
GENERATION DE MAILLAGES

Une introduction par la pratique

Génération de maillages :

Une introduction par la pratique

RICARDO CAMARERO

Département de génie mécanique

École Polytechnique de Montréal

10 janvier 2024]



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
M O N T R É A L

Table des matières

0.1	Préambule	i
0.2	Rôle du maillage dans le calcul appliqué	ii
0.3	Matière	ii
0.4	Approche	ii
0.5	Objectifs de formation	iii
0.6	Retombées d'apprentissage	iv
1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Géométrie et topologie d'un maillage	2
1.2.1	Les systèmes de coordonnées	4
1.2.2	Maillages à frontières immergées	10
1.2.3	Maillages curvilignes	12
1.2.4	Maillages non-structurés	14
1.3	Formes des éléments/cellules	15
1.4	Rôle et Classification des maillages	17
2	Maillages Curvilignes	21
2.1	Les maillages algébriques	21
2.1.1	Transformations conformes	23
2.1.2	La transformation $z = w^2$	24
2.1.3	La transformation $z = e^w + w$	25
2.1.4	Critique	26
3	Maillages Transfinis	29
3.1	Motivation	29
3.2	Interpolant bivarié de quatre points	30
3.3	Interpolant univarié entre deux courbes	32
3.3.1	Interpolant bivarié entre quatre courbes	35
3.4	Exemples	39
3.4.1	$w = z^2$	39
3.4.2	Domaine circulaire	41
3.5	Limites des maillages transfinis	43

3.6	Aspects topologiques	44
4	Maillages elliptiques	47
4.1	Maillages curvilignes	47
4.2	Modèle d'équations de mailles	48
4.3	Inversion des variables	49
4.4	Équations de mailles elliptiques	52
4.5	Discrétisation des équations de mailles	55
4.6	Choix d'un résolveur	57
	4.6.1 Sur-relaxation successive par point	59
	4.6.2 Surrelaxation par bloc	60
4.7	Algorithme global	63
	4.7.1 Structure de données	63
4.8	Comparaison des maillages transfini et Winslow	65
5	Concentration de Maillages	69
5.1	Motivation	69
5.2	Équations de maille de Poisson	71
5.3	Choix des termes forcés	74
5.4	Concentration des mailles	75
5.5	Synthèse des équations de maille	80
	5.5.1 Exemples	81

Chapitre 5

Concentration de Maillages

5.1 Motivation

La répartition des lignes de maillage obtenue par la solution du système elliptique du chapitre précédent, Eqs 4.34, dépend essentiellement sur la forme des frontières. Avant d'aborder les méthodes de contrôle de ces mailles, on présente une discussion qualitative sur le comportement des équations de Laplace à la base de ces techniques de maillage.

En général, si la courbure de la frontière n'est pas trop prononcée, les équations de maille auront tendance à distribuer les noeuds de maillage uniformément et régulièrement à l'intérieur du domaine tel qu'illustré à la Fig. 5.1.

Ceci est la conséquence des propriétés de lissage de l'opérateur \mathcal{L} présenté au Chapitre 4.

$$\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

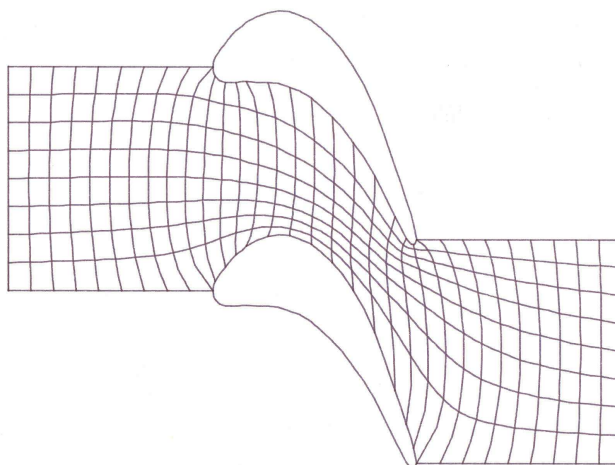


FIGURE 5.1 – Maillage elliptique régulier

Cependant, on note dans l'exemple ci-dessus que dans le voisinage des bords d'attaque et de fuite les lignes de maillage ont tendance à s'approcher/s'éloigner de la frontière. Ceci est dû aux fortes variations de la courbure.

Ce comportement où l'espacement augmente ou diminue, selon la concavité ou convexité de la paroi est explicitement illustré à la Fig. 5.2.

De façon générale, ce n'est pas le comportement attendu dans ces situations.

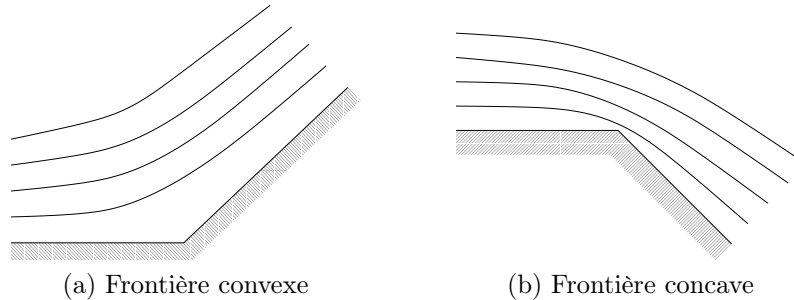


FIGURE 5.2 – Comportement des lignes de maillage dans le voisinage de fortes courbures

Une autre illustration de l'effet des frontières sur les lignes de maillage apparaît lors d'une distribution non-uniforme des noeuds sur les frontières tel qu'illustré à la Fig. 5.3, où on déplace les noeuds de la discrétisation vers un des bords. Alors, deux comportements sont possibles.

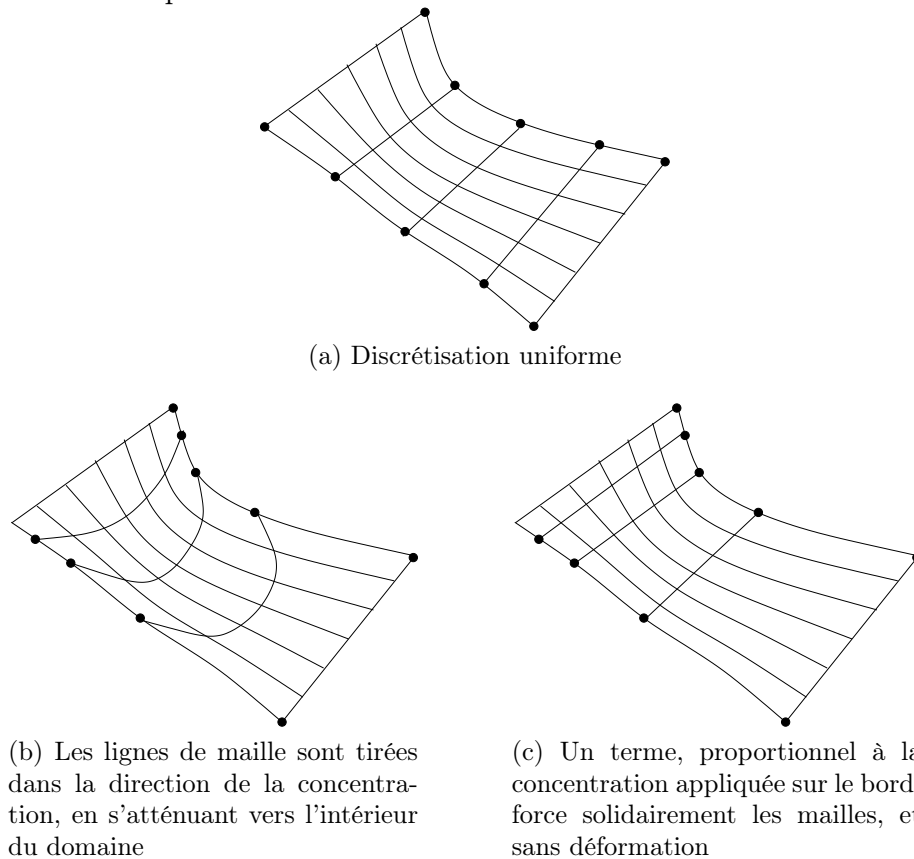


FIGURE 5.3 – Différents effets de la concentration sur les bords

Ceci représente une situation où l'on souhaite concentrer les lignes de maillage vers l'une des frontières. Cependant le maillage à l'intérieur ne suit pas la concentration imposée sur les bords et l'espacement s'aligne avec celui d'une distribution uniforme. Alors, la concentration a tendance à s'uniformiser vers l'intérieur du domaine, ce qui n'est pas nécessairement l'effet recherché.

Il est souhaitable de pouvoir contrôler le maillage et en particulier, il est souvent nécessaire de concentrer le maillage à certains endroits, où bien d'aligner les lignes du maillage sur le phénomène que l'on veut analyser. Les systèmes d'équation de Laplace possèdent de bonnes propriétés de lissage et de conformité aux frontières, mais pour des géométries irrégulières (fortement concaves ou convexes) les lignes de maillage se comportent inversement à ce qui recherché. Et, il n'est pas suffisant de déplacer les noeuds frontières pour obtenir un contrôle ou alignement car les mailles à l'intérieur ne suivent pas.

5.2 Équations de maille de Poisson

La nécessité d'un mécanisme simple s'impose pour contrôler la distribution des noeuds de mailles, soit pour corriger les comportements évoqués à la section précédente, soit pour infléchir les lignes de maillages dans des situations générales. Pour obtenir un tel contrôle, on modifie le modèle de base, Eqs. 4.28, en ajoutant un terme forcé qui le généralise à un système de Poisson :

$$\nabla^2 \xi^i = P_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

En dimension 2, $i = 1, 2$, en utilisant la notation $x_1 = x, y_1 = y$, et $\xi^1 = \eta, \xi^2 = \tau$ donne pour Eq. 5.1,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta &= Q \\ \nabla^2 \tau &= R \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ce nouveau modèle de maille n'est plus homogène, et les termes forcés, Q et R font en sorte qu'il ne possède pas les mêmes caractéristiques que le modèle de Laplace.

On reformule le problème thermique en un modèle de Poisson où les isothermes (lignes de maillage) sont déviés par la présence de ces termes qui deviennent le mécanisme de contrôle recherché. On résoud le système Eqs 5.2 avec les conditions frontières illustrées à la Fig. 5.4.

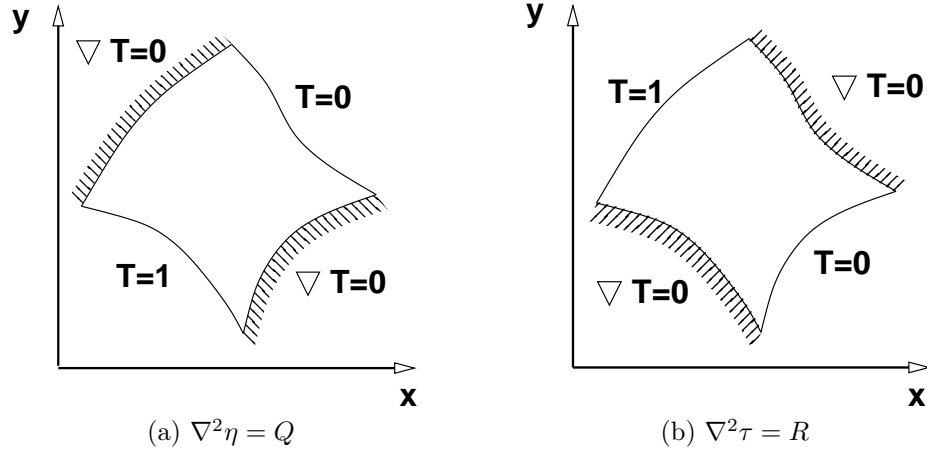


FIGURE 5.4 – Formulation du problème de maille par l’analogie thermique

Suivant la même démarche que présentée au chapitre précédent, on transforme l’équation de Poisson en équation de maille en inversant les variables dépendantes (η, τ) et les variables indépendantes (x, y) . On applique un changement des variables dépendante et indépendante, pour exprimer les coordonnées physiques x et y en fonction des variables paramétriques η et τ . La démarche est celle décrite aux Sections 4.2 et 4.3, et schématisée ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 \tau = \tau(x, y) & & x = x(\eta, \tau) \\
 \eta = \eta(x, y) & & y = y(\eta, \tau) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \nabla^2 \eta = Q & & \mathcal{L}(x) = -J^2 (Qx_\eta + Rx_\tau) \\
 \nabla^2 \tau = R & \Rightarrow & \mathcal{L}(y) = -J^2 (Qy_\eta + Ry_\tau)
 \end{array}$$

où l’opérateur ∇^2 (Laplacien) devient \mathcal{L} (Poisson), et après un développement donné en Annexe, on obtient les relations suivantes pour qui expriment les variables physiques $x = x(\eta, \tau)$ et $y = y(\eta, \tau)$,

$$\begin{aligned}
 \alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} &= -J^2 (Qx_\eta + Rx_\tau) \\
 \alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} &= -J^2 (Qy_\eta + Ry_\tau)
 \end{aligned}$$

où, comme défini précédemment aux Eqs. 4.27,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= x_\tau^2 + y_\tau^2 \\
 \gamma &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\
 \beta &= x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau \\
 J &= x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Tout comme le problème basé sur le modèle de Laplace, on complète le système de Poisson avec un ensemble de conditions frontières imposées sur le bord du domaine Γ .

Celui-ci comprend, en dimension 2, de quatre cotés, Γ_1 pour $\eta = \eta_1$, Γ_2 pour $\eta = \eta_2$, Γ_3 pour $\tau = \tau_1$ et Γ_4 pour $\tau = \tau_2$. On impose les valeurs de x et y le long des quatre bords $\Gamma_{i=1:4}$ données sous forme paramétrique ci-dessous.

Frontière Γ_1 :

$$\begin{aligned} y &= f_2(\eta_1, \tau) \\ x &= f_1(\eta_1, \tau) \end{aligned}$$

Frontière Γ_3

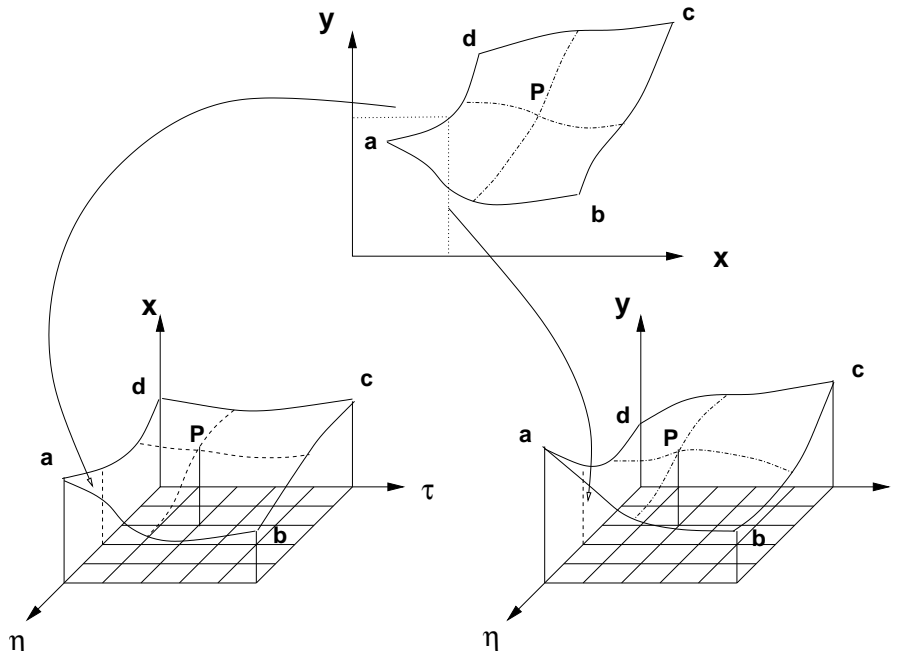
$$\begin{aligned} y &= h_2(\eta, \tau_1) \\ x &= h_1(\eta, \tau_1) \end{aligned}$$

Frontière Γ_2

$$\begin{aligned} y &= g_2(\eta_2, \tau) \\ x &= g_1(\eta_2, \tau) \end{aligned}$$

Frontière Γ_4

$$\begin{aligned} y &= q_2(\eta, \tau_2) \\ x &= q_1(\eta, \tau_2) \end{aligned}$$



Avec des termes forcés, Q et R , on peut en principe, atteindre le résultat recherché. Cependant, il n'est pas possible de prédire a priori le type, ni le niveau de l'effet d'un terme forcé donné. À cause du fort couplage entre les équations, il est difficile de séparer l'effet de termes forcés sur chacune des familles de coordonnées. Acquérir ce type d'expertise nécessite une certaine familiarité qui découle de nombreux essais et erreurs.

5.3 Choix des termes forcés

Intuitivement, on constate que selon les choix des fonctions P_i , le maillage peut être concentré, par exemple,

- $P_i > 0$, concentre les points dans le sens de ξ^i
- $P_i < 0$, concentre les points dans le sens contraire de ξ^i

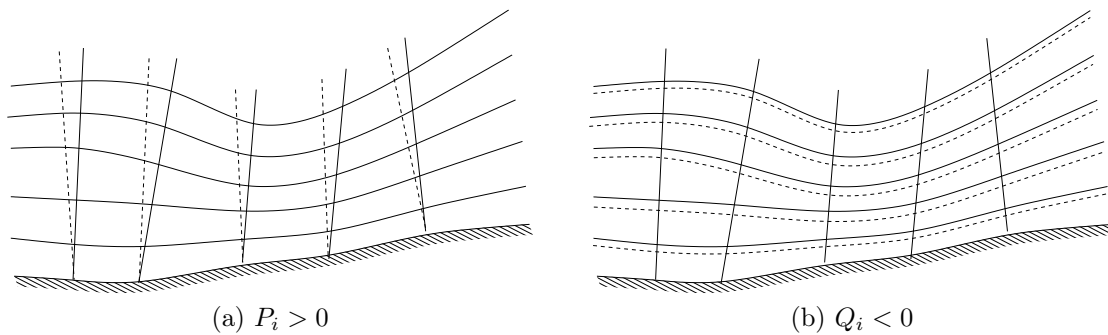


FIGURE 5.5 – Effet des termes forcés

De façon plus spécifique, on obtient une concentration des lignes de maillage vers une ligne $\xi = \xi_i$ par un terme forcé, P , dont l'amplitude est proportionnel à la distance entre les noeuds du maillage et la ligne :

$$P = -a \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) e^{-b|\xi - \xi_i|} \quad (5.4)$$

Le résultat est illustré à la Fig. 5.6.

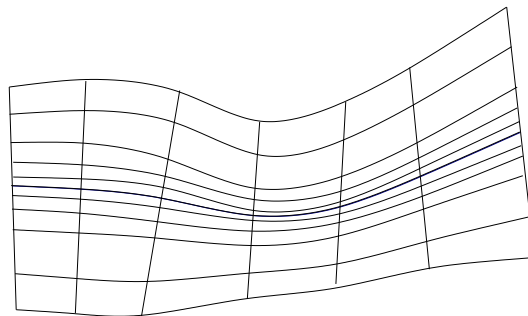


FIGURE 5.6 – Concentration vers une ligne

Similairement, on peut construire un terme forcé qui attire les courbes de coordonnées vers un noeud,

$$P = -a \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) e^{-b \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\tau - \tau_j)^2}} \quad (5.5)$$

qui donne le résultat de la Figure 5.7.

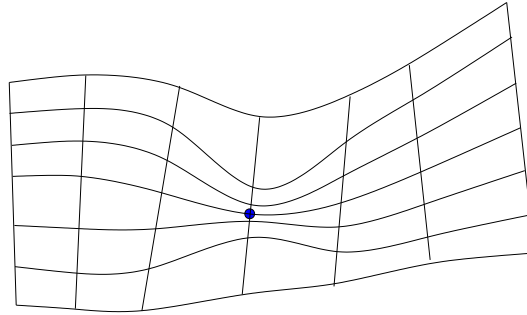
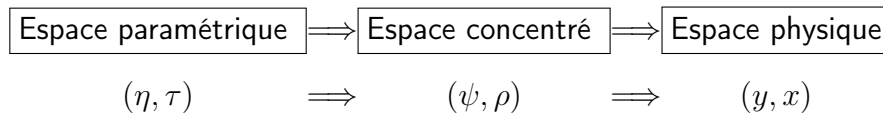


FIGURE 5.7 – Concentration vers un noeud

5.4 Concentration des mailles

Afin d'obtenir un contrôle sur les lignes de coordonnées plus direct qu'au travers de termes forcés, propose une approche où on sépare formellement la démarche en deux étapes. La concentration du maillage et la transformation vers le domaine physique sont scindées en deux opérations distinctes, tel qu'illustré ci-dessous :



D'abord, la concentration du maillage, $(\eta, \tau) \Longrightarrow (\psi, \rho)$, est effectuée dans l'espace paramétrique à l'aide de la transformation analytique ou algébrique :

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi(\eta, \tau) \\
 \rho &= \rho(\eta, \tau)
 \end{aligned}$$

Le maillage "régulier cartésien" ainsi concentré est ensuite adapté aux frontières du domaine physique $(\psi, \rho) \Longrightarrow (x, y)$, par les équations de maille :

$$\begin{aligned}L(x) &= 0 \\L(y) &= 0\end{aligned}$$

L'enchaînement de ces deux étapes est illustré graphiquement à la Figure 5.8.

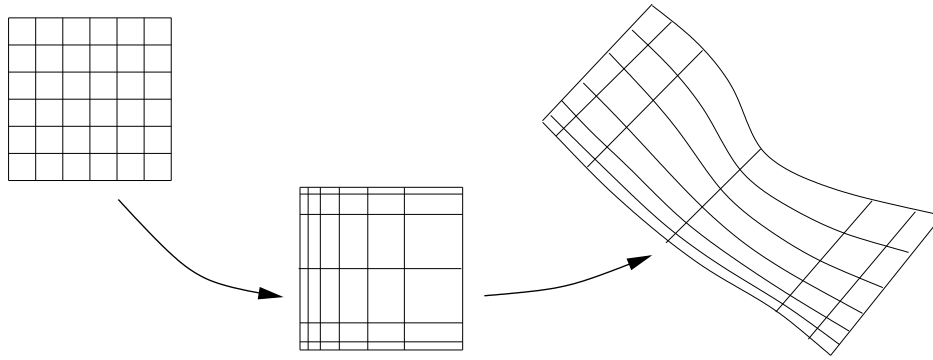


FIGURE 5.8 – Enchaînement de la concentration et de la transformation

Pour transformer l'espace concentré (ψ, ρ) suivant la démarche basée sur l'analogie thermique du Chapitre 4, on pose le modèle,

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= 0 \\ \nabla^2\rho &= 0\end{aligned}\tag{5.6}$$

En reprenant l'analogie thermique, on ne cherchera pas ici à exprimer la "température" en un point du domaine, mais à exprimer les coordonnées d'un point dont les "températures" sont ψ_i et ρ_i . Pour résoudre le système, c'est-à-dire obtenir les couples $(x_{i,j}, y_{i,j})$, il faut donc inverser les équations différentielles, en reproduisant le schéma utilisé pour le mailleur basé sur le modèle de Laplace.

Le développement sera fait en dimension 2 pour alléger les manipulations, la généralisation en dimension 3 ne pose aucun problème. Il faut tout d'abord exprimer le laplacien $\nabla^2\psi$ en fonction du laplacien $\nabla^2\eta$.

On exprime les dérivées de ψ et ρ par l'application de la règle de dérivation en chaîne. Pour la dérivée première :

$$\begin{aligned}\psi_x &= \psi_\eta\eta_x + \psi_\tau\tau_x \\ \psi_y &= \psi_\eta\eta_y + \psi_\tau\tau_y\end{aligned}$$

Pour les dérivées secondes, on applique la dérivation en chaîne comme suit,

$$\psi_{xx} = (\psi_x)_x$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_{\eta x} \eta_x + \psi_{\eta} \eta_{xx} + \psi_{\tau x} \tau_x + \psi_{\tau} \tau_{xx} \\
&= \psi_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2\psi_{\eta\tau} \eta_x \tau_x + \psi_{\tau\tau} \tau_x^2 + \psi_{\eta} \eta_{xx} + \psi_{\tau} \tau_{xx}
\end{aligned}$$

et de façon similaire pour la dérivée par rapport à y , on obtient,

$$\psi_{yy} = \psi_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2\psi_{\eta\tau} \eta_y \tau_y + \psi_{\tau\tau} \tau_y^2 + \psi_{\eta} \eta_{yy} + \psi_{\tau} \tau_{yy}$$

et, en répétant pour la variable ρ , cela donne :

$$\begin{aligned}
\rho_{xx} &= \rho_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2\rho_{\eta\tau} \eta_x \tau_x + \rho_{\tau\tau} \tau_x^2 + \rho_{\eta} \eta_{xx} + \rho_{\tau} \tau_{xx} \\
\rho_{yy} &= \rho_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2\rho_{\eta\tau} \eta_y \tau_y + \rho_{\tau\tau} \tau_y^2 + \rho_{\eta} \eta_{yy} + \rho_{\tau} \tau_{yy}
\end{aligned}$$

Alors, les opérateurs des Eqs. 5.6 deviennent :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \psi &= \psi_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\psi_{\eta\tau} (\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + \psi_{\tau\tau} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \\
&\quad + \psi_{\eta} (\eta_{xx} + \eta_{yy}) + \psi_{\tau} (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \rho &= \rho_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\rho_{\eta\tau} (\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + \rho_{\tau\tau} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \\
&\quad + \rho_{\eta} (\eta_{xx} + \eta_{yy}) + \rho_{\tau} (\tau_{xx} + \tau_{yy}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Ce qui donne,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \psi_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\psi_{\eta\tau} (\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + \psi_{\tau\tau} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \\ \rho_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\rho_{\eta\tau} (\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + \rho_{\tau\tau} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \psi_{\eta} & \psi_{\tau} \\ \rho_{\eta} & \rho_{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{xx} + \eta_{yy} \\ \tau_{xx} + \tau_{yy} \end{bmatrix} \\
&= -\mathcal{H} \begin{bmatrix} \eta_{xx} + \eta_{yy} \\ \tau_{xx} + \tau_{yy} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{\eta} & \psi_{\tau} \\ \rho_{\eta} & \rho_{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{xx} + \eta_{yy} \\ \tau_{xx} + \tau_{yy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\psi_{\eta\tau} (\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + \psi_{\tau\tau} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \\ \rho_{\eta\eta} (\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2\rho_{\eta\tau} (\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + \rho_{\tau\tau} (\tau_x^2 + \tau_y^2) \end{bmatrix}$$

Avec les définitions suivantes :

$$\mathcal{G} = \frac{\partial(\psi, \rho)}{\partial(\eta, \tau)} = \begin{bmatrix} \psi_{\eta} & \psi_{\tau} \\ \rho_{\eta} & \rho_{\tau} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

et,

$$\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tag{5.10}$$

les Eqs. 5.9 se simplifient,

$$\mathcal{G} \begin{bmatrix} \eta_{xx} + \eta_{yy} \\ \tau_{xx} + \tau_{yy} \end{bmatrix} = -\frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

où,

$$\begin{bmatrix} \eta_{xx} + \eta_{yy} \\ \tau_{xx} + \tau_{yy} \end{bmatrix} = -\frac{\mathcal{G}^{-1}}{J^2} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

et en explicitant cette équation vectorielle,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \eta &= -\frac{\mathcal{G}^{-1}}{J^2} \mathcal{L}\psi \\ \nabla^2 \tau &= -\frac{\mathcal{G}^{-1}}{J^2} \mathcal{L}\rho \end{aligned} \quad (5.13)$$

Le résultat de cette transformation s'interprète comme l'ajout d'un terme forcé aux équations de Laplace qui deviennent un système de Poisson.

La deuxième étape consiste à transformer cet espace concentré vers un espace adapté qui épouse les frontières du domaine physique. On réalise cette transformation en inversant les variables dépendantes et indépendantes. Le passage de $\eta(\mathbf{x})$ vers $\mathbf{x}(\eta)$ est obtenu par les relations entre les dérivées premières en dérivant la relation fonctionnelle $x = x(\eta, \tau)$ x_η , par rapport à x et y donnant,

$$\begin{cases} 1 &= x_\eta \eta_x + x_\tau \tau_x \\ 0 &= y_\eta \eta_x + y_\tau \tau_x \\ 0 &= x_\eta \eta_y + x_\tau \tau_y \\ 1 &= y_\eta \eta_y + y_\tau \tau_y \end{cases} \quad (5.14)$$

Ces équations peuvent être simplifiées sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \tau_x & \tau_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{I}$$

où

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\eta,\tau)} = \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{K} = \frac{\partial(\eta,\tau)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \tau_x & \tau_y \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{J}^{-1} \quad (5.17)$$

$$(5.18)$$

et,

$$J = \det(\mathcal{J}) = (x_\eta y_\tau - x_\tau y_\eta) \quad (5.19)$$

$$K = \det(\mathcal{K}) = (\eta_x \tau_y - \tau_x \eta_y) \quad (5.20)$$

Ces matrices représentent les jacobiens des transformations. Toutes les dérivées premières de $\eta(\mathbf{x})$ peuvent être exprimées en fonction des dérivées de $\mathbf{x}(\eta)$, grâce à cette équation. Pour passer aux dérivées secondes, il faut encore dériver les deux premières équations de Eqs. 5.14 par rapport à x , et les deux dernières et par rapport à y .

$$\begin{cases} 0 = (x_\eta)_x \eta_x + x_\eta \eta_{xx} + (x_\tau)_x \tau_x + x_\tau \tau_{xx} \\ 0 = (y_\eta)_x \eta_x + y_\eta \eta_{xx} + (y_\tau)_x \tau_x + y_\tau \tau_{xx} \\ 0 = (x_\eta)_y \eta_y + x_\eta \eta_{yy} + (x_\tau)_y \tau_y + x_\tau \tau_{yy} \\ 0 = (y_\eta)_y \eta_y + y_\eta \eta_{yy} + (y_\tau)_y \tau_y + y_\tau \tau_{yy} \end{cases} \quad (5.21)$$

$$\begin{cases} 0 = x_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2x_{\eta\tau} \eta_x \tau_x + x_{\tau\tau} \tau_x^2 + x_\eta \eta_{xx} + x_\tau \tau_{xx} \\ 0 = y_{\eta\eta} \eta_x^2 + 2y_{\eta\tau} \eta_x \tau_x + y_{\tau\tau} \tau_x^2 + y_\eta \eta_{xx} + y_\tau \tau_{xx} \\ 0 = x_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2x_{\eta\tau} \eta_y \tau_y + x_{\tau\tau} \tau_y^2 + x_\eta \eta_{yy} + x_\tau \tau_{yy} \\ 0 = y_{\eta\eta} \eta_y^2 + 2y_{\eta\tau} \eta_y \tau_y + y_{\tau\tau} \tau_y^2 + y_\eta \eta_{yy} + y_\tau \tau_{yy} \end{cases} \quad (5.22)$$

Finalement, après simplification, en combinant les première et troisième équations, et les deuxième et quatrième de Eqs. 5.21, on obtient,

$$\begin{aligned} (x_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2x_{\eta\tau}(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + x_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2)) &= -x_\eta(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + x_\tau(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \\ (y_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2y_{\eta\tau}(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + y_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2)) &= -y_\eta(\eta_{xx} + \eta_{yy}) + y_\tau(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \end{aligned}$$

qui se réécrit sous forme vectorielle,

$$\begin{bmatrix} x_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2x_{\eta\tau}(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + x_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) \\ y_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2y_{\eta\tau}(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + y_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{xx} + \eta_{yy} \\ \tau_{xx} + \tau_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Le membre de droite est le terme forcé provenant de la concentration et, à l'aide de Eqs. 5.9, donne

$$\begin{bmatrix} x_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2x_{\eta\tau}(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + x_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) \\ y_{\eta\eta}(\eta_x^2 + \eta_y^2) + 2y_{\eta\tau}(\eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y) + y_{\tau\tau}(\tau_x^2 + \tau_y^2) \end{bmatrix} = \frac{\mathcal{G}^{-1}}{J^2} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

En adoptant les notations suivantes afin de simplifier les expressions,

$$\begin{aligned} J &= \det(\mathcal{J}) \\ \alpha &= \eta_x^2 + \eta_y^2 = \frac{1}{J^2}(x_\tau^2 + y_\tau^2) \\ \beta &= \eta_x \tau_x + \eta_y \tau_y = \frac{1}{J^2}(x_\eta x_\tau + y_\eta y_\tau) \\ \gamma &= \tau_x^2 + \tau_y^2 = \frac{1}{J^2}(x_\eta^2 + y_\eta^2) \end{aligned}$$

on obtient,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}x \\ \mathcal{L}y \end{bmatrix} = \mathcal{J}\mathcal{G}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$= \frac{1}{G} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_\tau & -\psi_\tau \\ -\rho_\eta & \psi_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}\psi \\ \mathcal{L}\rho \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

où

$$\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \tau} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (5.27)$$

$$\alpha \begin{bmatrix} x_{\eta\eta} \\ y_{\eta\eta} \end{bmatrix} - 2\beta \begin{bmatrix} x_{\tau\eta} \\ y_{\tau\eta} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x_{\tau\tau} \\ y_{\tau\tau} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_\tau & -\psi_\tau \\ -\rho_\eta & \psi_\eta \end{bmatrix} \left(\alpha \begin{bmatrix} \psi_{\eta\eta} \\ \rho_{\eta\eta} \end{bmatrix} - 2\beta \begin{bmatrix} \psi_{\tau\eta} \\ \rho_{\tau\eta} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \psi_{\tau\tau} \\ \rho_{\tau\tau} \end{bmatrix} \right) \quad (5.28)$$

La forme finale des équations générant un maillage elliptique concentré est la suivante :

$$\mathcal{L}\mathbf{x} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} x_\eta & x_\tau \\ y_\eta & y_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_\tau & -\psi_\tau \\ -\rho_\eta & \psi_\eta \end{bmatrix} \mathcal{L}\psi \quad (5.29)$$

Introduire la concentration à un mailleur de type elliptique ne modifie donc que peu la forme du système à résoudre. Cela consiste à ajouter un terme source. Ceci assure que ce type de générateur de maillage hérite des bonnes propriétés du système elliptique.

5.5 Synthèse des équations de maille

Equation de Laplace :

$$\begin{aligned} \alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} &= 0 \\ \alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} &= 0 \end{aligned}$$

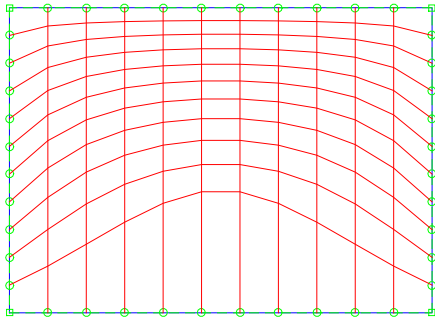
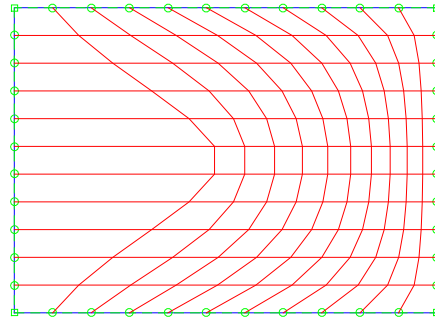
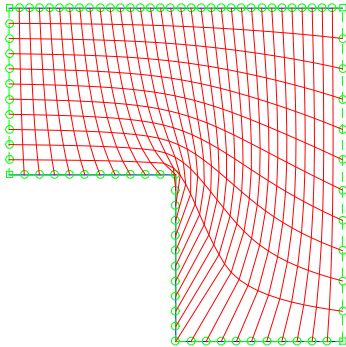
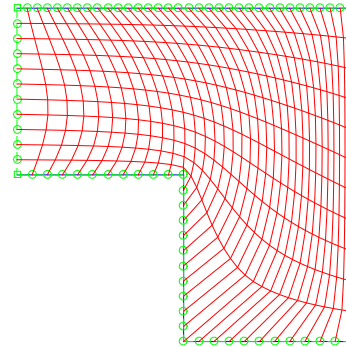
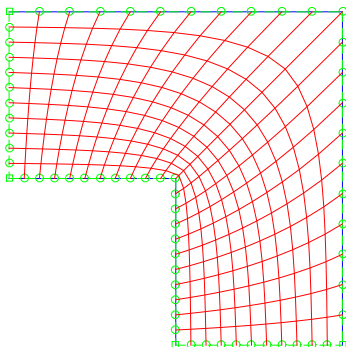
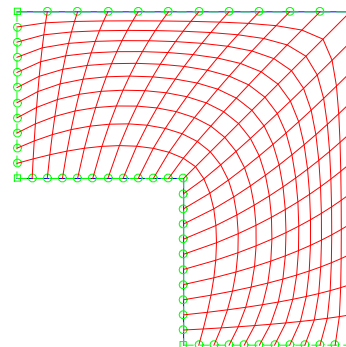
Equation de Poisson généralisée :

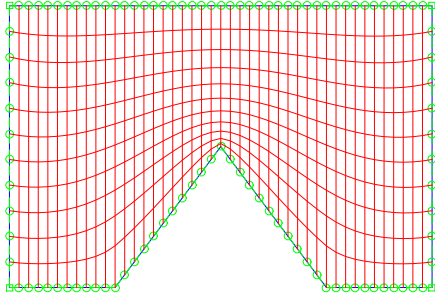
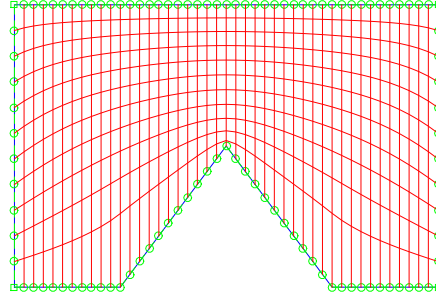
$$\begin{aligned} \alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} &= -J^2 (Qx_\eta + Rx_\tau) \\ \alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} &= -J^2 (Qy_\eta + Ry_\tau) \end{aligned}$$

Equation de Poisson avec concentration découplée par direction :

$$\begin{aligned} \alpha x_{\eta\eta} + \gamma x_{\tau\tau} - 2\beta x_{\eta\tau} &= \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} x_\eta + \gamma \frac{\rho_{\tau\tau}}{\rho_\tau} x_\tau \\ \alpha y_{\eta\eta} + \gamma y_{\tau\tau} - 2\beta y_{\eta\tau} &= \alpha \frac{\psi_{\eta\eta}}{\psi_\eta} y_\eta + \gamma \frac{\rho_{\tau\tau}}{\rho_\tau} y_\tau \end{aligned}$$

5.5.1 Exemples

 $Q=0, R=20$  $Q=20, R=0$  $Q=0, R=0$  $Q=30, R=0$  $Q=0, R=0$  $Q=30, R=0$ 

$Q=0, R=5$  $Q=30, R=-5$ 

On compare deux techniques de concentration vers un point,

1. terme forcé volumique : Eq. 5.5
2. application d'une concentration sur les bords opposés de chaque paire de cotés

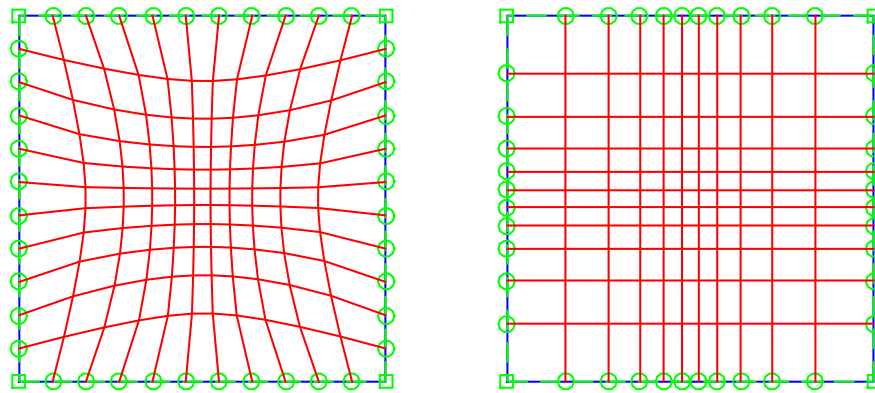
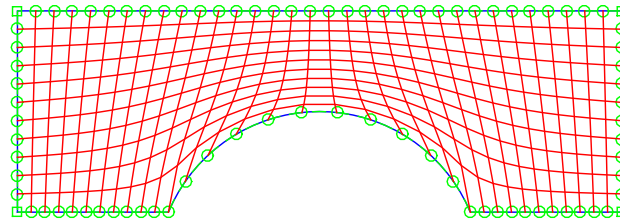
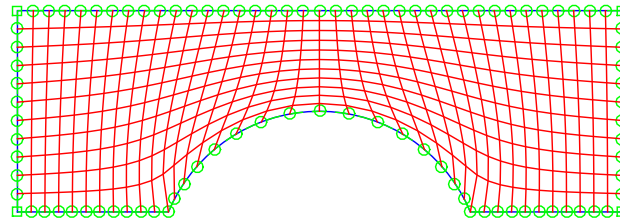


FIGURE 5.9 – Comparaison de deux techniques de concentration vers un point



(a) Répartition uniforme de 10 points, sans concentration



(b) Modification du nombre de points de 10 à 15 sur la bosse, avec une concentration vers les extrémités avec un facteur de .5

FIGURE 5.10 – Maillages Winslow avec différentes concentrations