
GENERATION DE MAILLAGES

Une introduction par la pratique

Génération de maillages :

Une introduction par la pratique

RICARDO CAMARERO

Département de génie mécanique

École Polytechnique de Montréal

15 février 2024]

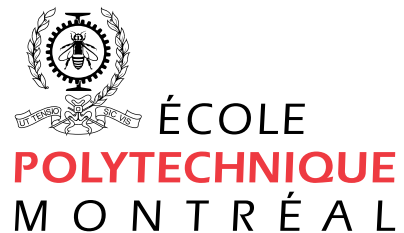


Table des matières

0.1	Préambule	i
0.2	Rôle du maillage dans le calcul appliqué	ii
0.3	Matière	ii
0.4	Approche	ii
0.5	Objectifs de formation	iii
0.6	Retombées d'apprentissage	iv
1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Géométrie et topologie d'un maillage	2
1.2.1	Les systèmes de coordonnées	4
1.2.2	Maillages à frontières immergées	10
1.2.3	Maillages curvilignes	12
1.2.4	Maillages non-structurés	14
1.3	Formes des éléments/cellules	15
1.4	Rôle et Classification des maillages	17
2	Maillages Curvilignes	21
2.1	Les maillages algébriques	21
2.1.1	Transformations conformes	23
2.1.2	La transformation $z = w^2$	24
2.1.3	La transformation $z = e^w + w$	25
2.1.4	Critique	26
3	Maillages Transfinis	29
3.1	Motivation	29
3.2	Interpolant bivarié de quatre points	30
3.3	Interpolant univarié entre deux courbes	32
3.3.1	Interpolant bivarié entre quatre courbes	35
3.4	Exemples	39
3.4.1	$w = z^2$	39
3.4.2	Domaine circulaire	41
3.5	Limites des maillages transfinis	43

3.6	Aspects topologiques	44
4	Maillages elliptiques	47
4.1	Maillages curvilignes	47
4.2	Modèle d'équations de mailles	48
4.3	Inversion des variables	49
4.4	Équations de mailles elliptiques	52
4.5	Discrétisation des équations de mailles	55
4.6	Choix d'un résolveur	57
	4.6.1 Sur-relaxation successive par point	59
	4.6.2 Surrelaxation par bloc	60
4.7	Algorithme global	63
	4.7.1 Structure de données	63
4.8	Comparaison des maillages transfini et Winslow	65
5	Concentration de Maillages	69
5.1	Motivation	69
5.2	Équations de maille de Poisson	71
5.3	Choix des termes forcés	74
5.4	Concentration des mailles	75
5.5	Synthèse des équations de maille	80
	5.5.1 Exemples	81
6	MAILLAGES NON STRUCTURES	85
6.1	Introduction	85
6.2	Structure des maillages	86
6.3	Géométrie et topologie	88
	6.3.1 Conformité géométrique et topologique	89
6.4	Relations d'Euler-Poincaré	95
6.5	Connectivités	97
6.6	Structures de données	103

Chapitre 6

MAILLAGES NON STRUCTURES

6.1 Introduction

Historiquement, les techniques de génération de maillages structurés et non structurés ont évolués séparément donnant lieu à des méthodologies très différentes. Avec une mise en oeuvre plus simple, les premières ont évoluées très rapidement, tandis que ces dernières, basées sur des concepts informatiques plus complexes se sont développées plus tardivement. Certaines de leurs différences peuvent être attribuées aux caractéristiques intrinsèques de ces maillages, d'autres aux exigences particulières posées par les schémas numériques utilisés dans la solution des équations de la physique. Une constatation générale est que les méthodes de maillages structurés sont basées sur des fondements théoriques formels ; la théorie des équations harmoniques pour les transformations conformes, les techniques d'interpolation pour les maillages algébriques ou différents modèles d'équations différentielles pour les maillages curvilignes. Ces approches ont fait l'objet des chapitres précédents.

Pour les maillages non structurés, à l'exception des techniques de Delaunay, on ne dispose pas de modèles semblables, et la majorité utilisent des constructions heuristiques.

L'intérêt pour les maillages non structurés découle principalement de leur grande flexibilité qui permet les possibilités suivantes :

- une représentation géométrique précise des frontières du domaine ;
- une concentration locale des mailles liée à une carte de mailles ;
- l'adaptation du maillage en fonction des caractéristiques de la solution qui n'est pas connue a priori.

Bien que, géométriquement conformes, les techniques de mailles curvilignes, couplées à des constructions de zonage ou de partitionnement de domaine, peuvent être utilisées pour mailler des domaines quelconques en général, et ainsi satisfaire aux deux premières conditions, elles s'avèrent incapables à véritablement s'adapter à des configurations de complexité arbitraire. Ceci exige la possibilité d'ajouter et/ou de retirer des

noeuds de manière très localisée, qui est clairement difficile, sinon impossible, avec des maillages structurés. De plus, ces exigences doivent être envisagées dans un contexte d'automatisation et d'adaptation dynamique qui vise à minimiser, voire éliminer, l'intervention de l'utilisateur. Là résident les arguments les plus forts en faveur des maillages non structurés.

La complexité et le coût supplémentaires associés à de tels réseaux non structurés n'est plus un inconvénient aussi important, dès lors que les avancées informatiques deviennent généralement répandues et utilisées efficacement dans la simulation numérique.

6.2 Structure des maillages

Un maillage est composé de deux parties ; les noeuds (un ensemble de coordonnées (x, y, z)) qui caractérisent sa géométrie, et la connectivité. Tel que présentés précédemment, (Section 1.4), les maillages sont classés comme structurés ou non structurés. Dans le premier cas, la connectivité est implicite, c'est-à-dire il existe une relation d'ordre qui permet de déduire les voisins directement du noeud courant, N_i , N_j et N_k , dans un espace paramétrique. C'est la principale différence avec les maillages non structurés pour lesquels cela n'est pas possible et qui nécessitent que la connectivité soit donnée explicitement.

Une autre propriété importante des maillages qui découle de la connectivité, c'est la forme¹ des éléments. Pour les maillages structurés, ceux-ci sont généralement des quadrangles en dimension deux et des hexaèdres en dimension trois, mais ce n'est pas nécessairement toujours le cas. Par exemple, en dimension deux, il est possible d'avoir une grille structurée composée de triangles, mais néanmoins structurée comme montré à la Fig. 6.1.

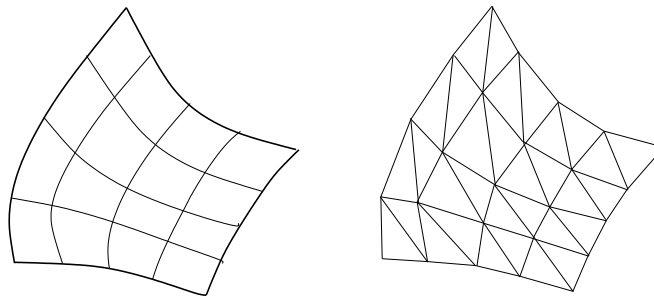


FIGURE 6.1 – Maillages structurés composés de quadrangles ou triangles

1. Une présentation plus complète se trouve à la Sec. 1.3

On note que pour un même domaine, des grilles de quadrangles structurés ou de triangles non structurés sont possibles.

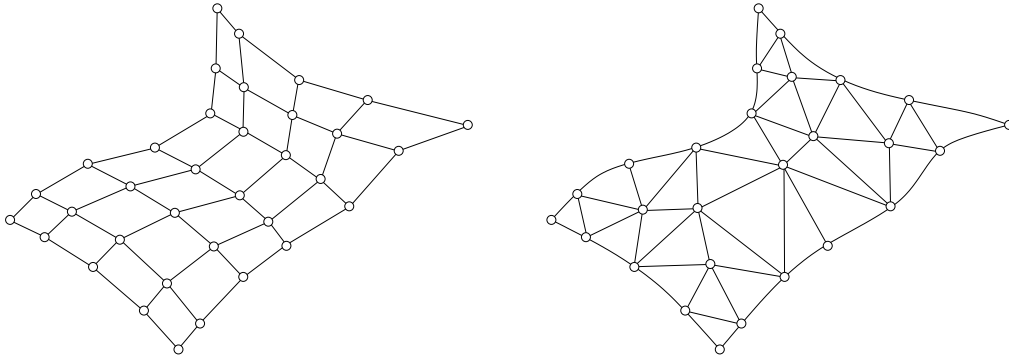


FIGURE 6.2 – Maillage structuré ou non structuré pour un même domaine

De même, il existe, pour une même géométrie, des grilles non structurées constituées de quadrangles ou de triangles, comme illustré à la Fig. 6.3

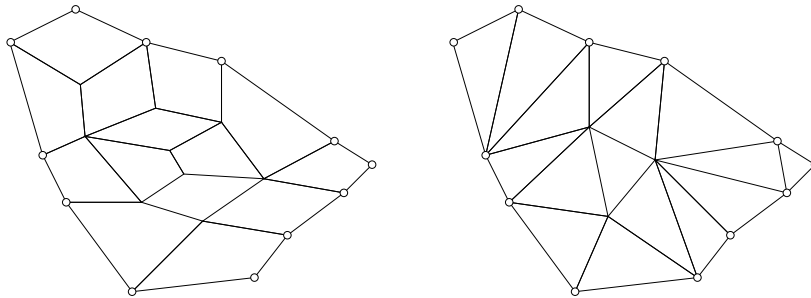


FIGURE 6.3 – Maillages non structurés composés de quadrangles ou de triangles

L'absence d'une structure implicite donne lieu à une organisation (structure de données) plus complexe ce qui rend les grilles non structurées généralement plus difficiles à gérer et entraînent un certain nombre d'inconvénients,

- la connectivité doit être créée lors de la construction du maillage ;
- nécessite plus de mémoire et d'espace disque ;
- le nombre d'éléments est plus grand pour un même nombre de noeuds ;
- des calculs plus longs pour la manipulation des voisins et les opérations géométriques ;
- le nombre d'éléments autour d'un noeud est variable ;

Par contre, il en découle des algorithmes indépendants de la complexité des modèles géométriques ou de la topologie, constituant un grand avantage quant à l'automatisation ainsi que la généralisation de programmes de calculs génériques. Bien que l'on

retrouve ces caractéristiques à différents degrés dans les techniques de maillages structurés ainsi que non structurés, ces derniers offrent des avantages indéniables en ce qui a trait au contrôle local et aux possibilités adaptation. Les ordinateurs et l'informatique évoluant, la complexité du non structuré n'est plus un facteur limitatif.

6.3 Géométrie et topologie

Le point de départ pour tout générateur de mailles est un modèle géométrique provenant généralement d'un logiciel de CAO. Ces modèles sont composés d'un ensemble d'objets qui comprend une partie géométrique et une partie topologique comme illustré à la Fig. 6.4 .

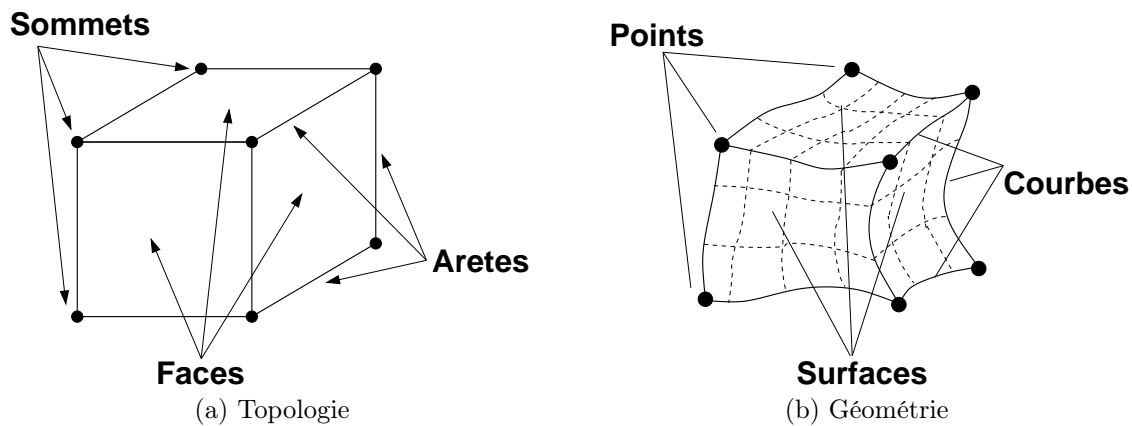


FIGURE 6.4 – Correspondance entre topologie et géométrie

La géométrie donne la position et la forme des objets du modèle dans l'espace physique, en dimension 2 ou 3. Essentiellement, ce sont des coordonnées sous forme de nombres réels.

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1, z_1)^T \\ & (x_2, y_2, z_2)^T \\ & (x_3, y_3, z_3)^T \\ & \dots \end{aligned}$$

La topologie d'un modèle CAO donne les connections ou liens entre les objets qui le composent. Typiquement, ces informations sont données sous forme d'entiers ou de pointeurs.

Ces considérations se retrouvent également dans la description même d'un maillage qui est aussi une entité complexe comprenant plusieurs faces en 2D ou volumes en 3D, appelés éléments ou cellules.

Dépendant du mode de représentation ainsi que de leur type, ces éléments sont composés de sommets et arêtes, chacun reposant sur une entité géométrique.

sommets	→	points
arêtes	→	courbes
faces	→	surfaces

La topologie d'un maillage a une structure d'information élaborée, avec de nombreux liens entre les différentes entités qui le compose. Sous forme d'entiers, réels ou de pointeurs, ces informations sont utilisées pour établir le voisinage et la forme des éléments. On peut choisir une représentation autour d'une entité, un sommet, une arête ou bien un élément, ce qui donne différentes structures de données pour établir la connectivité (voisinage). Ce sujet est présenté à la Section 6.5.

6.3.1 Conformité géométrique et topologique

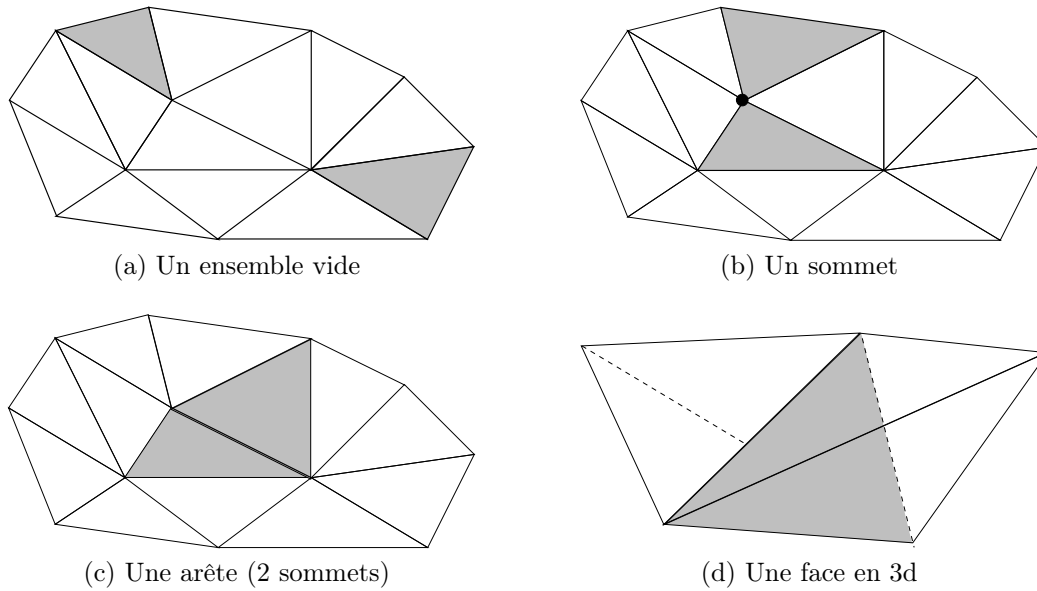
La topologie d'un maillage, dénotée \mathcal{T} , est un graphe des connectivités des entités sans égards à leurs coordonnées physiques $(x, y, z)^T$. Pour assurer la conformité topologique, on pose,

- les sommets du graphe sont regroupés en éléments, dénotés K , comprenant trois ou quatre sommets pour un triangle ou quadrangle, respectivement, en dimension 2, ou bien, quatre, cinq, six ou huit sommets pour un tétraèdre, une pyramide, un prisme ou un hexaèdre, respectivement, en dimension 3 ;
- tout élément/cellule K d'une triangulation \mathcal{T} est d'intérieur topologiquement non vide, c-à-d chaque élément est composé de sommets différents.

L'intersection topologique de deux éléments de \mathcal{T} est une des conditions suivantes :

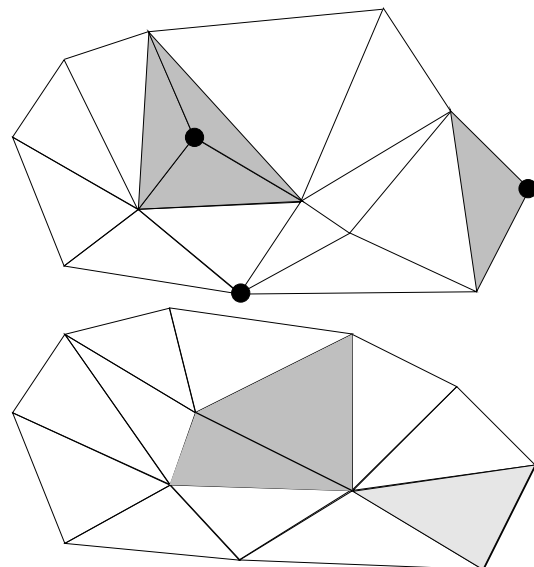
- un ensemble vide ;
- un sommet ;
- une arête (deux sommets) ;
- une face (trois sommets pour une face triangulaire ou quatre sommets pour une face quadrangulaire) en dimension 3 ;
- rien d'autre.

Ces différentes conditions sont illustrées à la figure suivante par l'intersection topologique de deux éléments de \mathcal{T} .

FIGURE 6.5 – Intersection topologique de deux éléments d’une triangulation \mathcal{T}

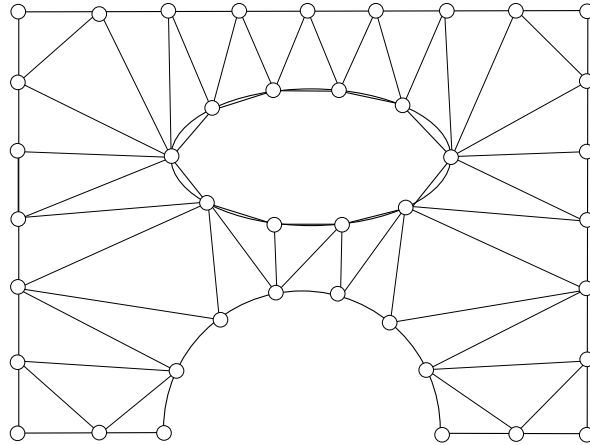
Un maillage, comme le domaine dont il est la discrétisation, possède un intérieur et une frontière (ou bord). Les entités qui composent un maillage peuvent être entourées entièrement ou partiellement par d’autres entités. Dans le premier cas celles-ci sont dites l’intérieur, sinon elles sont sur le bord de celui-ci. On formalise cette distinction à partir de considérations géométriques :

- chaque sommet intérieur du graphe doit appartenir à au moins trois éléments en dimension 2 ou quatre éléments en dimension 3, sinon ce sommet se trouve sur la frontière ;
- chaque arête intérieure du graphe doit appartenir à au moins deux éléments en dimension 2 ou trois éléments en dimension 3, sinon cette arête se trouve sur la frontière ;
- chaque face intérieure du graphe en 3D appartient à au moins deux éléments. Si une face en 3D appartient à un seul élément, alors elle se situe sur la frontière.



Autrement dit, la frontière du graphe est l'ensemble des arêtes en 2d et des faces en 3d qui n'appartiennent qu'à un seul élément.

- En 2D, chaque arête frontière détermine les sommets frontière.
- En 3D, chaque face frontière détermine les arêtes et les sommets frontière.
- Tout ce qui appartient à la frontière doit se décomposer en sous-ensembles connexes.
- Le nombre de ces sous-ensembles boucles correspond au nombre de trous du domaine plus un.

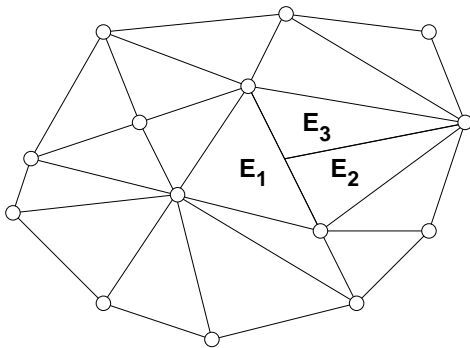


On détermine si un sommet, une arête ou une face est intérieure ou frontière uniquement à partir de la topologie du maillage.

- On ne doit pas déduire si une entité est intérieure ou frontière en se basant uniquement sur les codes des sommets ou sur des calculs basés sur la géométrie.
- Un maillage **est** ou **n'est pas** topologiquement conforme. Il n'y a pas de demi-mesures.
- Comme des calculs géométriques n'interviennent pas, alors, il n'y a pas de possibilité d'erreur de calcul ou de problème de précision arithmétique. C'est pour cette raison que les informations topologiques sont des entiers ou des pointeurs.

Soit une triangulation \mathcal{T} :

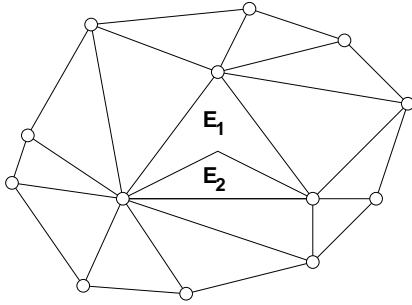
Comment caractériser ce maillage ?



1ère interprétation : L'élément E_2 partage une demi-arête avec E_1 , et l'élément E_3 partage l'autre demi-arête avec E_1 , laissant un sommet isolé au centre de l'arête correspondante de E_1 . Cette configuration n'est pas topologiquement conforme. Ce n'est pas un maillage !

2ème interprétation : E_1 est un quadrangle en insérant un sommet au point milieu de l'arête partagée de E_1 donnant alors deux arêtes colinéaires. C'est un maillage hybride !

Soit un autre exemple avec une triangulation \mathcal{T} :



Comment caractériser ce maillage ?

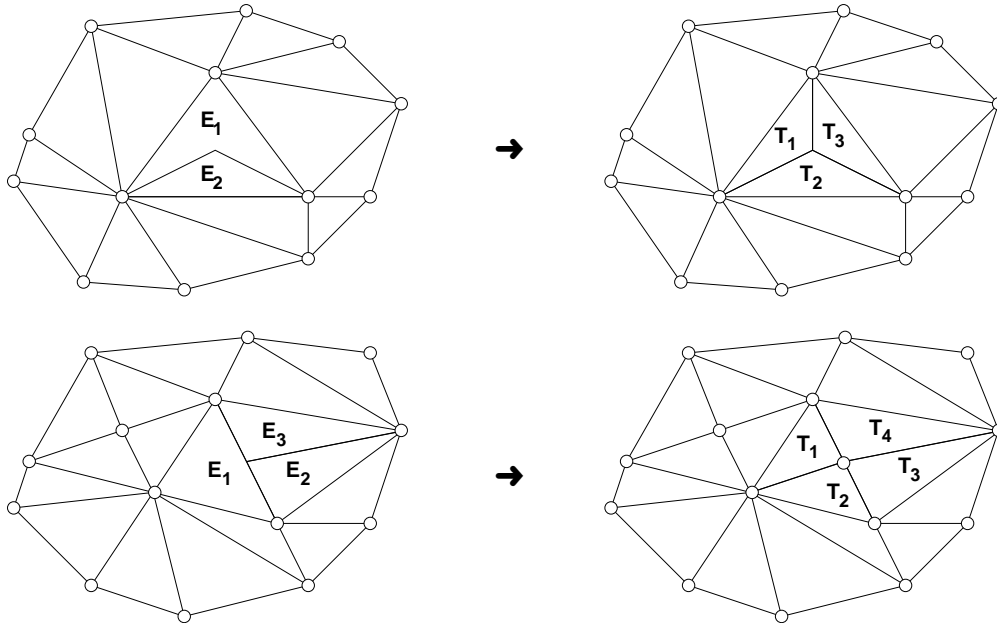
1ère interprétation : *Les éléments E_1 et E_2 sont superposés.*

Dans ce cas, ce n'est pas un maillage !

2ème interprétation : *E_1 est un quadrangle (chevron).*

Alors, on dit que c'est un maillage hybride !

Ces deux maillages deviennent topologiquement conformes en changeant seulement la connectivité entre les sommets.



En plus de ces considérations topologiques, un maillage doit vérifier la conformité géométrique² :

- $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} K$, l'union des éléments K de \mathcal{T} , est égale au recouvrement du domaine Ω . Cela signifie que le maillage \mathcal{T} est en fait une partition du domaine Ω .
- L'aire (en 2D) ou le volume (en 3D) de chaque élément K de \mathcal{T} est strictement positif.

² Extrait de *Génération automatique de mailages. Applications aux méthodes d'éléments finis*, P. L. George, Masson, RMA 16, 1991

L'exigence de la conformité géométrique stipule simplement que le maillage est en effet une discrétisation valide du domaine à des fins de calcul. Exprimé en termes plus physiques :

- la grille couvre tout le domaine sans laisser de vide,
- l'aire de chaque élément (2D) ou volume (3D) est strictement positif;
- les éléments ne se chevauchent pas.

On illustre ce concept à l'aide de quelques exemples de maillages non conformes. La Fig. 6.6 montre un domaine et un maillage où la grille ne recouvre pas le domaine, montrant des éléments en dehors, spécifiquement sur la partie concave, et sur le trou.

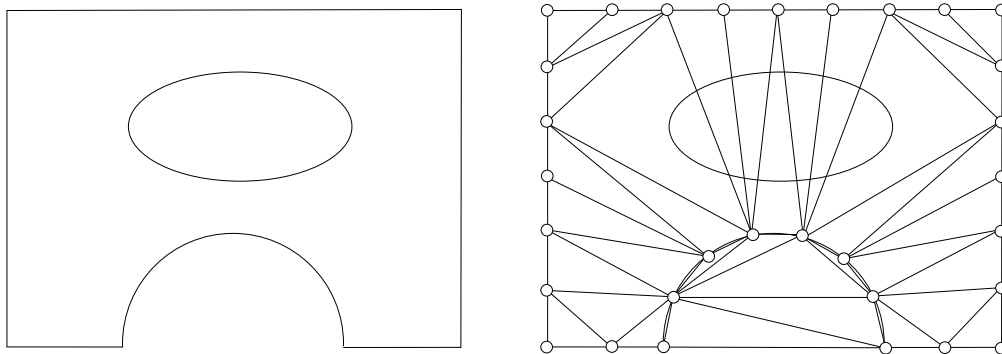


FIGURE 6.6 – Condition d'adhésion au domaine non valide

Ce maillage n'est pas un recouvrement du domaine! Il n'y a pas d'adhérence du maillage à la frontière du trou. C'est un maillage valide, mais non géométriquement conforme. Un maillage géométriquement valide doit recouvrir la partie du domaine délimitée par les frontières, et exclure les parties qui se situent en dehors du domaine, notamment les trous et les parties concaves des frontières, montré à la Fig. 6.7

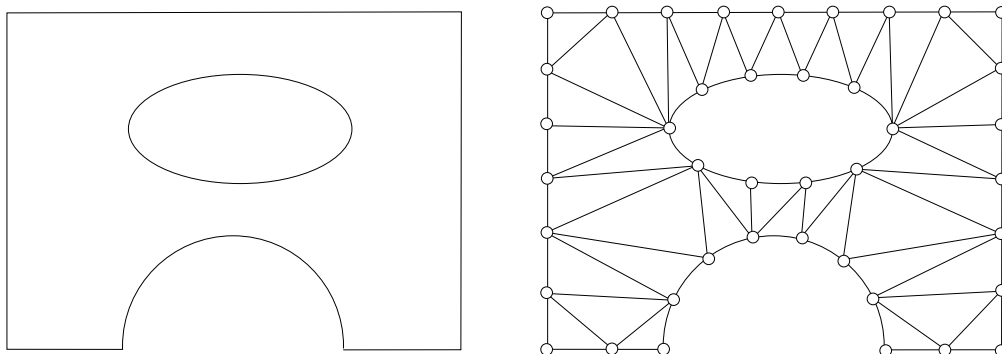


FIGURE 6.7 – Maillage géométriquement valide avec adhésion au domaine

La deuxième condition est illustrée par la Fig. 6.8 où il a chevauchement des mailles lors d'un déplacement d'un sommet, situation qui survient par certaines manipulations du maillage ou avec des maillages mobiles.

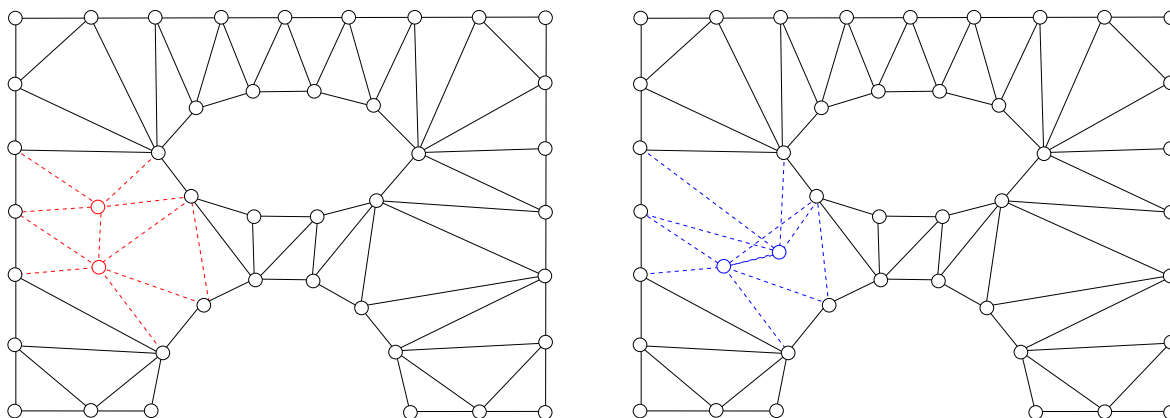


FIGURE 6.8 – Chevauchement d'éléments lors du déplacement d'un sommet

Un exemple de maillage qui n'est pas globalement géométriquement conforme est montré à la Fig. 6.9. Tous les éléments sont individuellement en conformité géométrique, mais il y a un chevauchement géométrique. On doit interpréter cette configuration comme un ruban en forme du nombre huit qui se superpose dans un espace de dimension trois.

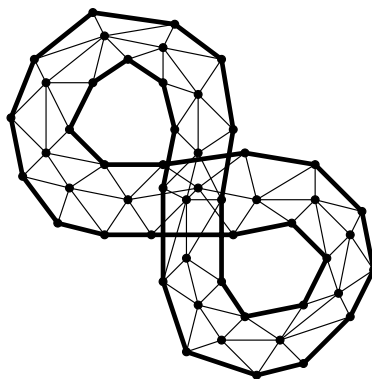


FIGURE 6.9 – Superposition géométrique

6.4 Relations d'Euler-Poincaré

En 2D, les entités d'un maillage \mathcal{M} composé de S sommets, A arêtes A et de E éléments sont reliées par ³,

$$S - A + E = g(\Omega), \quad (6.1)$$

où $g(\Omega)$ représente le genre de domaine, qui en 2D, est égal à un moins le nombre de trous. Connaissant ainsi le nombre de deux des entités d'un maillage, la troisième peut être déduite en utilisant Eq. 6.1. Cette relation est également valable pour un maillage de rectangles et permet de vérifier la validité d'un maillage.

De plus, en 2D pour un maillage qui est une triangulation d'un domaine isomorphe à un disque, la relation,

$$E = 2(S - 1) - S_f \quad (6.2)$$

où S_f est le nombre de sommets sur la frontière s'applique. Cela signifie que pour une distribution donnée de sommets internes et de sommets frontières, toutes les triangulations possibles basées sur ces sommets donneront le même nombre de triangles.

De ces relations, le comportement asymptotique peut être déduit en laissant le nombre de sommets S tendre vers l'infini. Pour un triangulation en 2D, on a alors $S_b \ll S$ et $g(\Omega) \ll S$. À partir des équations 6.2 et 6.1, respectivement, il en résulte que :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow 2S \\ S &\longrightarrow 3S \end{aligned}$$

Ainsi, pour une grille suffisamment fine, il y aura deux fois plus de triangles que le nombre de sommets et environ trois fois plus d'arêtes.

Ces relations peuvent être étendues en 3D pour un domaine borné par une surface qui correspond à une sphère. Pour un maillage sur d'une telle surface, la relation suivante s'applique,

$$S - A + E_f = g(\text{sphère}), \quad (6.3)$$

où E_f est le nombre d'éléments sur la surface frontière et où g le genre d'une sphère est égal à 2. Cette relation est valable pour des éléments surfaciques triangulaires ainsi que pour des éléments surfaciques quadrilatères.

Des relations similaires s'appliquent pour un maillage 3D \mathcal{M} , avec S sommets, A arêtes, F faces et E éléments. Incluant l'entité supplémentaire, la face, Eq. 6.1 devient,

$$S - A + F - E = g(\Omega), \quad 3D \quad (6.4)$$

3. Une bonne référence pour les relations d'Euler-Poincaré est : *Grandes transformations et remaillage automatique*, T. Coupez, Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, novembre 91.

où $g(\Omega)$ est le genre du domaine. Par exemple, le genre d'un le domaine qui correspond à une sphère vaut 1, 0 pour un tore, 2 pour une sphère avec un trou etc..... Si en plus, le maillage est une tétraédrisation valide d'un domaine qui correspond à une sphère, alors Eq. 6.2 devient :

$$A - E = S + S_f - 3, 3D \quad (6.5)$$

où S_f est le nombre de sommets sur la frontière. Cela signifie que pour une distribution donnée de sommets intérieurs et frontières, pour toutes les tétraédrisations basées sur ces sommets, la différence entre le nombre d'arêtes et le nombre d'éléments sera identique.

Enfin, pour les maillages très fins où le nombre d'entités tend vers de grands nombres, la valeur du genre g devient négligeable et l'équation 6.4 devient,

$$S - A + F - E = 0, 3D \quad (6.6)$$

où S_f est le nombre de sommets sur la frontière. Cela signifie que pour une distribution donnée de sommets intérieurs et frontières, pour toutes les tétraédrisations basées sur ces sommets, la différence entre le nombre d'arêtes et le nombre d'éléments sera identique.

Enfin, pour les maillages très fins où le nombre d'entités tend vers de grands nombres, la valeur du genre g devient négligeable et l'équation 6.4 devient,

$$\begin{aligned} S - A + F - E &= g(\Omega), 3D \\ S - A + F - E &= 0, 3D \end{aligned}$$

Cette relation est valide pour $A = (n = 1)S$, $F = 2nS$ et $E = nS$ et toute valeur positive de n . Une limite supérieure raisonnable donne $n = 6$, ce qui donne pour une grille très fine 7 fois plus d'arêtes que de sommets, 12 fois plus de faces que de sommets et 6 fois plus d'éléments que de sommets. Pour un maillage tétraédrique très régulier, la limite supérieure serait $\approx 5.6^4$.

Dans la dimension N , les relations d'Euler-Poincaré peuvent être généralisées comme suit : *Le nombre d'entités de dimension impaire moins le nombre d'entités de dimension paire est égal au genre du domaine.*

$$S - A + F - E + HE - HHE + \dots = g(\Omega), \quad (6.7)$$

où S , le nombre de sommets, F le nombre de faces sont de dimension 0 et 2 respectivement, tandis que A , le nombre d'arêtes et E le nombre de tétraèdres sont de dimension 1 et 3 respectivement. HE représente le nombre d'hyper-éléments en 4D et HHE , le nombre d'hyper-éléments en 5D, etc.....

4. Ces estimations se trouvent à xxxxxxxxxxxxxx

6.5 Connectivités

Les connectivités servent à établir des relations topologiques entre les diverses entités qui constituent une grille. L'objectif est d'organiser la discrétisation du domaine spatial à des fins de calcul. En bref, ce sont les informations nécessaires pour localiser une entité et ses divers voisins. Chacun de ces choix sera appelé une connectivité. La Fig. 6.10 illustre les différentes connectivités construites autour de l'entité élément et de ses voisins :

E → S Pour chaque élément, la liste de ses sommets. (Cela s'appelle généralement le tableau des connectivités)

E → A Pour chaque élément, la liste de ses arêtes.

E → E Pour chaque élément, la liste de ses éléments voisins à travers de ses bords.

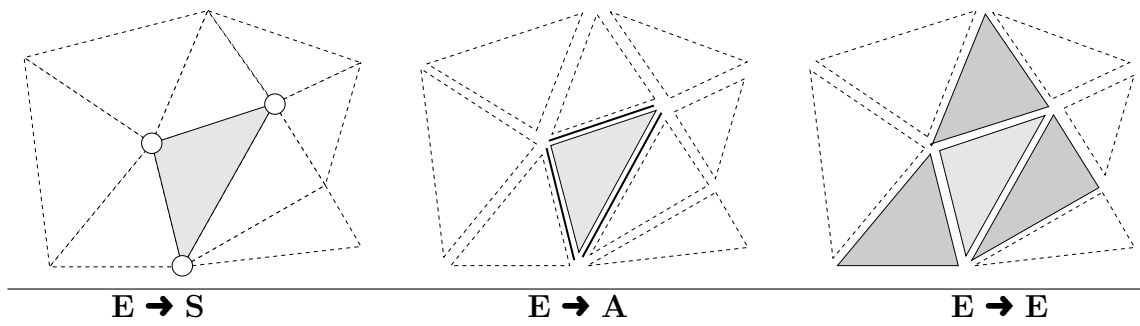


FIGURE 6.10 – Connectivités pour un élément en 2D

De même, la Fig. 6.11 illustre les informations suivantes pour l'entité arête :

A → S Pour chaque arête, la liste de ses sommets.

A → A Pour chaque arête, la liste de ses arêtes voisines passant par ses sommets.

A → E Pour chaque arête, la liste de ses éléments voisins.

et la Fig. 6.12 illustre trois de ces possibilités pour l'entité sommet :

S → S Pour chaque sommet, la liste de ses sommets voisins à travers ses arêtes.

S → A Pour chaque sommet, la liste des arêtes à travers ses sommets.

S → E Pour chaque sommet, la liste des éléments auquel il appartient.

Il existe plusieurs façons d'y parvenir et pour le maillage 2D, toutes les possibilités sont schématiquement illustrées à la Fig. 6.13.

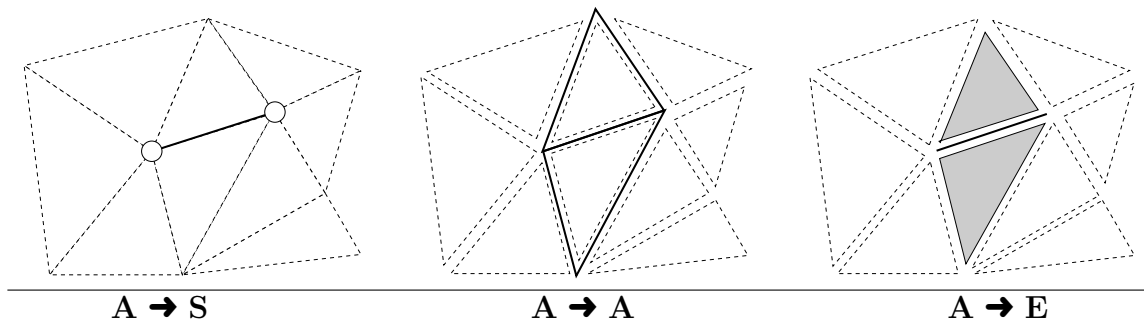


FIGURE 6.11 – Connectivités pour une arête en dimension deux

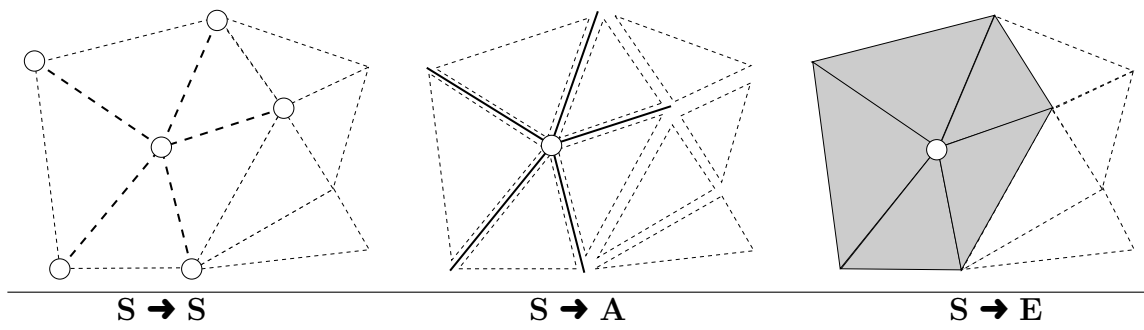


FIGURE 6.12 – Connectivités pour un sommet en dimension deux

Des informations supplémentaires incluent des références vers les conditions frontières, le modèle géométrique, etc. Élaborer une connectivité appropriée implique toujours un compromis entre la mémoire et les calculs. L'exigence fondamentale est que les informations soient telles que toutes les autres informations puissent être calculées ou déduites de la connectivité choisie, et qu'il n'y ait pas de contradictions. Parmi les connectivités de base possibles, définies entre les sommets, les arêtes et les éléments, à savoir $SV \rightarrow E$, $E \rightarrow S$, $V \rightarrow A$, $A \rightarrow S$ et $S \rightarrow S$ schématisés à la Fig. 6.14

il existe une connectivité \mathcal{C}_{min} appelée connectivité minimale, c'est-à-dire telle que les informations soient suffisantes pour déduire tous les autres connectivités. En général, $E \rightarrow S$ est une telle connectivité.

D'après les Fig. 6.10, 6.11 et 6.12 on voit que l'information est variable et notamment que le nombre de voisins varie pour une entité donnée pour l'ensemble du maillage. Si la dimension est constante alors on dit que la connectivité particulière est directe, sinon c'est ce qu'on appelle une connectivité inverse, illustré dans Fig. 6.15.

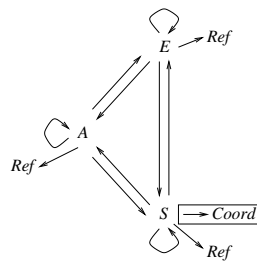


FIGURE 6.13 – Connectivités en dimension deux

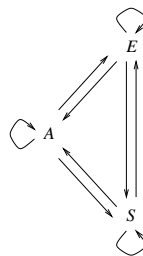


FIGURE 6.14 – Connectivités minimales en dimension deux

Les connectivités directes sont fixes et tabulées ci-dessous,

Les connectivités $S \rightarrow S$, $V \rightarrow A$, $S \rightarrow E$ sont inverses connectivités comme le nombre de sommets, d'arêtes et d'éléments autour un sommet varie. Leur dimension est la même que celle du connectivité directe correspondante. A titre d'exemple, les connectivités

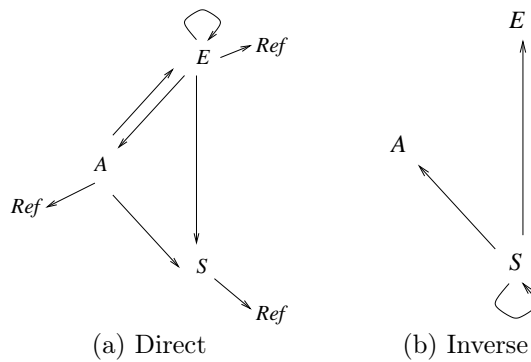


FIGURE 6.15 – Dimensions des connectivités

TABLE 6.1 – Dimension des connectivités directes

Connectivité	$E \rightarrow S$	$E \rightarrow E$	$A \rightarrow S$	$E \rightarrow A$	$A \rightarrow E$	$S \rightarrow Ref$	$S \rightarrow Ref$	$E \rightarrow Ref$
Dimension	$(3, E)$	$(3, E)$	$(2, A)$	$(3, E)$	$(2, A)$	$(S, 1)$	$(A, 1)$	$(E, 1)$

$E \rightarrow S$ et $S \rightarrow E$ pour le maillage montré à la Fig. 6.16 sont données aux Tableaux 6.2 et ??.

On explicite de manière plus détaillée avec le maillage montré à la Fig. 6.16.

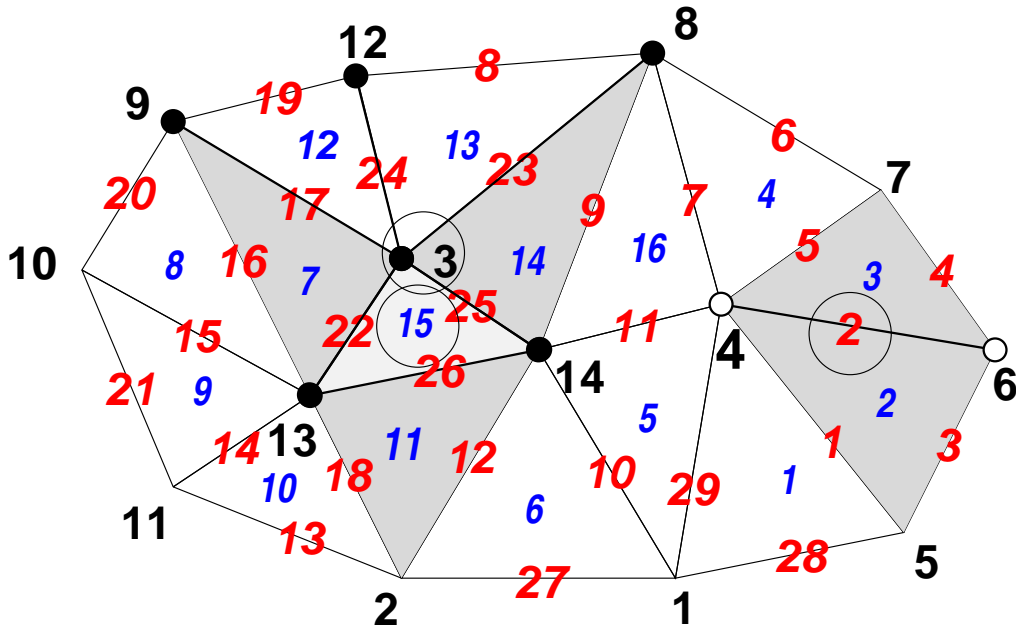


FIGURE 6.16 – Connectivité d’un maillage non structuré

On identifie trois entités, un sommet (no. 3), une arête (no.2) et un élément (no.15), et on liste leurs différentes connectivités ci-dessous :

Arête 23	→ Faces : 13 et 14 → Sommets : 3 vers 8
Sommet 3	→ Arêtes : 22 , 26 , 23 , 24 et 17 → Sommets : 13 , 14 , 8 , 12 , et 9 → Éléments : 15 , 14 , 13 , 12 et 7
Face 15	→ Sommets : 3 , 13 et 14 → Arêtes : 26 , 25 et 22 → Faces : 11 , 14 et 7

TABLE 6.2 – Exemple : Connectivités directes

E	$E \rightarrow V$
1	4,5,6
2	4,6,7
3	4,7,8
4	4,8,3
5	3,8,12
6	3,12,9
7	3,9,2
8	2,9,10
9	2,10,11
10	2,11,1
11	2,4,3
12	2,1,4
13	4,1,5

Ceci est important pour des considérations de programmation car cette dimension peut alors être spécifiée.

A partir du Tableau ??, la dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est $(3, E)$. Pour un maillage suffisamment fin, il y a environ deux fois plus d'éléments que de sommets, donnant donc pour $E \rightarrow S$, $(6, E)$. Comme la dimension de la connectivité $S \rightarrow E$ est la même que $E \rightarrow S$, soit $(6, E)$, alors on peut en déduire qu'il y a en moyenne 6 éléments autour d'un sommet. De même, il y a en moyenne 6 arêtes et 6 sommets autour d'un sommet. Ceci est résumé dans Tableau ??.

L'extension en 3D comporte une entité supplémentaire, à savoir la face, mais autrement, la situation est semblable. Les possibilités sont plus nombreuses comme illustré

TABLE 6.3 – Exemple : Connectivités inverses

S	n	$S \rightarrow E$
1	3	13,12,10
2	6	10,12,11,7,8,9
3	5	11,4,5,6,7
4	7	1,2,3,4,11,12,13
5	2	1,13
6	2	2,1
7	2	3,2
8	3	5,4,3
9	3	8,7,6
10	2	9,8
11	2	10,9
12	2	6,5

TABLE 6.4 – Le voisinage d'une entité en dimension deux

	Sommet	Arête	Élément
Sommet	6	6	6
Arête			
Élément			

schématiquement à la Fig. 6.17.

La dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est $(4, E)$. Suivant le résultat de l'Eq. 6.7, on estime que pour un maillage suffisamment fin, il y a environ 5,6 fois plus d'éléments que de sommets. Par conséquent, la dimension de la connectivité $E \rightarrow S$ est d'environ $22,4S$. Puisque la dimension de la connectivité $S \rightarrow E$ est la même que la connectivité $E \rightarrow S$, alors on peut en déduire qu'il y a en moyenne 22,4 éléments autour d'un sommet. Par un raisonnement semblable, on peut montrer qu'en moyenne il y a 13,2 arêtes, 13,2 sommets et 33,6 faces autour d'un sommet. Ceci est résumé au Tableau ??.

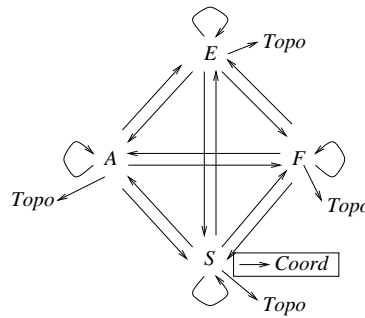


FIGURE 6.17 – Connectivités en dimension trois

TABLE 6.5 – Voisinage d’une entité en dimension trois

	Sommet	Arête	Face	Élément
Sommet	13.2	13.2	33.6	22.4
Arête				
Face				
Élément				

6.6 Structures de données

Le choix d’une structure de données est un compromis entre l’utilisation de la mémoire, la facilité de programmation et le maintien des structures de données, d’une part, et le temps de calcul nécessaire à calculer les informations non stockées. Le défi de la conception de ces structures est quelles informations (c’est-à-dire les connectivités) doivent être stockées, et quelles entités (c’est-à-dire vecteurs, listes chaînées, arbres) doivent être utilisées pour les stocker.

Une possibilité est de stocker toutes les informations requises par le code de simulation. Cette approche est motivée par la conviction que même si les besoins en mémoire sont élevés, le code sera plus efficace puisque toutes les informations seront immédiatement disponibles. Malheureusement, ce n’est pas nécessairement le cas car les structures de données complexes peuvent nécessiter plus de temps calcul pour la mise à jour que le temps économisé en accédant aux connectivités pré-calculées. C’est particulièrement la situation du remaillage adaptatif où de telles opérations sont fréquentes, ce qui entraîne des demi-vies très courtes pour ces données. D’autres part, les considérations d’ordre spécifique à l’architectures des ordinateurs, concernant la mé-

moire cache et l'espace disque qui rendent le temps d'accès aux données très variables.

Une autre possibilité est de stocker le moins d'informations possible, c'est-à-dire la connectivité minimale, \mathcal{C}_{min} (voir page 99), par exemple $S \rightarrow E$ et $E \rightarrow E$, qui se traduit par des besoins en mémoire minimaux, faciles à programmer et à entretenir. Par contre, un temps CPU considérable est nécessaire pour le calcul récupérer continuellement les informations indisponibles.

La structure de données appropriée dépend d'un certain nombre de paramètres tels que le programme de simulation et son algorithme de discrétisation de base. Bien qu'il ne soit pas raisonnable de stocker toutes les connectivités possibles, il faut néanmoins stocker celles qui permettent de récupérer les informations nécessaires par des méthodes efficaces. Les connectivités faciles à mettre à jour suivants les modifications dans le maillage, sont celles qui sont le moins dépendantes du voisinage. Dans le contexte d'un résolveur les connectivités sont statiques. Alors, une considération importante est l'utilisation de connectivités directes avec des dimensions fixes (voir page 6.15) telles que des vecteurs peuvent être utilisées. Dans le cadre de la génération de maillages, alors, à cause de la méthode, impliquant probablement un algorithme itératif ou séquentiel où les entités maillées (sommets, arêtes, éléments..) sont continuellement insérées et supprimées, il sera préférable d'utiliser des structures de données dynamiques comme les listes chaînées.....

En règle générale, la structure des données doit correspondre à l'objectif recherché, et il ne faut pas hésiter à les changer.