La théorie généralisée des perturbations

Alain Hébert

alain.hebert@polymtl.ca

Institut de génie nucléaire

École Polytechnique de Montréal

Contenu

- Introduction
- Stationnarité d'une fonctionnelle
- Quotient de produits linéaires
- La méthode implicite en GPT
- Équation singulière à source
- Résolution
- Applications à l'ÉPM
- Méthode OPTEX

Introduction

- La GPT permet de calculer la sensibilité d'une caractéristique de réacteur par rapport à la variation d'une variable d'état.
  exemples de caractéristique: K_{eff}, efficacité d'une barre, rapport de forme du flux, coût en combustible, rapport de conversion, etc.
  exemples de variables d'état: section efficace, concentration isotopique, enrichissement combustible, titre vapeur, paramètre de la saphyb, etc.
- La théorie classique des perturbations correspond au cas particulier où la caractéristique de réacteur est le K_{eff}.

Nous allons nous limiter à la situation suivante:

- le réacteur est à l'état stationnaire et le flux neutronique est la solution d'une équation de la forme

$$\mathbb{A}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}) - \mu\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})\,\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \quad . \tag{1}$$

- les caractéristique de réacteur sont des fonctionnelles homogènes du flux neutronique:

$$F\{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{X}\} = F\{\alpha\,\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{X}\} \;\; \forall \;\; \alpha \in \Re \quad . \tag{2}$$

où $\boldsymbol{X}$ est un vecteur contenant les variable d'état.

Stationnarité d'une fonctionnelle

Définition

Une fonctionnelle du flux est stationnaire si

(3) $$\frac{\partial}{\partial X_i} F\{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{X}\} = \frac{d}{d\epsilon}\, F\Big\{\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{X} + \epsilon\, \boldsymbol{\delta_i}\Big\}\Big|_{\epsilon=0} = 0$$

où $\boldsymbol{\delta_i} = \mathrm{col}\,[\delta_{i,j}\ ,\ j = 1, \dim(\boldsymbol{X})]$.

Le quotient de Rayleigh est une fonctionnelle homogène et stationnaire:

(4) $$K_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\mu} = \frac{\langle \boldsymbol{\phi}^*, \mathbb{B}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\phi}\rangle}{\langle \boldsymbol{\phi}^*, \mathbb{A}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\phi}\rangle}$$

où le flux adjoint est la solution d'une équation de la forme

(5) $$\mathbb{A}\,(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{X})^\top\, \boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{r}) - \mu\ \mathbb{B}\,(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{X})^\top\, \boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}\ \ .$$

Comme le quotient de Rayleigh est stationnaire, sa dérivée est facile à calculer:

(6) $$\frac{\partial}{\partial X_i} K_{\mathrm{eff}} = K_{\mathrm{eff}} \left[\frac{\left\langle \boldsymbol{\phi}^*, \frac{\partial}{\partial X_i}\mathbb{B}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\phi}\right\rangle}{\langle \boldsymbol{\phi}^*, \mathbb{B}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\phi}\rangle} - \frac{\left\langle \boldsymbol{\phi}^*, \frac{\partial}{\partial X_i}\mathbb{A}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\phi}\right\rangle}{\langle \boldsymbol{\phi}^*, \mathbb{A}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\phi}\rangle} \right]$$

Quotient de produits linéaires 1

Nous nous interessons aux fonctionnelles homogènes de la forme

(7) $$R = \frac{\langle \mathbf{\Sigma}_1(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \rangle}{\langle \mathbf{\Sigma}_2(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \rangle}$$

La dérivée de R se calcule par la formule

(8) $$\frac{\partial}{\partial X_i} R = R \left[\frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{\Sigma}_1(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \right\rangle}{\langle \mathbf{\Sigma}_1(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \rangle} - \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial X_i} \mathbf{\Sigma}_2(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \right\rangle}{\langle \mathbf{\Sigma}_2(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \rangle} + \left\langle \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{X}), \frac{\partial}{\partial X_i} \boldsymbol{\phi} \right\rangle \right]$$

avec

(9) $$\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{X}) = \frac{\mathbf{\Sigma}_1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{X})}{\langle \mathbf{\Sigma}_1(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \rangle} - \frac{\mathbf{\Sigma}_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{X})}{\langle \mathbf{\Sigma}_2(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{\phi} \rangle}$$

Le terme en rouges résulte de la non-stationnarité de la fonctionnelle (7). Deux stratégies sont possibles:

- explicite: On calcule explicitement les vecteurs $\frac{\partial}{\partial X_i} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}), \forall\ i$.
- implicite: On résoud une équation importance-source adjointe correspondant à la fonctionnelle R.

La méthode implicite en GPT 1

- On dérive l'équation (1):

$$\Big[\mathbb{A}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X}) \;-\; \mu\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})\Big]\frac{\partial}{\partial X_i}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r})$$

$$= \;-\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{A}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X}) - \mu\,\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{B}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X}) - \frac{\partial \mu}{\partial X_i}\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})\right]\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r}) \tag{10}$$

- On prend le produit interne de l'équation (10) avec une fonction adjointe généralisée $\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r})$:

$$\left\langle\Big[\mathbb{A}\,(\boldsymbol{X}) \;-\; \mu\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X})\Big]\frac{\partial}{\partial X_i}\boldsymbol{\phi},\,\boldsymbol{\Gamma}^*\right\rangle \equiv \left\langle\frac{\partial}{\partial X_i}\boldsymbol{\phi},\,\Big[\mathbb{A}\,(\boldsymbol{X})^\top - \mu\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X})^\top\Big]\boldsymbol{\Gamma}^*\right\rangle$$

$$= \;-\left\langle\left[\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{A}\,(\boldsymbol{X}) - \mu\,\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X}) - \frac{\partial \mu}{\partial X_i}\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X})\right]\boldsymbol{\phi},\,\boldsymbol{\Gamma}^*\right\rangle$$

- On suppose que $\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r})$ est la solution de l'équation suivante:

$$\mathbb{A}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})^\top\,\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r}) - \mu\;\mathbb{B}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})^\top\,\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X}) \tag{11}$$

La méthode implicite en GPT

- On substitue l'équation (12) dans (11):

$$\text{(12)}\ \left\langle \frac{\partial}{\partial X_i}\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{X})\right\rangle = -\left\langle \left[\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{A}\,(\boldsymbol{X}) - \mu\,\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X}) - \frac{\partial \mu}{\partial X_i}\,\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X})\right]\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\Gamma}^*\right\rangle$$

- Finalement, on substitue l'équation (13) dans (8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_i}R \quad &= \quad R\left[\frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial X_i}\boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\phi}\right\rangle}{\langle \boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\phi}\rangle} - \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial X_i}\boldsymbol{\Sigma}_2(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\phi}\right\rangle}{\langle \boldsymbol{\Sigma}_2(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{\phi}\rangle}\right. \\ \text{(13)} \qquad & \left. -\ \left\langle \left[\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{A}\,(\boldsymbol{X}) - \mu\,\frac{\partial}{\partial X_i}\,\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X}) - \frac{\partial \mu}{\partial X_i}\,\mathbb{B}\,(\boldsymbol{X})\right]\boldsymbol{\phi},\ \boldsymbol{\Gamma}^*\right\rangle\right]\end{aligned}$$

On a obtenu une expression de la dérivée de R par rapport aux variables d'état $\boldsymbol{X}$ à condition de pouvoir résoudre l'équation (12):

$$\left[\mathbb{A}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})^\top - \mu\ \mathbb{B}\,(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})^\top\right]\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X})$$

Équation singulière à source

On doit résoudre

$$\left[\mathbb{A}(\boldsymbol{r})^\top - \mu\ \mathbb{B}\ (\boldsymbol{r})^\top\right] \boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{r}) \tag{14}$$

sachant que

$$\left[\mathbb{A}(\boldsymbol{r})^\top - \mu\ \mathbb{B}\ (\boldsymbol{r})^\top\right] \boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

Théorème 1

Une équation singulière à source de type (15) a une solution si et seulement si sa source $\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{r})$ est orthogonale au flux direct $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r})$.

On peut montrer que

$$\left\langle \frac{\boldsymbol{\Sigma}_1(\boldsymbol{r})}{\langle \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\phi}\rangle} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}_2(\boldsymbol{r})}{\langle \boldsymbol{\Sigma}_2, \boldsymbol{\phi}\rangle}, \boldsymbol{\phi} \right\rangle = 1 - 1 = 0 \tag{16}$$

Théorème 2

Une équation singulière à source de type (15) a une infinité de solutions de la forme $\boldsymbol{\Gamma}^*(\boldsymbol{r}) + c\,\boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{r})$, $\forall c \in \Re$.

On devra donc normaliser la solution par une relation de la forme

$$\langle \boldsymbol{\Gamma}^*, \mathbb{B}\boldsymbol{\phi}\rangle = 0 \tag{17}$$

Résolution

La résolution numérique d'une équation singulière à source est semblable à celle des harmoniques supérieures du flux (avec décontamination par l'équation (18)).

- DRAGON4 (réseau)

```
DFLUX := FLU: SYSTEM LIBRARY TRACK FLUX0 DSOUR ::
  EDIT 0 TYPE P  ;
```

  où
  `FLUX0`: flux utilisé pour décontaminer la solution
  `DSOUR`: source GPT

- DONJON4 (coeur)

```
DSOUR := DELTA: FLUX0 SYSTEM DSYSTEM TRACK ;
DFLUX := GPTFLU: DSOUR FLUX0 SYSTEM TRACK ::
  EXPLICIT FROM-TO 1 1 ;
```

Applications à l'ÉPM

- OPTEX: Optimisation du rechargement et du design des réacteurs.
  - chercheur principal: Richard Chambon (`richard-pierre.chambon@polymtl.ca`)
- SENS: Calculs des profils de sensibilité en criticité et en physique des réacteurs.
  - professeur responsable: Guy Marleau (`guy.marleau@polymtl.ca`)
  - collaboration avec l'IRSN et l'INPG
  - projet en cours

méthode OPTEX

- Couplage de la GPT de DONJON avec un algorithme de programmation mathématique
  - méthode de gradient basée sur la linéarisation des caractéristiques de système autour d'un point du domaine réalisable
  - originalité: utilisation d'une hyper-sphère de dimension $\dim(\boldsymbol{X})$ pour limiter le pas d'avance
  - résolution d'un sous-problème d'optimisation à chaque itération
    - problème linéaire avec contrainte quadratique
    - utilisation de la méthode de Lemke
  - Utilisation d'une interpolation multi-cubique (dimension $\dim(\boldsymbol{X})$) dans une base multiparamétrée (la Multicompo)
    - Utilisation de polynomes cubiques de Ceschino
- Traite le cas à l'équilibre du rechargement (time-averaged)
- Appliqué à la réduction des coûts de combustible dans un CANDU-6
- Recherche TABU récemment implémentée (sans GPT)
- Projet débuté en 1980. Actuellement en veille.

Ressources DRAGON4/DONJON4

- Professeur:
  Alain Hébert (alain.hebert@polymtl.ca)
- Sites Moodle:
  ENE6101 (réseau): `https://moodle.polymtl.ca/course/view.php?id=408`
  ENE6103 (coeur): `https://moodle.polymtl.ca/course/view.php?id=593`
- Site Merlin:
  DRAGON4/DONJON4: `http://www.polymtl.ca/merlin`
- Site Archives:
  Infos utiles: `http://www.polymtl.ca/merlin/archives.htm`
- Livre:
  Alain Hébert, Applied Reactor Physics,
  Presses Internationales Polytechnique,
  Montréal, 2009.