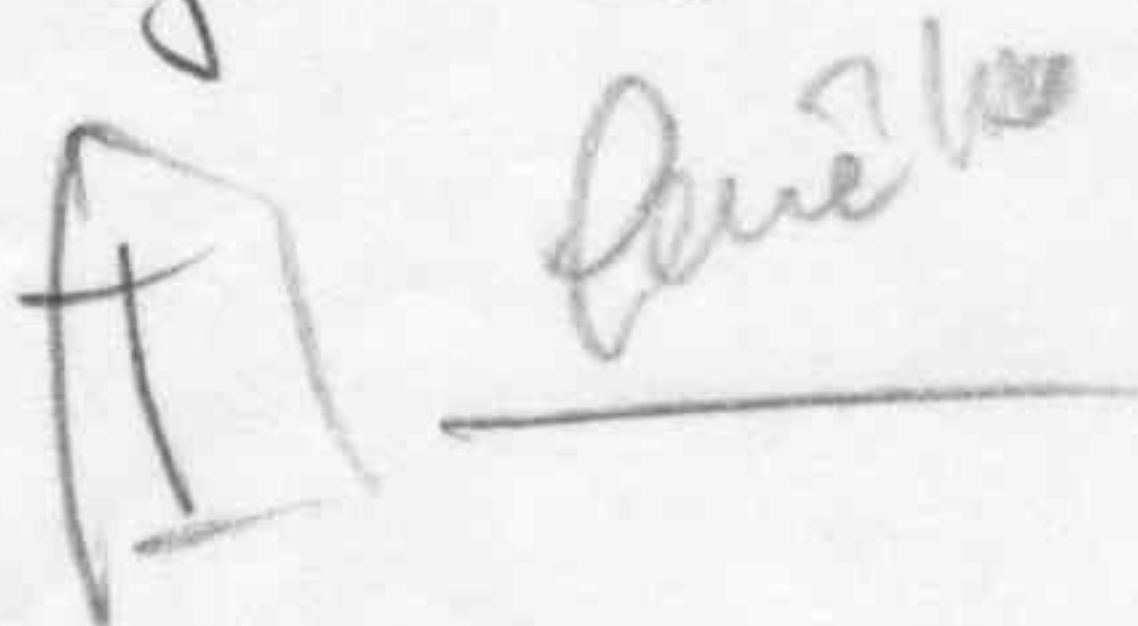
Variance
biais faible si $W^2(\omega)$ petit et "uniformément" réparti.
(on a la contrainte $\int |W(\omega)|^2 d\omega = 1$)

→ large étalement spectral

→ faible largeur temporelle

On doit donc trouver (comme pour le périodogramme moyenné) un compromis biais-variance.

Si $N \rightarrow \infty$, on peut assurer la convergence -



• Conclusion.

- Considérer le signal comme déterministe est souvent insuffisant

- Périodogramme sous ses variantes.

* performances de calcul (FFT)

* souvent "bruyant" à échelles faibles.

* réservé à $N \gg 28$ ou 255

- Méthodes recommandées:

weleq. (Spectrum de matlab)

Périodogramme lissé.

Attention au compromis biais/variance.

- Remarque: Fenêtrage peut être interprété comme de l'a priori ~~sur le spectre~~ lors de l'estimation de la DSP

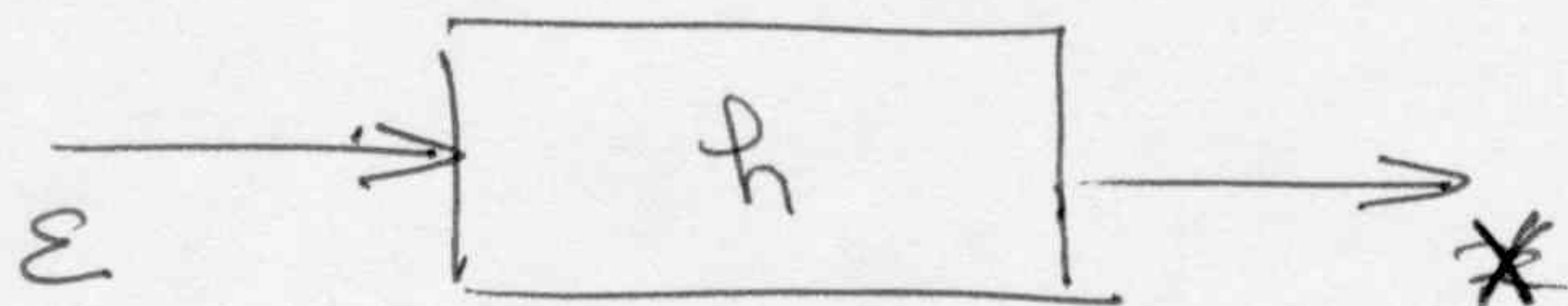
Analyse spectrale
paramétrique

• Introduction

- Rappel.

X_n signal aléatoire stationnaire du 2^e ordre.
spectre "suffisamment régulier".

On peut trouver un bruit blanc ε_n et un filtre dynamique h tel que X puisse être interprété comme le résultat du filtrage de ε par h .



- Principe:

* estimer h

* en déduire $\Gamma_x(\omega) = |H(\omega)|^2 \Gamma_\varepsilon(\omega) = |H(\omega)|^2 \sigma_\varepsilon^2$

* on utilisera une paramétrisation de $h(\omega)$

* on espère qu'avec un petit nombre de paramètres, on pourra ~~re~~ modéliser X fidèlement.

• Analyse spectrale AR.

- Remarque: sous réserve de régularité du spectre de X , on peut toujours choisir pour h une représentation tout pôle.

- On a ~~donc~~ alors.

$$x_n \approx \sum_{p=1}^P a_p x_{n-p} + \varepsilon_n$$

Intérêts: représentation facile à manipuler
 facile à estimer.
 compacte (en général)

- Une fois les paramètres estimés:

$$\hat{\Gamma}_x(\omega) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\left| 1 - \sum_{p=1}^P \hat{a}_p e^{-iR\omega p} \right|^2}$$

voir estimation de $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$

• Estimation des paramètres: en utilisant les coefficients de corrélation.

$$x_n = \sum_{p=1}^P a_p x_{n-p} + \varepsilon_n \quad \varepsilon_n \text{ indépendant de } x_p, p < n.$$

$$E[x_n x_{n-k}] = \sum_{p=1}^P a_p E[x_{n-k} x_{n-p}] + E[\varepsilon_n x_{n-k}]$$

$$r(k) = \sum_{p=1}^P a_p r_{p-k}$$

en faisant varier k de 1 à P :

$$\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_{P-1} \\ r_1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ r_{P-1} & \dots & \dots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_P \end{bmatrix}$$

Equations de Yule-Walker.

- Procédure:

- * Choisir l'ordre P
- * ~~Estimer~~ Estimer les coefficients de corrélation $r_0 \dots r_P$
- * Résoudre l'équation matricielle
- * En déduire le spectre.

- Avantages:

- * algorithmes simples.
- * permet la mise en oeuvre de l'approche.

- Inconvénients.

- * Estimation des coefficients de corrélation?
- * Etapes multiples.
- * Caractéristiques globales?

• limitation pratique: $P \leq N/2$ (ou même $N/4$)

• Estimation des paramètres: a partir des observations.

- N observations $x_0 \rightarrow x_{N-1}$

- On écrit:

~~$$x_0 = x_0^T a + \varepsilon_0$$~~

$$x_1 = x_1^T a + \varepsilon_1$$

$$x_2 = x_2^T a + \varepsilon_2$$

⋮

$$x_n = x_n^T a + \varepsilon_n$$

⋮

$$x_{N-1} = x_{N-1}^T a + \varepsilon_{N-1}$$

$$\underline{a}^T = [a_1 \quad a_p]$$

~~$$x_0^T = [x_0 \quad x_{-1} \quad \dots \quad x_{-p+1}]$$~~

$$x_1^T = [x_0 \quad x_{-1} \quad \dots \quad x_{-p+1}]$$

$$x_2^T = [x_1 \quad x_0 \quad \dots \quad x_{-p+2}]$$

⋮

$$x_n^T = [x_{n-1} \quad \dots \quad x_{n-p}]$$

$$x_{N-1}^T = [x_{N-2} \quad \dots \quad x_{N-p-1}]$$

→ sous forme matricielle.

$$\underline{x} = \underline{X} \underline{a} + \underline{\varepsilon}$$

- On applique la technique générale pour l'estimation:

Σ gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 I)$.

$\rightarrow f(\underline{x} | \underline{a})$ gaussien: $\mathcal{N}(\bar{X}\underline{a}, \sigma_\varepsilon^2 I)$.

\underline{a} : gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma_a^2 I)$.

d'où:
$$\underline{\hat{a}} = \left(X^T X + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_a^2} I \right)^{-1} X^T \underline{z}$$

Si pas d'a priori sur \underline{a} : $\sigma_a^2 \rightarrow \infty$.

$$\underline{\hat{a}} = (X^T X)^{-1} X^T \underline{z}$$

~~Pratique de la pratique:~~

- * bonne propriétés de cette méthode (biais, convergence).
- * Si $f(\underline{a}) = \text{constante}$: estimation classique. pour des raies de contraste: $P \leq N/2$.
- * si $f(\underline{a}) \neq \text{constante}$: on peut aller jusqu'à $P = N!$

- En pratique:

- * choisir P .
- * choisir l'estimateur en fonction du ~~te~~ contraste ~~et~~ P/N et du contenu informationnel de X (large bande ou pas?)
- * co-estimer \underline{a}
- * en déduire le spectre. (σ_ε^2 s'estime par la puissance des résidus).

Exemple:
analyse de
signal Doppler.

- Principe des mesures.
- Résultats

Doppler

Conclusions:

- Revue panoramique des plus importantes méthodes d'analyse spectrale.
- Analyse spectrale non paramétrique.
 - $N > 128$
 - Attention à l'utilisation abusive des fenêtres.
 - Welch ou périodogramme lissé, en ajustant le compromis biais / variance.
- Analyse spectrale paramétrique.
 - $N < 128$ (ou même N grand)
 - Deux cas: AR ~~longs~~ courts ($P < N/2$) \rightarrow ML
 - AR longs ($P \geq N/2$) \rightarrow MAP

Discussion

Relâchement de l'hypothèse de stationnarité.