

TRIANGULATION de DELAUNAY

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique
28 février 2024



Table des matières

- 1 Historique
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Propriétés des triangulations de Delaunay en ND
- 4 Diagramme de Voronoï dans la nature
- 5 Le noyau de Delaunay
- 6 Mise en oeuvre



Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Modélisation géométrique

Maillages structurés :

- Méthodes algébriques : maillages conformes, transfinis ;
- Méthodes EDP : Elliptiques (Winslow), hyperboliques.

Maillages non-structurés :

- **Triangulation de Delaunay**
- Maillages Delaunay contraints
- Méthode d'avance de front

Maillages hybrides :

- décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique.

Historique

Sur le plan fondamental : Le diagramme de Voronoï



Peter Gustav **Lejeune-Dirichlet**, 1805–1859, a montré qu'en $2D^1$, à partir d'un nuage de points, on peut partitionner le plan en cellules convexes en se basant sur des critères de proximité.

George **Voronoï** 1868–1908, a étendu les travaux de Dirichlet en ND et traduit la notion de proximité en celle de cellule polygonale² ou diagramme de Voronoï.



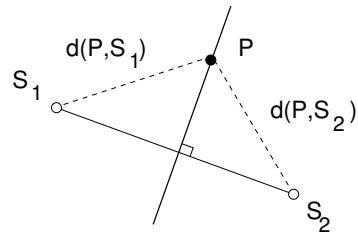
1. "Über die reduction der positiven quadatischen formen mit drei understimmten ganzen zahlen", *Z. Angew Math. Mech.*, Vol 40, no 3, pp. 209–227, **1850**.

2. "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les paralléloèdes primitifs". *Journal Reine Angew. Math*, Vol 134, **1908**.

La médiatrice

Soit,

- S_1 et S_2 , deux sommets dans \mathcal{R}^2 .
- $\overline{S_1 S_2}$, le segment de droite reliant S_1 et S_2 .
- $d(\cdot, \cdot)$, la distance Euclidienne entre deux points de l'espace.



→ La médiatrice $\mathcal{M}(S_1, S_2)$ est le lieu des points équidistants de S_1 et S_2 .

$$\mathcal{M}(S_1, S_2) = \{P \in \mathcal{R}^2 \mid d(P, S_1) = d(P, S_2)\},$$

→ Géométriquement, il s'agit de la bissectrice perpendiculaire du segment entre deux sommets.

Partition du plan

1 La médiatrice sépare les points du plan en deux régions.

- La première comprend les points qui sont plus proche de S_1 , et la seconde, ceux qui sont le plus proche de S_2 .
- Ceci permet d'associer une région de l'espace à un noeud en particulier.

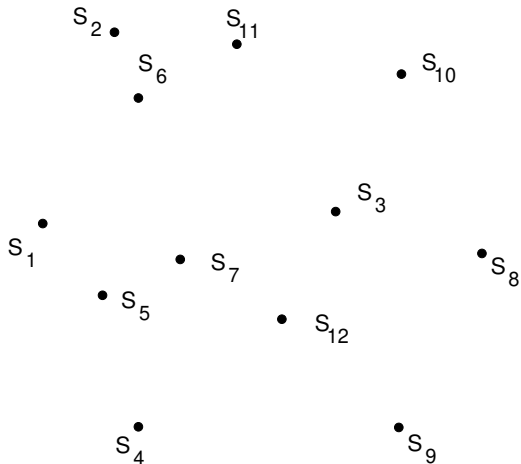
$\mathcal{R} \rightarrow$ Sommet

- Tous les points du plan sont associés à l'un ou l'autre des deux noeuds, soit S_1 ou S_2 .
- Cette association découle de la notion de proximité qui dépend de la façon de calculer les distances.

2 Cette partition s'applique également en dimension 3.

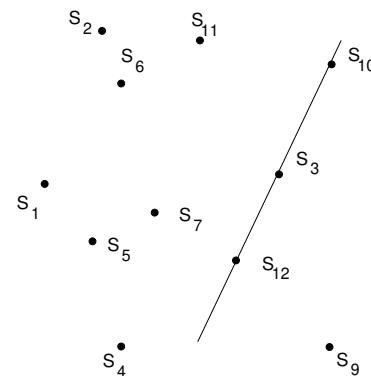
Une distribution régulière de sommets

Soit $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1, \dots, N}$, un nuage de N sommets.

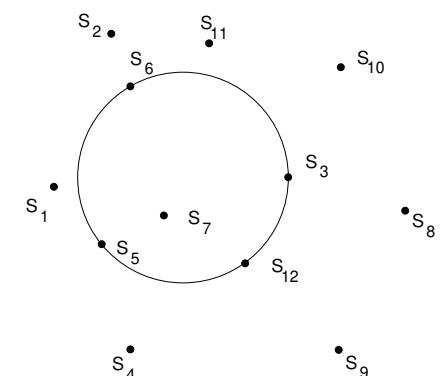


Une distribution régulière de sommets suppose qu'il n'y a ni l'une, ni l'autre des configurations suivantes :

trois sommets colinéaires



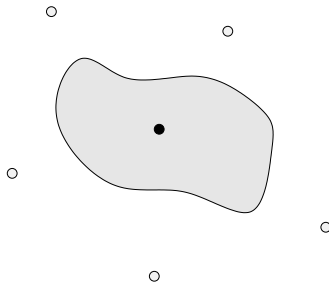
quatre sommets cocycliques



Cellule de Voronoï

DÉFINITION : La cellule de Voronoï $C(S_i)$ associée au sommet S_i , est le lieu des points de l'espace qui sont plus proche de S_i que de tout autre sommet :

$$C(S_i) = \{P \in \mathcal{R}^2 \mid d(P, S_i) \leq d(P, S_j), \forall j \neq i\}.$$

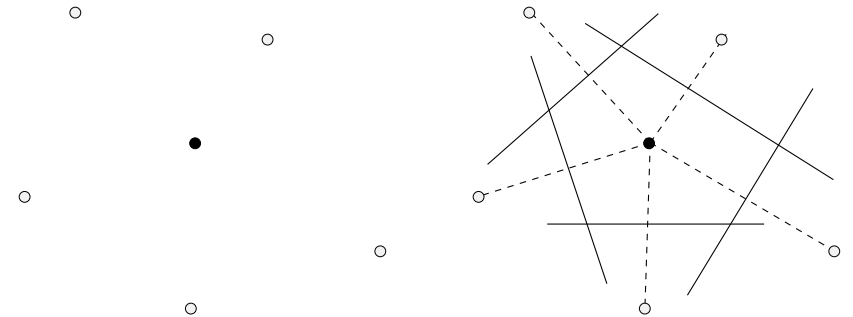


Quelle est la forme de cette cellule ?

3. Aussi appelée cellule de Wigner-Seitz

Construction de la Cellule de Voronoï

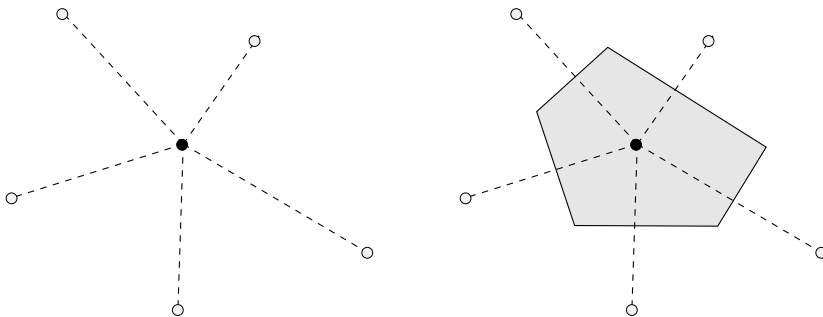
On partitionne le plan avec chacune des médiatrices $M(S_i, S_j)$ entre le sommet S_i et chacun des sommets S_j qui l'entourent.



→ Cette portion du plan délimitée par ces médiatrices $M(S_i, S_j)$ donne le lieu des points de l'espace qui sont plus proche de S_i que de tout autre sommet S_j .

Construction de la Cellule de Voronoï

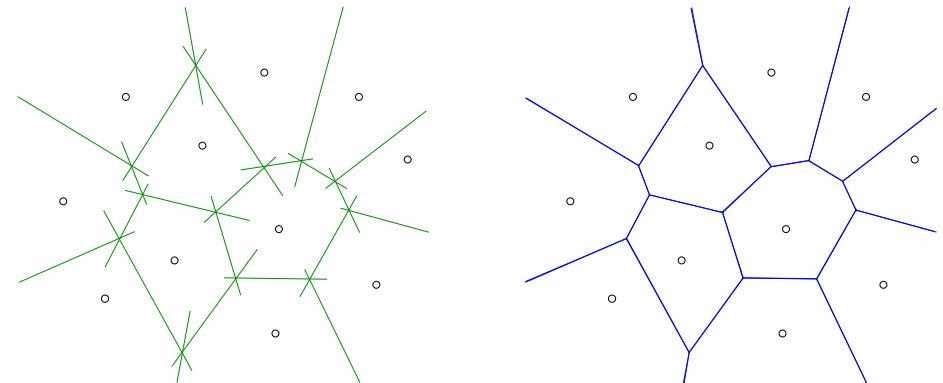
On partitionne le plan avec chacune des médiatrices $M(S_i, S_j)$ entre le sommet S_i et chacun des sommets S_j qui l'entourent.



→ Ce concept permet d'associer une portion de l'espace à un noeud donné.

Diagramme de Voronoï

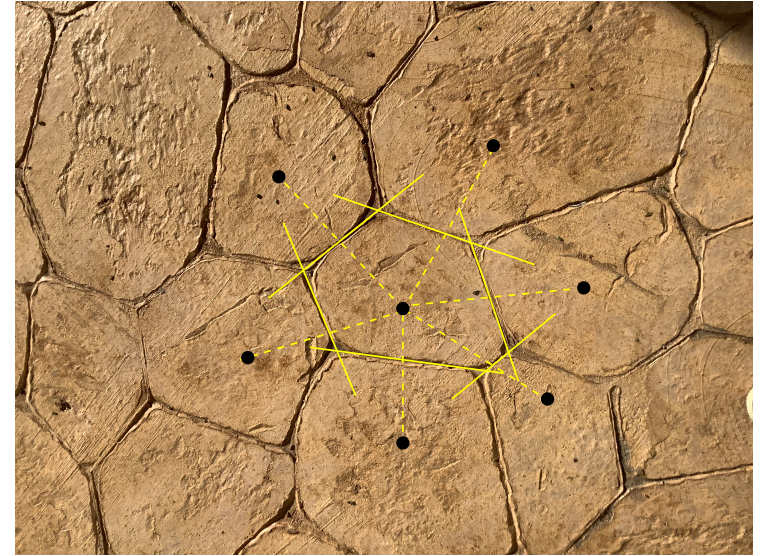
L'ensemble des cellules de Voronoï associées à l'ensemble des sommets du nuage de sommets forme le diagramme de Voronoï,



Est-ce un diagramme de Voronoï?



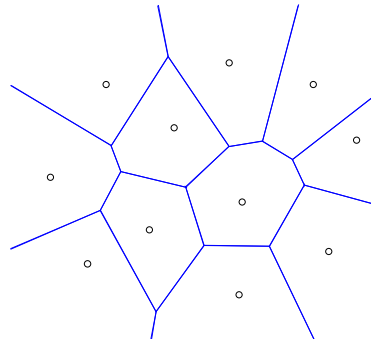
Est-ce un diagramme de Voronoï?



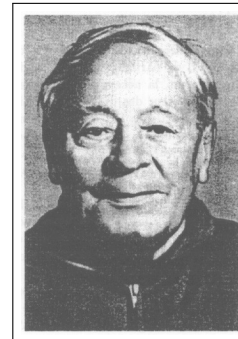
Les cellules de Voronoï

Les cellules de Voronoï,

- sont des polygones en 2D, des polyèdres en 3D, des N -polytopes en ND ;
- sont convexes ;
- recouvrent l'espace sans chevauchement ;
- sont fermées si elles sont entourées de sommets, sinon elles peuvent être ouvertes.
- Les sommets du polygone de Voronoï se trouvent à l'intersection de trois médiatrices ;
- Les points qui ont servis à la construction du diagramme de Voronoï se trouvent au barycentre de ces cellules.



Cellules de Voronoï et triangulation



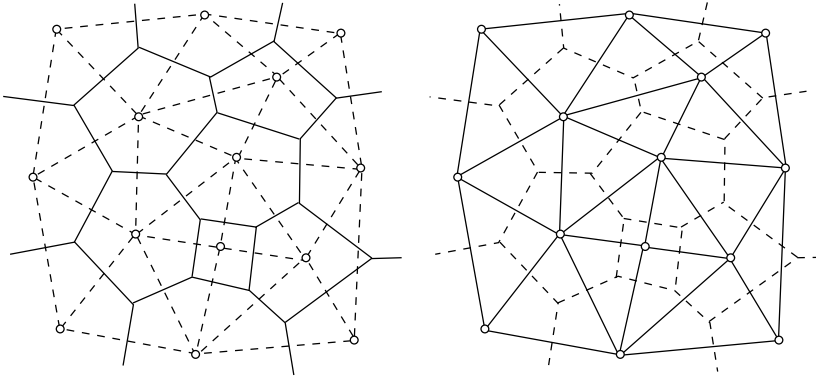
Delaunay a montré comment obtenir une triangulation comme le dual des diagrammes de Voronoï.

Boris Nikolaevich DELONE ou DELAUNAY, 1890–1980 "Sur la sphère vide", Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1934.

Le critère de la sphère vide pose que le cercle (sphère) circonscrit aux sommets des triangles (tétraèdres) composant la triangulation ne contient aucun autre sommet.

Dualité : Voronoï → Triangulation de Delaunay

A partir du diagramme de Voronoï, on relie le centroïde de chaque cellule avec celui de chacune des cellules voisines au travers du côté correspondant du polygone.



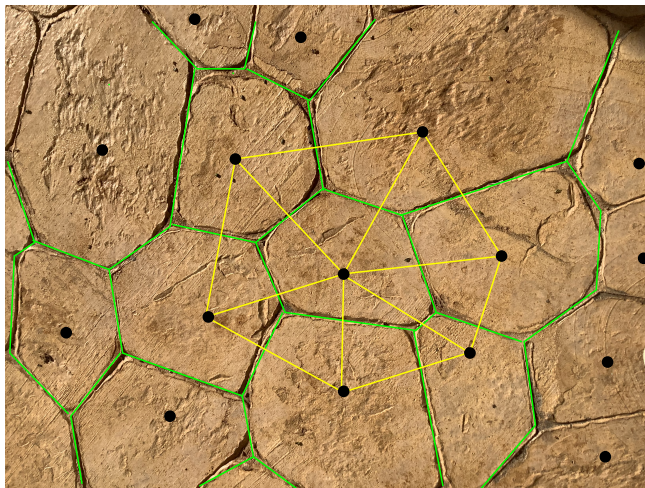
Le résultat de cette construction est appelée :
la triangulation de Delaunay

De par sa construction, il en découle les propriétés suivantes :

- les éléments sont des *simplexes* ;
- les éléments sont un recouvrement de l'espace et ne se chevauchent pas ;
- les éléments respectent la propriété *max-min* : qui maximise l'angle le plus petit.

On retient trois propriétés dérivées de ces résultats théoriques qui seront critiques dans le développement d'algorithmes de génération de maillages :

- Dualité entre le polygone de Voronoï et la triangulation de Delaunay.
- Triangulation "équilatérale" ou la propriété *max-min* ;
- Critère de la *sphère vide*.



Sur le plan pratique

A partir des développements fondamentaux de Lejeune-Dirichlet et George Voronoï des méthodes algorithmiques et pratiques ont été proposées.

C. L. Lawson⁴

a proposé une méthode constructive d'une triangulation de Delaunay avec le retournement d'arêtes.

P. Green et R. Sibson⁵

ont montré que la triangulation de Delaunay maximise le minimum des angles pour tous les triangles de la triangulation.

4. C. L. LAWSON. "Generation of a Triangular Grid with Application to Contour Plotting", California Institute of Technology, JPL-299, 1972.

5. "Computing Dirichlet Tesselations in the Plane", Computer Journal, Vol 21, pp. 168-173, 1978.

Mise en oeuvre informatique

F. Hermeline⁶, A. Bowyer⁷, D. F. Watson⁸,
introduisent des méthodes constructives ainsi que des algorithmes de
triangulations de Delaunay en ND à l'aide du noyau de Delaunay.

M.-G. Vallet⁹,
réalise une extension de ces travaux pour un maillage adapté comme une
triangulation de Delaunay dans un espace déformé par une métrique.

6. "Une méthode automatique de maillage en dimension n ", Thèse de
l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, **1980**.

7. "Computing Dirichlet Tessellations", Computer Journal, Vol 24, no 2,
pp. 162–167, **1981**.

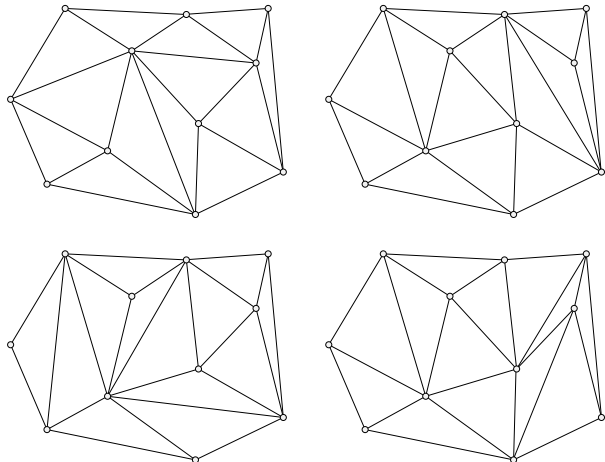
8. "Computing the n -dimensional Delaunay Tessellation with Application to
Voronoi Polytopes", Computer Journal, Vol 24, no 2, pp. 167–172, **1981**.

9. "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs", Thèse de
l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, **1992**.

- 1 Historique
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Propriétés des triangulations de Delaunay en ND
- 4 Diagramme de Voronoï dans la nature
- 5 Le noyau de Delaunay
- 6 Mise en oeuvre

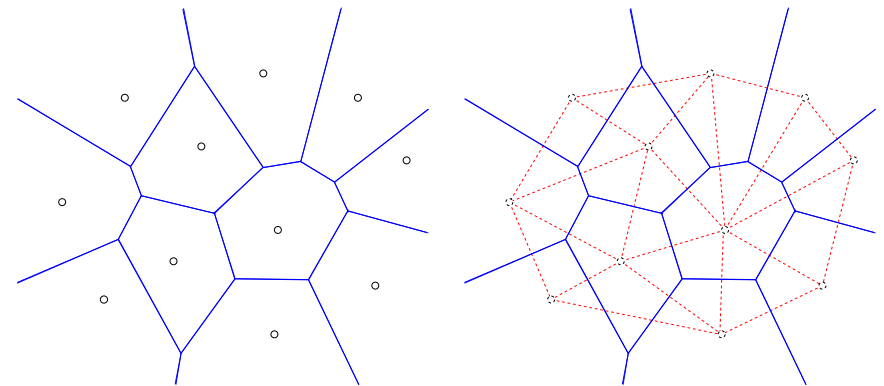
Triangulations diverses

Le même nuage de points peut se trianguler de plusieurs façons
différentes.



Laquelle choisir ?

Parmi toutes ces possibilités, il y a **une triangulation** qui est basée
sur le diagramme de Voronoï, et construite en reliant le centroïde
de chaque cellule avec celui de chaque voisin au travers du côté
correspondant du polygone.

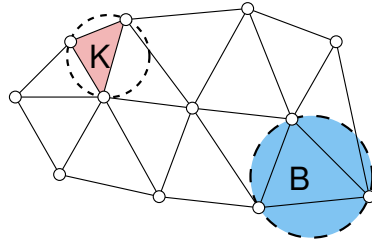


Cette triangulation, dite de Delaunay, est unique, et donne
l'enveloppe convexe du nuage de points.

Critère de la sphère vide

Soit,

- \mathcal{T} , une triangulation d'un ensemble de noeuds ;
- K , un simplexe en ND (triangle en 2D, tétraèdre en 3D) de cette triangulation ;
- \mathcal{B} , la boule (disque en 2D, sphère en 3D, boule en ND) passant par les $N + 1$ sommets du simplexe K .



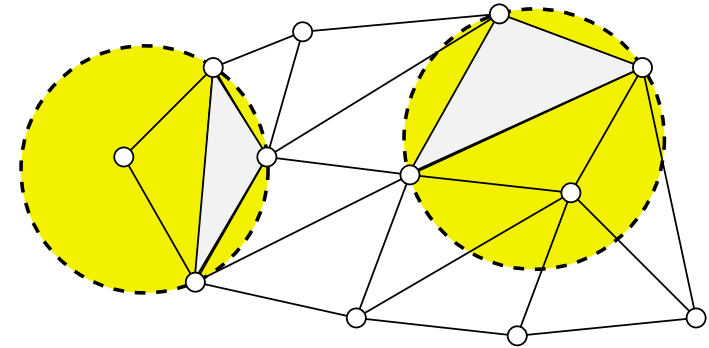
→ Un simplexe K vérifie le critère de la sphère vide, si la boule ouverte circonscrite au simplexe K est vide (i.e., ne contient aucun sommet de la triangulation).

(Si on considère la boule fermée circonscrite au simplexe K , elle contient uniquement les sommets du simplexe K .)

Critère de la sphère vide violé

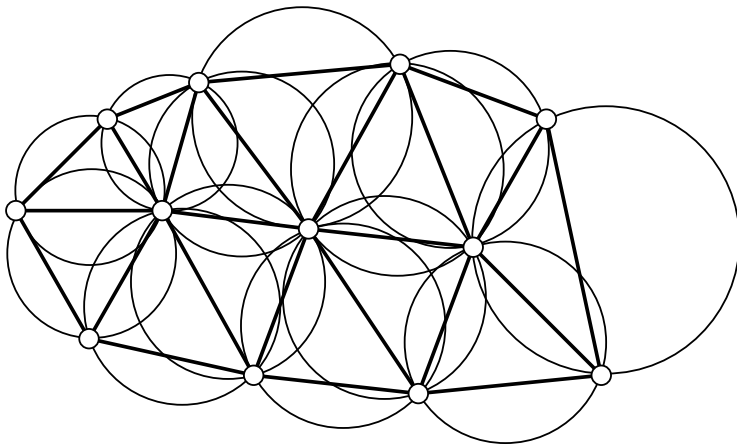
Un simplexe K ne vérifie pas le critère de la sphère vide,

- si la boule ouverte circonscrite au simplexe K n'est pas vide (c-à-d contient un ou plusieurs sommets de la triangulation) ;
- ou encore, si la boule fermée circonscrite au simplexe K contient d'autres sommets que ceux du simplexe K .



Triangulation de Delaunay

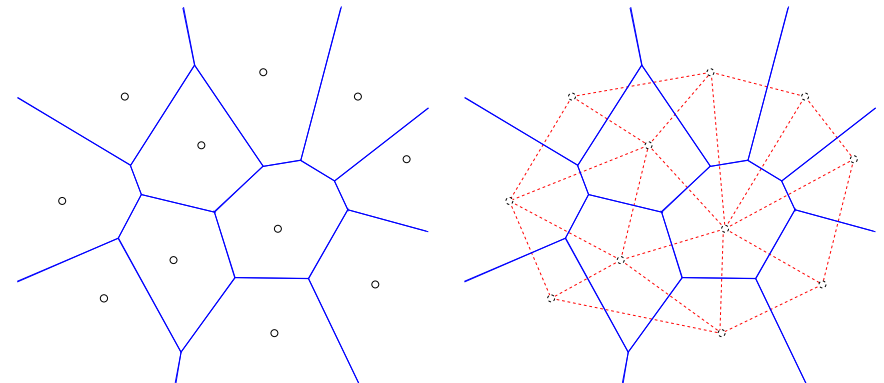
Si tous les éléments, K , d'une triangulation, \mathcal{T} , vérifient le critère de la sphère vide, alors la triangulation est dite de Delaunay.



Dualité Delaunay-Voronoi

Le diagramme de Voronoï est le dual de la triangulation de Delaunay et vice versa, c'est-à-dire, on peut déduire :

- le diagramme de Voronoï de la triangulation de Delaunay ;
- ou encore, déduire la triangulation de Delaunay du diagramme de Voronoï.



- 1 Historique
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Propriétés des triangulations de Delaunay en ND
- 4 Diagramme de Voronoï dans la nature
- 5 Le noyau de Delaunay
- 6 Mise en oeuvre

Propriété maxmin

En 2D, la triangulation de Delaunay :

- 1 maximise le minimum des angles formés par les arêtes de la triangulation.
- 2 minimise le maximum des rayons des cercles circonscrits aux éléments de la triangulation.

S'il existe une triangulation du nuage de sommets telle que tous les angles soient aigus, alors c'est la triangulation de Delaunay.

- Ces propriétés sont fausses en 3D.

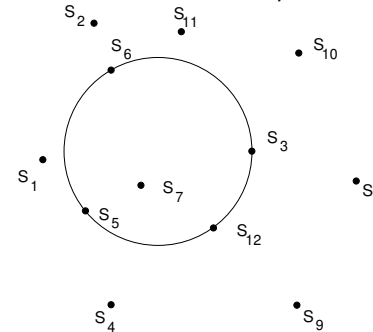
- La triangulation de Delaunay est obtenue à partir du diagramme de Voronoï en joignant les sommets dont les cellules de Voronoï partagent un côté.
- Les cellules de Voronoï sont obtenues à partir de la triangulation de Delaunay en intersectant les médiatrices des arêtes de la triangulation.
- Les sommets du diagramme de Voronoï sont au centre des cercles circonscrits aux simplexes de la triangulation de Delaunay.
- Les arêtes de la triangulation de Delaunay sont perpendiculaires aux côtés des cellules de Voronoï.
- Les côtés des cellules de Voronoï sont les médiatrices des arêtes de la triangulation de Delaunay.

Unicité en ND

La triangulation de Delaunay \mathcal{T} d'un nuage de points S est unique.

- Sauf s'il y a quatre points cocycliques en 2D.
- Sauf s'il y a cinq points cosphériques en 3D.

Ceci est illustré par le fait que les quatre sommets cocycliques peuvent être reliés de deux façons.



- 1 Historique
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Propriétés des triangulations de Delaunay en ND
- 4 Diagramme de Voronoï dans la nature
- 5 Le noyau de Delaunay
- 6 Mise en oeuvre

- 1 Historique
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Propriétés des triangulations de Delaunay en ND
- 4 Diagramme de Voronoï dans la nature
- 5 Le noyau de Delaunay
- 6 Mise en oeuvre

Le noyau de Delaunay

Soit,

- $\mathcal{S} = \{S_j\}_{j=1,\dots,N}$, un nuage de N sommets ;
- \mathcal{T}_i , la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe des i premiers sommets de \mathcal{S} .

→ On construit \mathcal{T}_{i+1} à partir de \mathcal{T}_i en ajoutant le sommet $P = S_{i+1}$:

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$

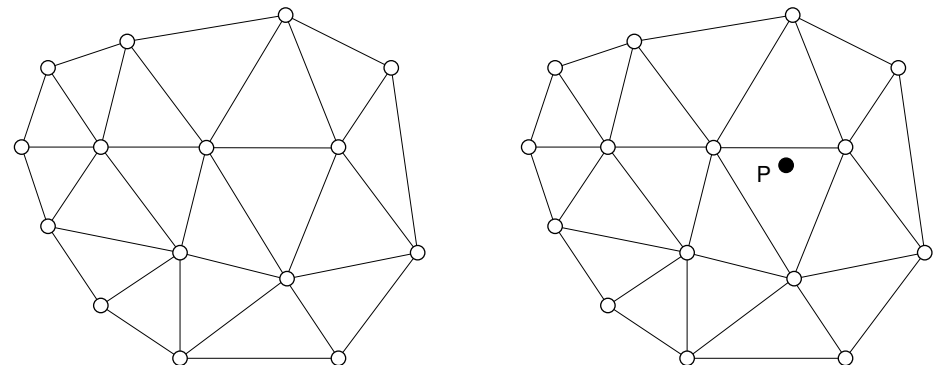
où \mathcal{C}_P , la cavité, est l'ensemble des éléments qui violent le critère de la sphère vide.

- On retire \mathcal{C}_P , et on relie P aux sommets du polygone de la cavité ;
- On construit la boule, \mathcal{B}_P , les éléments ayant P comme sommet ;
- On insère \mathcal{B}_P dans la triangulation, donnant \mathcal{T}_{i+1} .

→ alors, \mathcal{T}_{i+1} , la triangulation obtenue avec le noyau de Delaunay en insérant le point P comme $(i + 1)$ ième sommet, est une triangulation de Delaunay.

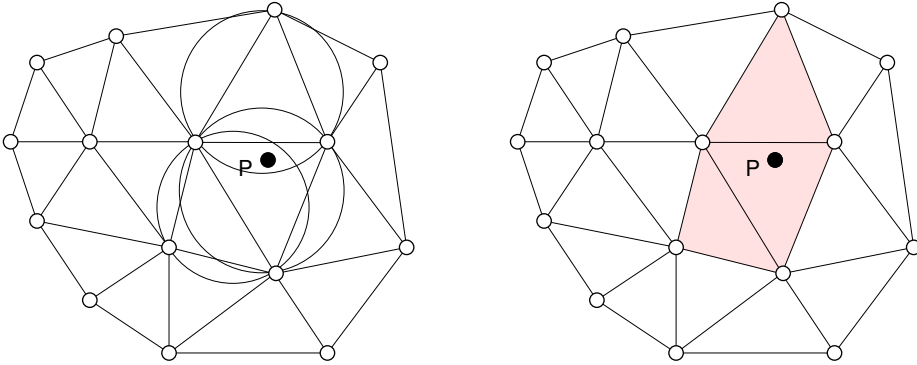
Insertion d'un point

On modifie \mathcal{T}_i , une triangulation de Delaunay existante, en y insérant un nouveau sommet, P :



La cavité

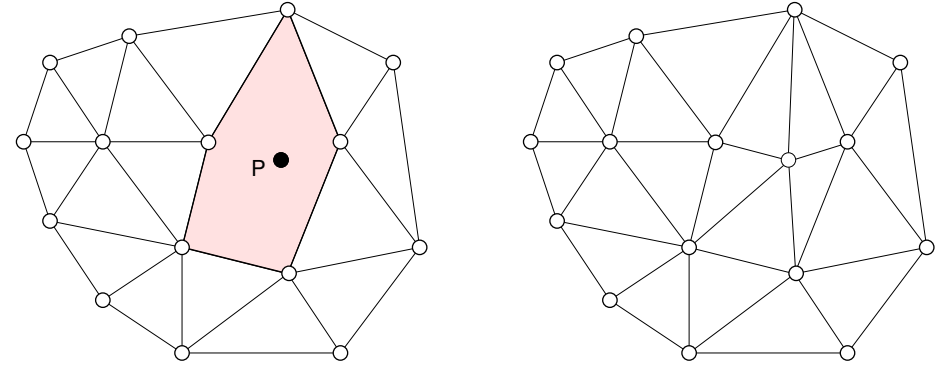
La cavité \mathcal{C}_P associée au sommet P , intérieur à \mathcal{T}_i , est l'ensemble des éléments de cette triangulation dont la boule circonscrite contient ce point.



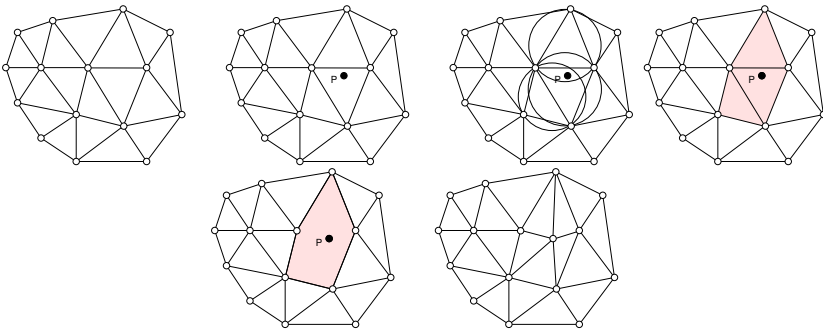
La boule

La boule \mathcal{B}_P associée à un point P est :

- constituée de l'ensemble des éléments de la triangulation \mathcal{T} ayant P comme sommet.
- construite en connectant le point P aux sommets du périmètre de la cavité. Ce qui donne la nouvelle triangulation \mathcal{T}_{i+1} .



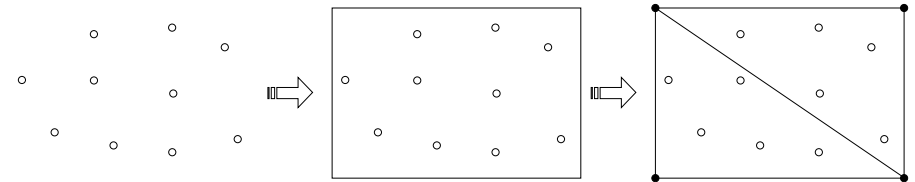
$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_P + \mathcal{B}_P$$



- Les modifications apportées à une triangulation de Delaunay lors de l'insertion d'un sommet se limitent à la cavité associée à celui-ci.
- Le noyau de Delaunay est donc assez localisé.
- Cette procédure incrémentale nécessite au départ un maillage qui doit être Delaunay.

La triangulation initiale

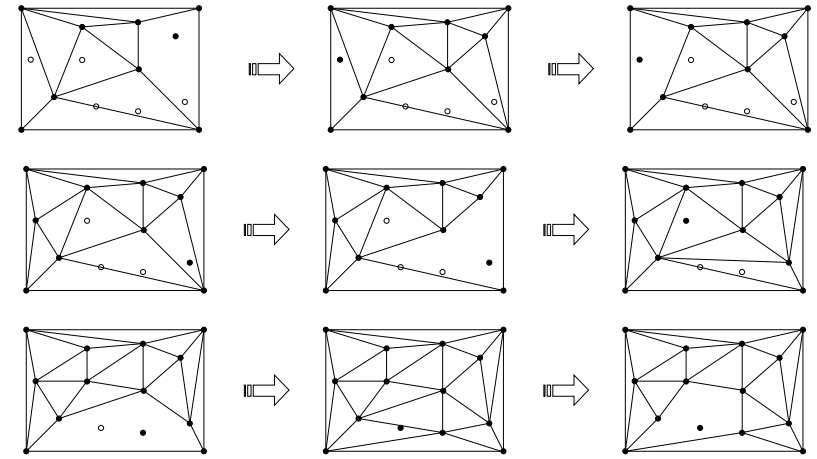
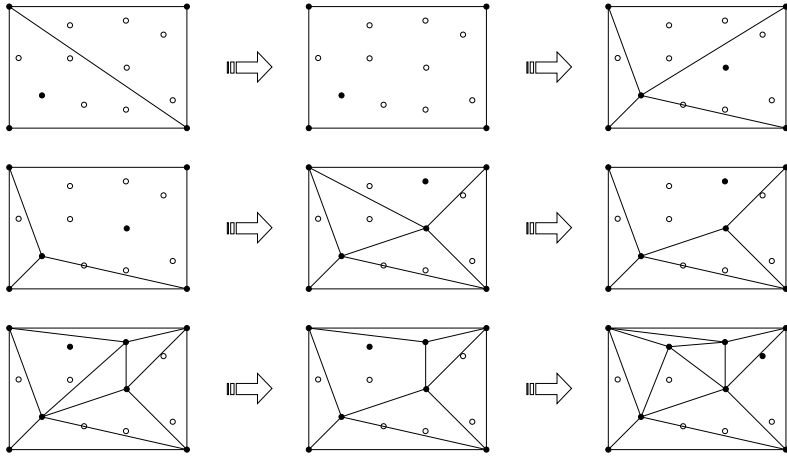
On utilisera comme triangulation de Delaunay initiale \mathcal{T}_0 , la boîte englobant le nuage de sommets $\mathcal{S} = \{S_j\}_{j=1,\dots,N}$.



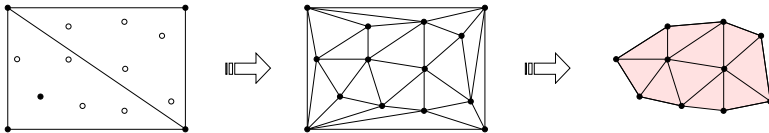
- Ceci nécessite l'ajout de quatre sommets, avec lesquels on construit le maillage initial, \mathcal{T}_0 , composé de deux éléments.
- Par inspection, on note que ces deux triangles vérifient le critère de la sphère vide, et ce premier maillage est effectivement un maillage Delaunay !.
- A la fin du procédé, il faudra retirer cet échafaudage ! ! ! !

Insertion des points : cavité + boule

On insère séquentiellement les points P_j de la liste $\mathcal{S} = \{S_j\}_{j=1,\dots,N}$, et on crée la cavité \mathcal{C}_P suivie de \mathcal{B}_P



- Après l'insertion de tous les points du nuage, on obtient la triangulation du nuage plus la boîte.



- En retranchant les éléments reliés la construction de la boîte, on obtient la triangulation convexe du nuage.

Remarques :

- Quel est l'impact du choix de la boîte ?
- Le résultat est-il un maillage ?

- 1 Historique
- 2 Triangulation de Delaunay
- 3 Propriétés des triangulations de Delaunay en ND
- 4 Diagramme de Voronoï dans la nature
- 5 Le noyau de Delaunay
- 6 Mise en oeuvre

Point de départ



SOMMETS

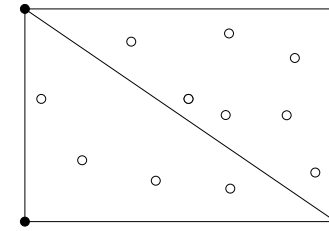
	x	y
1	○	○
2	○	○
3	○	○
4	○	○
5	○	○
6	○	○
7	○	○
8	○	○
9	○	○
nbTSOM	○	○

Nuage

ELM

S1	S2	S3

iNOD=boiteConstr(hObject, handles,auto,'EvS')



SOMMETS

	x	y
1	○	○
2	○	○
3	○	○
4	○	○
5	○	○
6	○	○
7	○	○
8	○	○
9	○	○
nbTSOM	○	○
nbTSOM+1	●	●
nbTSOM+2	●	●
nbTSOM+3	●	●
nbTSOM+4	●	●

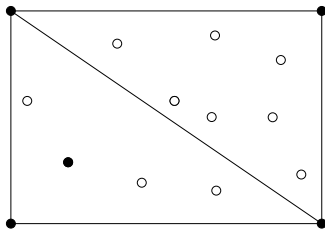
Nuage

Boite

ELM

S1	S2	S3
●	●	●

iNOD=boiteConstr(hObject, handles,auto,'EvS')



SOMMETS

	x	y
1	○	○
2	○	○
3	○	○
4	○	○
5	○	○
6	○	○
7	○	○
8	○	○
9	○	○
nbTSOM	○	○
nbTSOM+1	●	●
nbTSOM+2	●	●
nbTSOM+3	●	●
nbTSOM+4	●	●

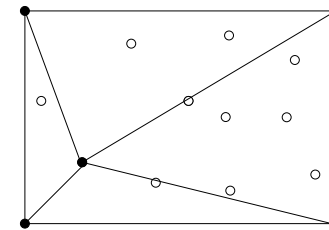
Nuage

Boite

ELM

S1	S2	S3
●	●	●

iNOD=boiteConstr(hObject, handles,auto,'EvS')



SOMMETS

	x	y
1	○	○
2	○	○
3	○	○
4	○	○
5	○	○
6	○	○
7	○	○
8	○	○
9	○	○
nbTSOM	○	○
nbTSOM+1	●	●
nbTSOM+2	●	●
nbTSOM+3	●	●
nbTSOM+4	●	●

Nuage

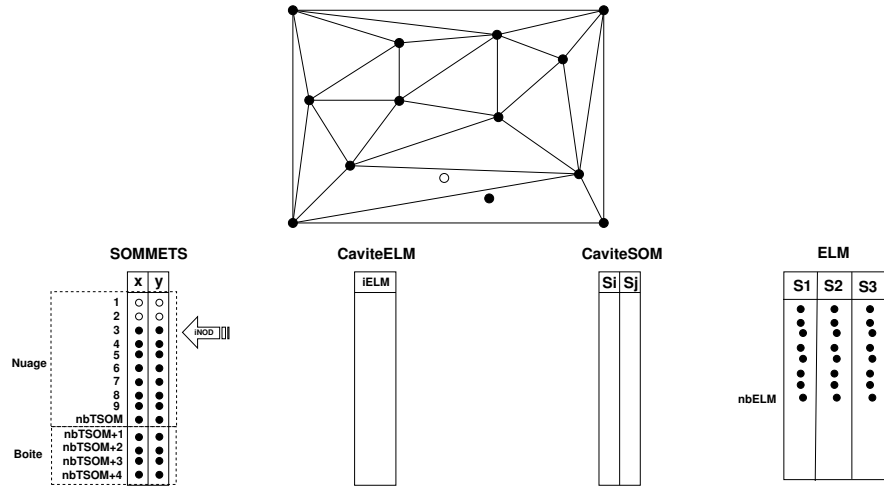
Boite

ELM

S1	S2	S3
●	●	●

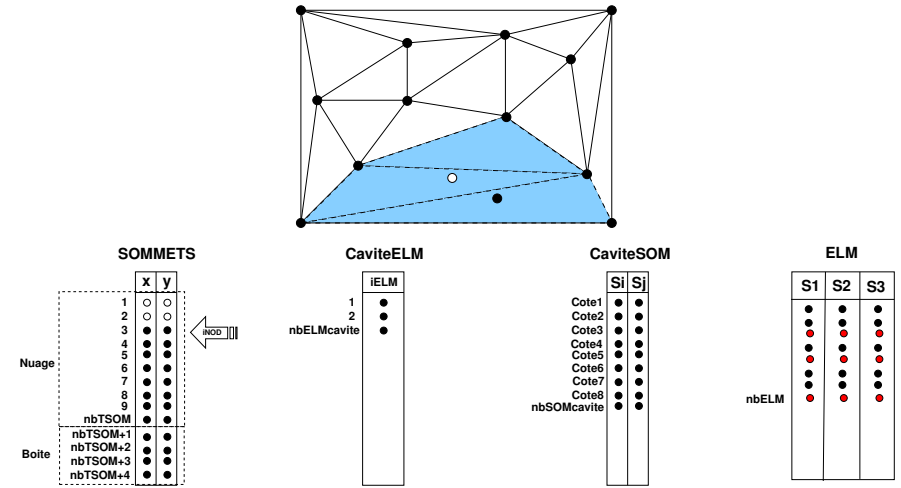
caviteEvS_SOM(iNOD)

$$[\text{CaviteELM}, \text{nbELM}_{\text{cavite}}, \text{CaviteSOM}, \text{nbSOM}_{\text{cavite}}] = \text{caviteEvS_SOM}(i\text{NOD})$$



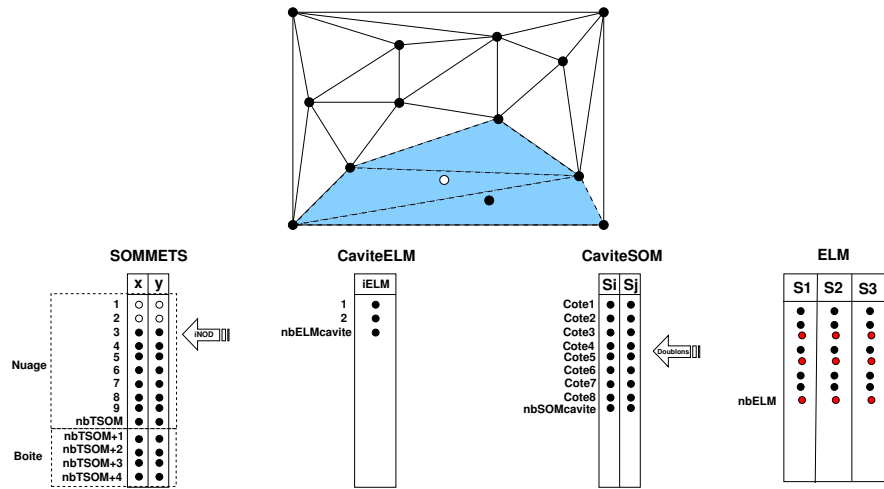
caviteEvS_SOM(iNOD)

$$[\text{CaviteELM}, \text{nbELM}_{\text{cavite}}, \text{CaviteSOM}, \text{nbSOM}_{\text{cavite}}] = \text{caviteEvS_SOM}(i\text{NOD})$$



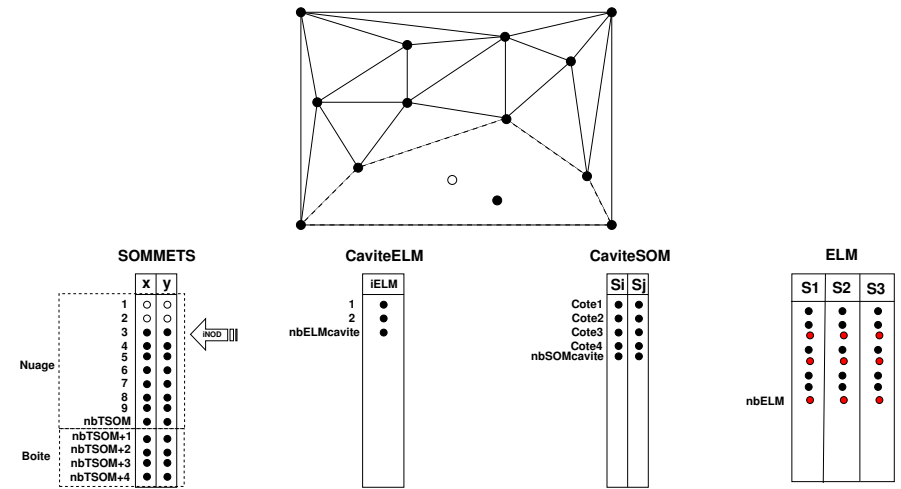
caviteEvS_SOM(iNOD)

$$[\text{CaviteELM}, \text{nbELM}_{\text{cavite}}, \text{CaviteSOM}, \text{nbSOM}_{\text{cavite}}] = \text{caviteEvS_SOM}(i\text{NOD})$$



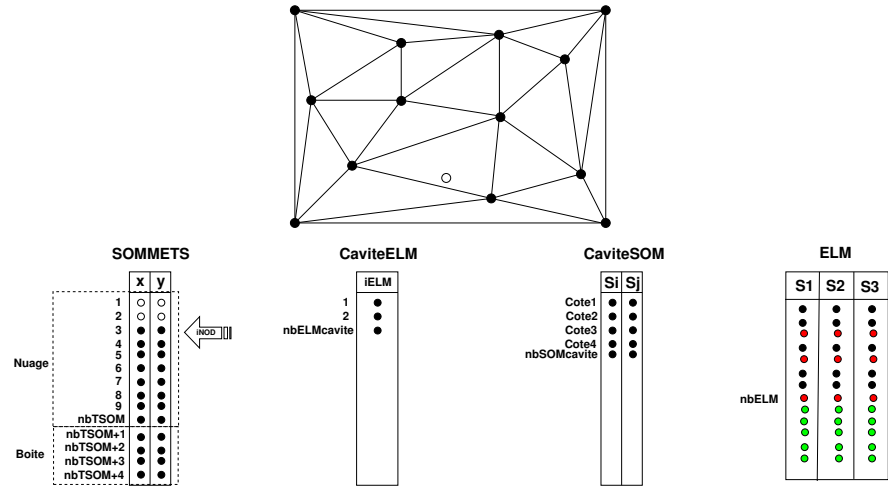
caviteEvS_SOM(iNOD)

$$[\text{CaviteELM}, \text{nbELM}_{\text{cavite}}, \text{CaviteSOM}, \text{nbSOM}_{\text{cavite}}] = \text{caviteEvS_SOM}(i\text{NOD})$$



bouleEvS

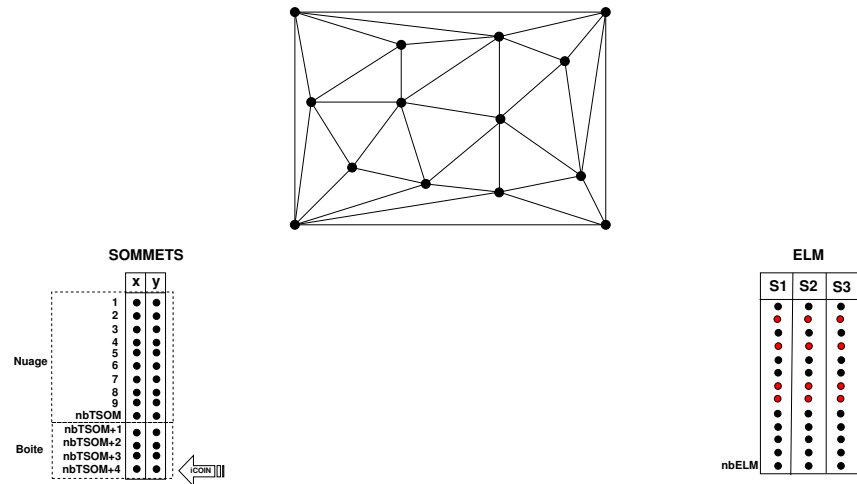
`bouleEvS(iNOD,CaviteSOM,nbSOMcavite,CaviteELM,nbELMcavite)`



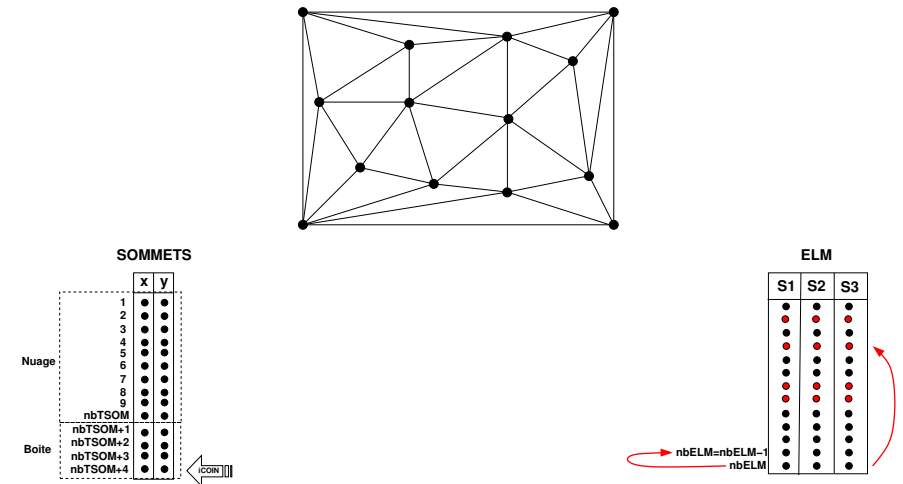
boiteEnleve('EvS')



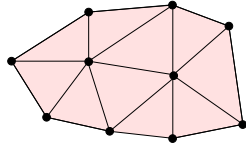
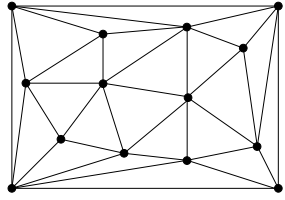
boiteEnleve('EvS')



boiteEnleve('EvS')



boiteEnleve('EvS')



SOMMETS

	x	y
1	•	•
2	•	•
3	•	•
4	•	•
5	•	•
6	•	•
7	•	•
8	•	•
9	•	•
nbTSOM	•	•

Nuage

ELM

	S1	S2	S3
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
•	•	•	•
nbELM	•	•	•