MEC6212 : Génération de maillages

MÉTHODE de LAWSON

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
31 mars 2021

Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Modélisation géométrique

Maillages structurés/curvilignes :
- *Méthodes algébriques*
- *Méthodes EDP : Elliptiques*
- *Concentration de mailles*

Maillages non-structurés :
- *Triangulation de Delaunay*
- *Maillages Delaunay contraints*
- *Méthode d'avance de front*
- **Méthode de Lawson**

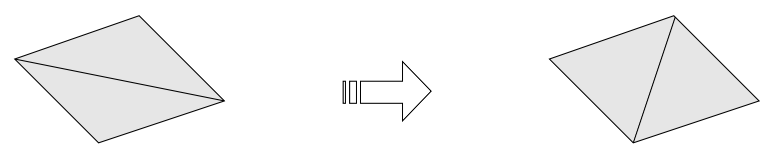
Maillages hybrides :
- *décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.*

Table des matières

1. Principe de base
2. Retournement d'arêtes et triangulation de Delaunay
3. Méthode de Lawson
4. Qualité d'un maillage

Principe de base

Deux triangles partageant une même arête forment un quadrilatère.
- *On peut reconnecter localement cette triangulation en changeant de diagonale.*

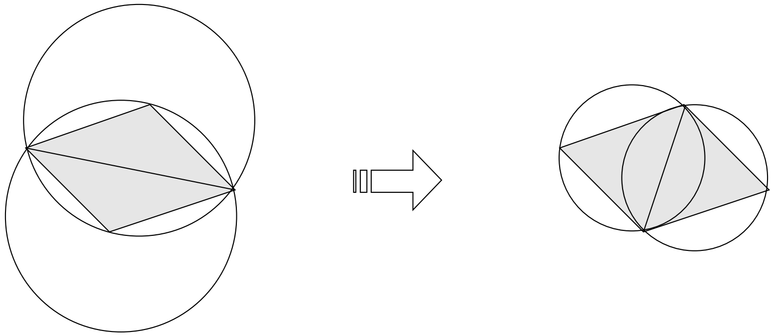


Cette modification de la connectivité ou de topologie s'appelle retournement/bascule d'arêtes/diagonales.

Retournement d'arêtes

Deux triangles partageant une même arête forment un quadrilatère.

- *On peut reconnecter localement cette triangulation en changeant de diagonale.*

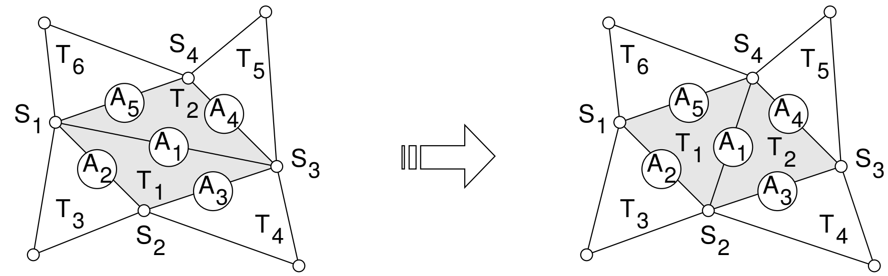


Cette modification de la connectivité ou de topologie s'appelle retournement/bascule d'arêtes/diagonales.

- *Cela donne lieu à une une nouvelle configuration qui vérifie le critère de la sphère vide*

Changement de connectivité

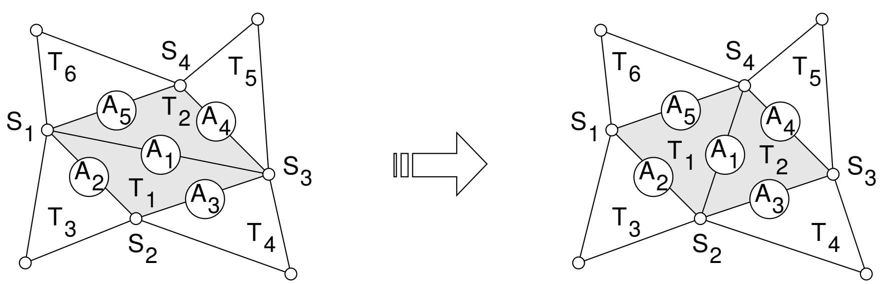
Le nombre de sommets S, d'arêtes A et de triangles T ne changent pas, seules les connectivités des triangles T_1 et T_2, et des arêtes A_1 à A_5 changent.



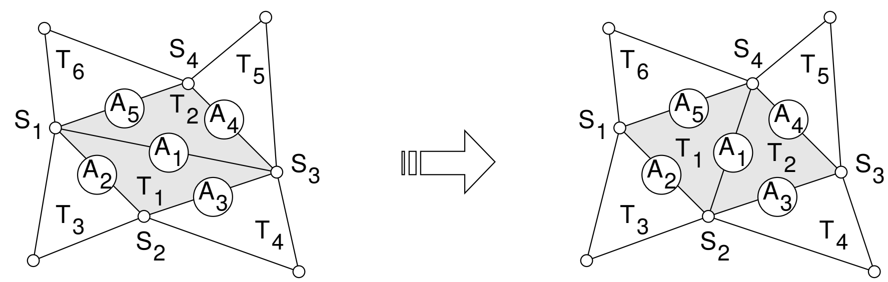
On peut interpréter la bascule comme une rotation solidaire de l'ensemble T_1-A_1-T_2 à l'intérieur du quadrilatère S_1-S_2-S_3-S_4.

Changement de connectivité

Il faut mettre à jour toutes les tables de connectivité utilisées, mais il n'y a pas de mémoire à allouer ou à libérer.

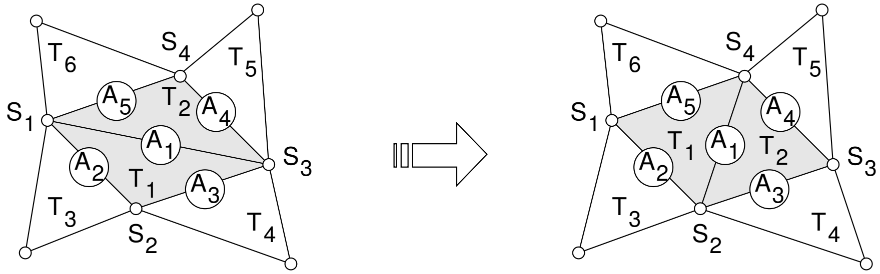


E	$E \to S$		
1	1,2,3	$\to$	1,2,4
2	1,3,4	$\to$	2,3,4



ARE(i,1)	1er sommet
ARE(i,2)	2ième sommet
ARE(i,3)	ELM à gauche
ARE(i,4)	ELM à droite
ARE(i,5)	NOD à gauche
ARE(i,6)	NOD à droite
ARE(i,7)	BRD

ARE	*ARE* $\to$ *ARE*		
1	1,3,2,1,4,2,0	$\to$	4,2,2,1,3,1,0
2		$\to$	
3		$\to$	
4		$\to$	
5	4,1,2,6,3,7,0	$\to$	4,1,1,6,2,7,0

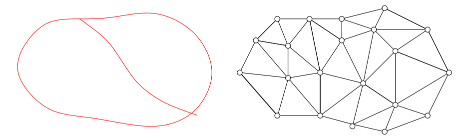


AREbcl(i,1)	A2
AREbcl(i,2)	sens A2
AREbcl(i,3)	A3
AREbcl(i,4)	sens A3
AREbcl(i,5)	A4
AREbcl(i,6)	sens A4
AREbcl(i,7)	A5
AREbcl(i,8)	sens A5

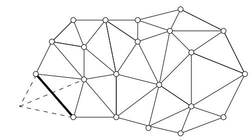
ARE	Avant bascule	$\rightarrow$	Après bascule
	$AREbcl(i, 1:8)$	$\rightarrow$	$AREbcl(i, 1:8)$
1	2,1,3,1,4,1,5,1	$\rightarrow$	5,1,2,1,3,1,4,1
2		$\rightarrow$	
3		$\rightarrow$	
4		$\rightarrow$	
5		$\rightarrow$	

Arêtes admissibles

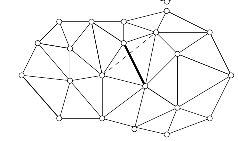
Soit un domaine avec deux faces contigues :



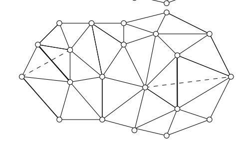
✘ Arête sur la frontière du domaine :
Cette opération n'a pas de sens car l'arête n'est pas partagée ;



✘ Frontière entre deux sous-domaines :
On doit respecter cette division ;

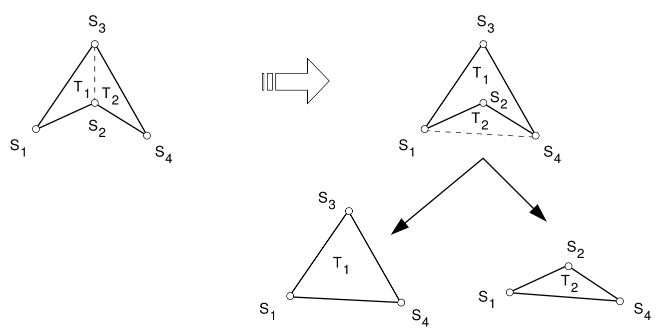


✔ Arête interne :
Seule opération possible.



Quadrilatère non convexe

Pour un quadrilatère non convexe, le retournement d'arête S_3-S_2 vers S_1-S_4 donne lieu à un maillage topologiquement non-conforme :



- *Les nouveaux éléments, T_1 et T_2, résultant de l'opération se chevauchent !*
- **Il est interdit de retourner une arête d'un quadrilatère non convexe.**

1 Principe de base

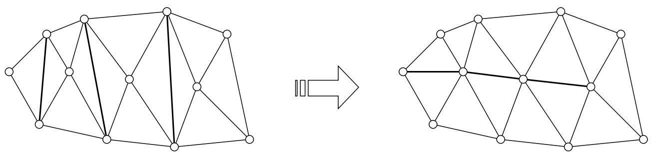
2 Retournement d'arêtes et triangulation de Delaunay

3 Méthode de Lawson

4 Qualité d'un maillage

Succession de retournements d'arêtes

THÉORÈME : *Si $\mathcal{T}_1$ est une triangulation quelconque de l'enveloppe convexe d'un nuage de points $\mathcal{S}$, alors on peut construire la triangulation de Delaunay $\mathcal{T}_{Del}$ en appliquant une succession de retournements d'arêtes.*

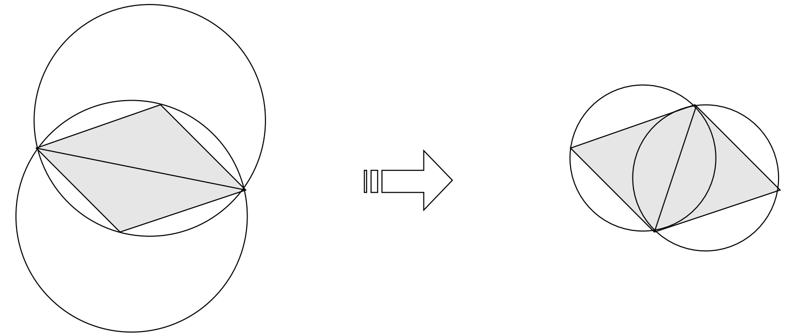


COROLLAIRE : *Si $\mathcal{T}_1$ est une triangulation quelconque de l'enveloppe convexe d'un nuage de points $\mathcal{S}$, alors on peut construire toute triangulation $\mathcal{T}_2$ de cette enveloppe en appliquant des retournements d'arêtes.*

COROLLAIRE : *Avec des retournements d'arêtes, on peut visiter toutes les triangulations possibles de l'enveloppe convexe d'un nuage de points $\mathcal{S}$.*

Application au critère de Delaunay en 2D

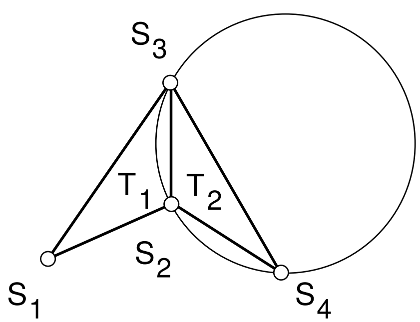
➜ **Si deux triangles adjacents par une arête violent le critère de la sphère vide de Delaunay, alors on retourne cette arête.**



➜ **La connectivité qui en résulte vérifie le critère de la sphère vide de Delaunay.**

Application à un quadrilatère concave

➜ **Deux triangles adjacents qui forment un quadrilatère concave satisfont nécessairement le critère de la sphère vide de Delaunay.**

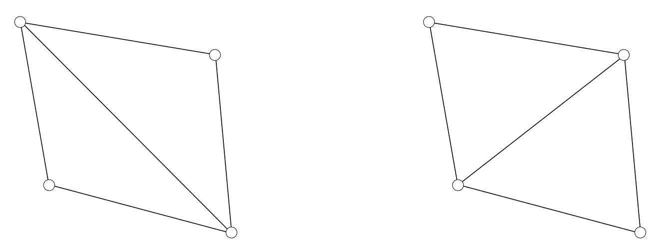


➜ **Deux triangles adjacents par une arête violant le critère de Delaunay forment nécessairement un quadrilatère convexe et donc le retournement d'arêtes est toujours possible.**

Critère maxmin en 2D

Le retournement d'arêtes est équivalent à l'application du critère de la sphère vide et au critère de maximiser le minimun des angles.

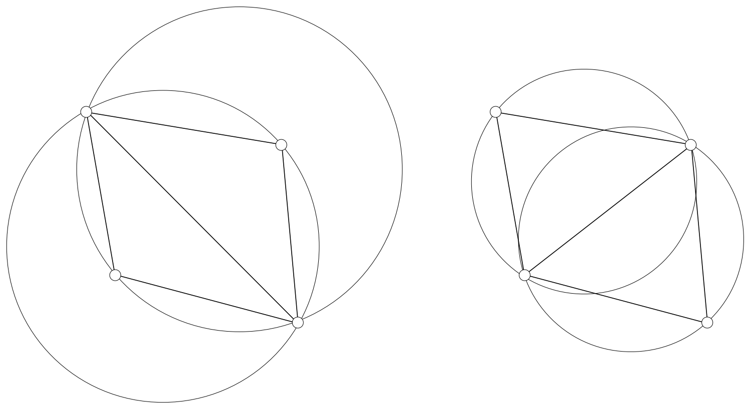
Delaunay : critère de la sphère vide	➜	Critère ***maxmin*** : maximiser le minimum des angles



Critère maxmin en 2D

Le retournement d'arêtes est équivalent à l'application du critère de la sphère vide et au critère de maximiser le minimun des angles.

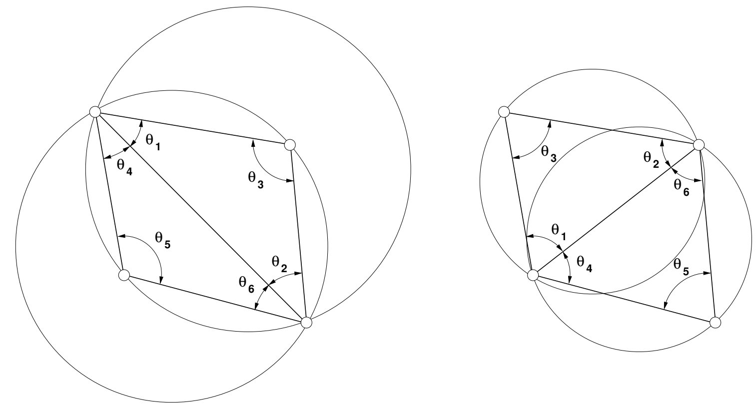
Delaunay : critère de la sphère vide	➜	Critère ***maxmin*** : maximiser le minimum des angles



Critère maxmin en 2D

Le retournement d'arêtes est équivalent à l'application du critère de la sphère vide et au critère de maximiser le minimun des angles.

Delaunay : critère de la sphère vide	➜	Critère ***maxmin*** : maximiser le minimum des angles



1 Principe de base

2 Retournement d'arêtes et triangulation de Delaunay

3 Méthode de Lawson

4 Qualité d'un maillage

Méthode de Lawson

Méthode incrémentale pour obtenir une triangulation de Delaunay à partir d'une triangulation $\mathcal{T}$ quelconque en appliquant une succession de retournement d'arêtes.

- *Toutes les configurations de deux simplexes adjacents sont analysées et là où le critère de Delaunay est violé, on applique un retournement de la diagonale du quadrilatère formé par les deux triangles.*
- *On applique ce procédé jusqu'à ce qu'il soit vérifié partout dans la triangulation.*
- *Le lemme général de Delaunay garantit la convergence :*

Lemme général de Delaunay : *Si $\mathcal{T}$ est une triangulation quelconque de l'enveloppe convexe d'un nuage de points $\mathcal{S}$, alors si la propriété de la sphère vide est vérifiée pour toute configuration de deux simplexes adjacents de $\mathcal{T}$, alors elle est vérifiée globalement et $\mathcal{T}$ est une triangulation de Delaunay.*

Algorithme

Soit $\mathcal{T}_i$, la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe des i premiers sommets du nuage de sommets $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1,\ldots,N}$.

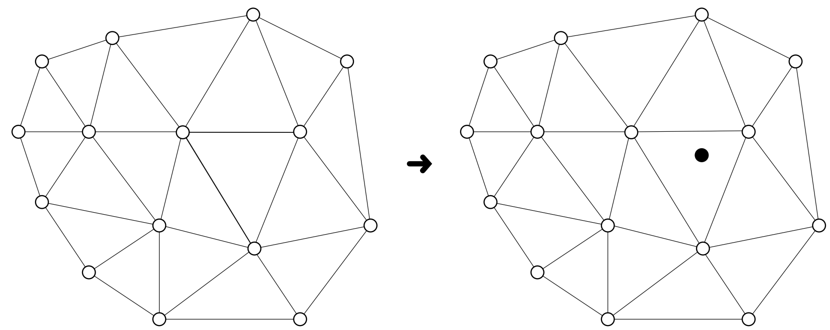
➜ **On construit $\mathcal{T}_{i+1}$ à partir de $\mathcal{T}_i$ et du sommet P comme suit :**

1. ***Insertion :*** Trouver à quel triangle K appartient le sommet P.
2. ***Connection :*** Construire une triangulation $\mathcal{T}_{i+1}$ en reliant le sommet P aux sommets du triangle K.
3. ***Retournement :*** Appliquer le retournement des arêtes de la triangulation qui violent le critère de Delaunay jusqu'à convergence.

➜ Théorème : **Si $\mathcal{T}_i$ est une triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe des i premiers sommets d'un nuage de sommets $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{T}_{i+1}$, la triangulation obtenue avec la méthode de Lawson en insérant le point P comme $(i+1)$ième sommet, est une triangulation de Delaunay.**

Insertion d'un point

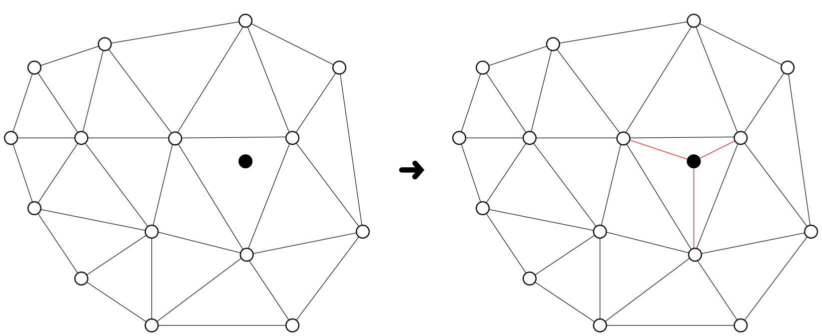
On insère le point P dans la triangulation initiale de Delaunay $\mathcal{T}_i$.



Par un algorithme d'inclusion, on trouve le triangle K de $\mathcal{T}_i$ qui comprend le point P.

Connection

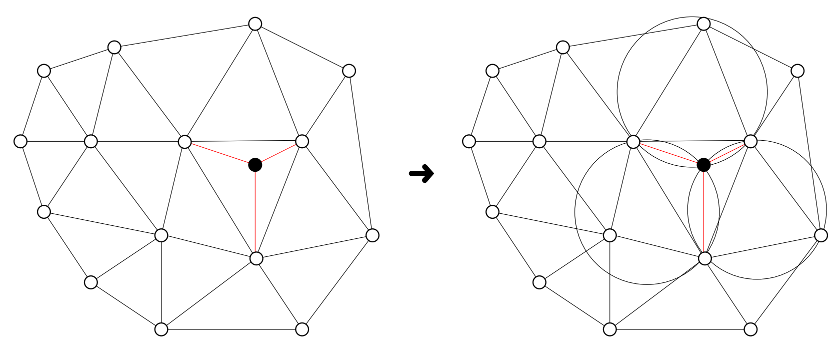
On relie le sommet P aux sommets du triangle K



On obtient une triangulation qui n'est pas de Delaunay.

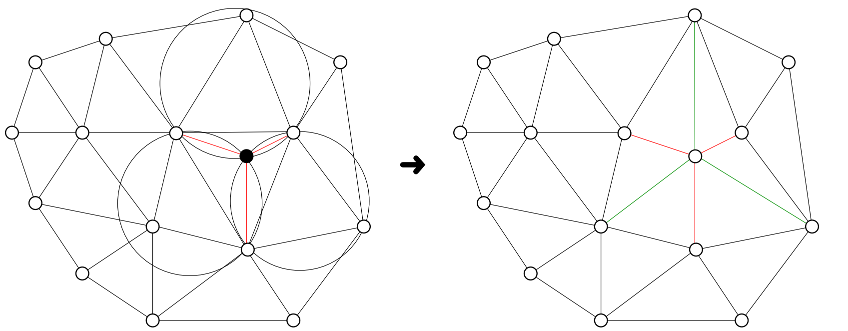
Critère de la sphère vide

On applique le critère de l sphère vide en itérant sur les arêtes de la triangulation et retournant celles qui violent le critère de Delaunay jusqu'à convergence.

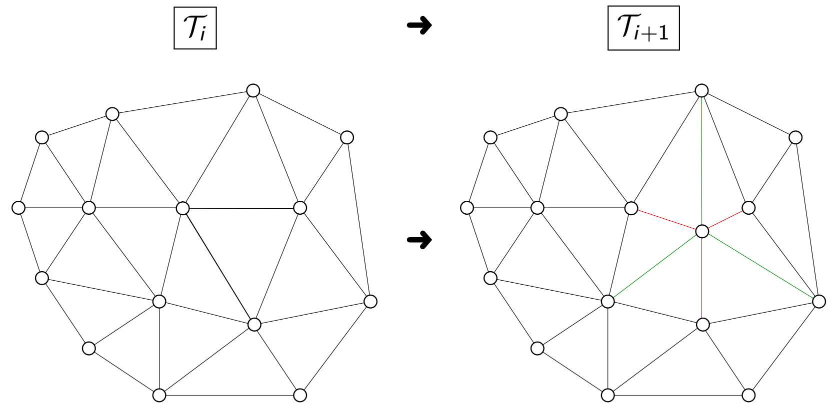


Retournement d'arêtes

On applique le basculement des arêtes qui violent le critère de Delaunay :



On élimine le triangle K.



1 Principe de base

2 Retournement d'arêtes et triangulation de Delaunay

3 Méthode de Lawson

4 Qualité d'un maillage

Mesures de la qualité

Pour un maillage donné, on peut mesurer sa qualité selon deux types de critères :

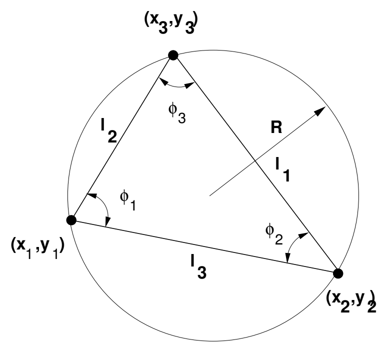
Géométrique : Pour chaque élément, la différence avec un élément de référence équilatéral.

Topologique : Le nombre d'arêtes, éléments ou sommets entourant chaque sommet est dénommée la valence, et on la compare à celle d'un sommet de référence qui est entouré de six éléments ou arêtes.

Critères géométriques

L'angle minimun $\phi_{min} = min(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ou l'angle maximum, ϕ_{max}, peuvent servir comme mesure. D'autres critères sont couramment utilisés, dont,

$$QA = \frac{4\sqrt{3}A}{\sum_{i=1}^{3} l_i^2}$$



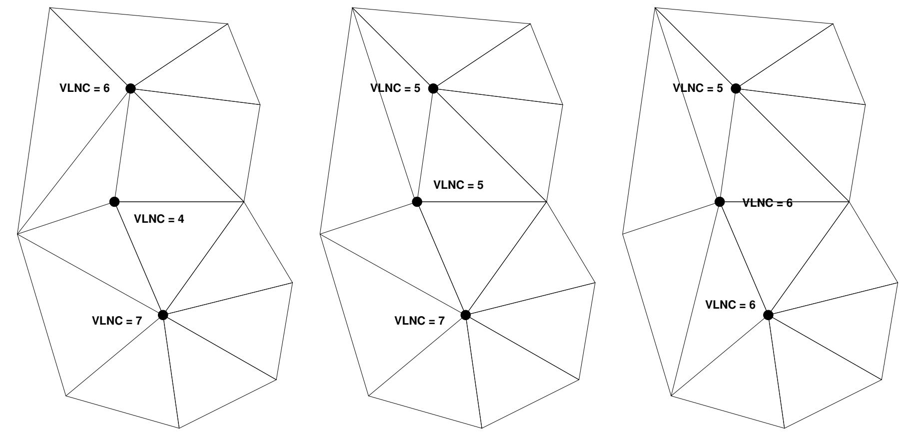
où A est l'aire du triangle , et $l_i (i = 1, 2, 3)$ sont les longueurs des arêtes du triangle.

$$QR = R/l_{min}$$

où R est le rayon du cercle circonscrit, et l_{min} la longueur de l'arête la plus petite.

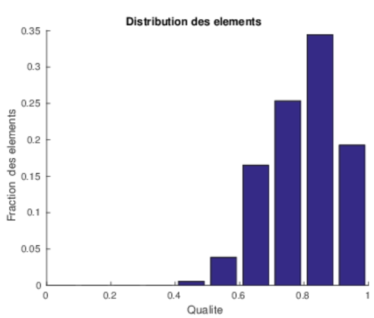
Le choix d'un critère dépendra du contexte. En général, ils sont équivalents.

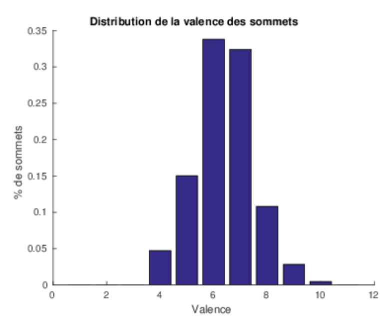
Critères topologiques



Divers critères de qualité

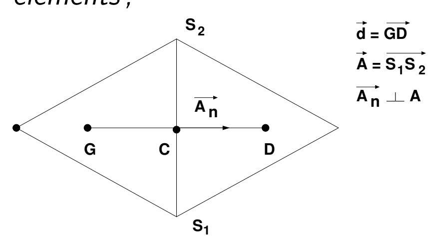
Les résultats sont présentés sous forme d'histogrammes qui donnent la distribution des éléments dont la valeur du critère est compris à l'intérieur d'un intervalle donné.
On donne la fraction ou le pourcentage d'éléments pour différentes tranches de ces valeurs.

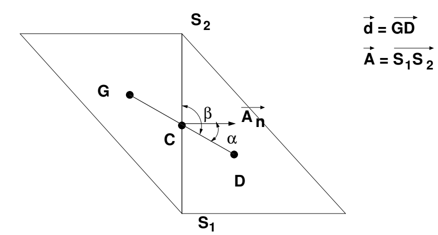




Orthogonalité

- *Un maillage est localement orthogonal si, sur une arête, le vecteur $\vec{d}$, entre le centre G d'un élément et le centre D de l'élément voisin, est parallèle au vecteur $\vec{A_n}$, normal à $\vec{A}$, l'arête que partagent ces deux éléments ;*

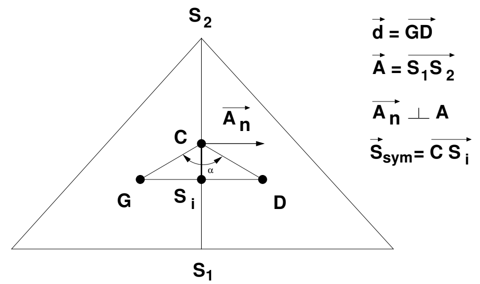




- *On peut choisir comme mesure de l'orthogonalité, soit l'angle α ou son complément, β ;*
- *Afin d'alléger les calculs, on évitera de calculer des angles, mais on utilisera plutôt cos ou sin qui donneront des valeurs comprises entre 0 et 1, pour la non-orthogonalité et l'orthogonalité, respectivement.*

Asymétrie

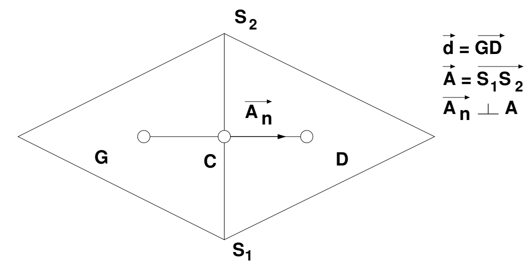
- *L'asymétrie d'un maillage est une mesure de la variation de la qualité (forme) d'un élément et ses voisins.*
  Pour un cas orthogonal et uniforme,



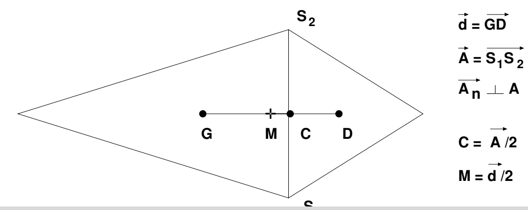
- *Si le segment GD n'intercepte pas le centre C de la face (arête), A, le maillage est défini comme asymétrique.*
- *On utilisera la distance $|\vec{CS_i}|$ comme mesure. Pour fins de calculs, l'angle α (ou bien cos(α) , sin(α)) peut s'avérer intéressant.*

Uniformité

Un maillage est dit uniforme lorsque **c**, le milieu de $\vec{d}$ est sur l'arête $\vec{A}$.

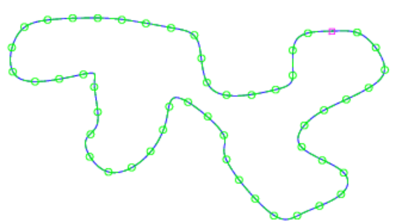


Une mesure de la non-uniformité peut être la distance MC, entre les points milieu des segments GD et S_1S_2.



Amélioration de la qualité d'un maillage

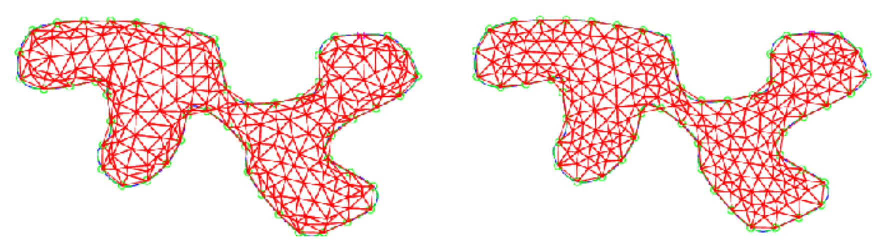
- *Un maillage est caractérisé par la géométrie du domaine et par la méthode de maillage ;*



- *On améliore la qualité d'un maillage nonstructuré par deux actions :*
  Géométrique : en déplacant un sommet par rapport à ces voisins.
  Topologique : en modifiant la connectivité d'un sommet.
- *Ces deux opérations modifient les valeurs des critères de qualité.*

Amélioration de la qualité d'un maillage

- *Un maillage est caractérisé par la géométrie du domaine et par la méthode de maillage ;*



- *On améliore la qualité d'un maillage nonstructuré par deux actions :*
  Géométrique : en déplacant un sommet par rapport à ces voisins.
  Topologique : en modifiant la connectivité d'un sommet.
- *Ces deux opérations modifient les valeurs des critères de qualité.*

Ce post-traitement est la dernière étape d'un algorithme de maillage.

Barycentrage

Le barycentrage est une technique de lissage par laquelle les sommets d'un maillage sont relocalisés par la solution d'une EDP telle que Laplace ou Winslow.

- *Ces opérateurs de type elliptique impriment une régularité à la répartition de sommets en uniformisant leur espacement.*
- *En pratique, on utilise une technique itérative où les coordonnées de chaque sommet sont recalculées comme la moyenne de ses voisins.*

$$x_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}$$

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j}{n}$$

où n est la valence du sommet, et $j = 1 : n$ identifie les sommet connectés au sommet i du maillage.

- Le résultat est un maillage très uniforme pour la plupart des cas, mais peut donner un maillage non-conforme pour des configurations concaves avec des grandes variations de courbure.
- Pour de telles situations, l'équation de Winslow serait une meilleure approche.