GENERATION DE MAILLAGES

Une introduction par la pratique

Génération de maillages :
Une introduction par la pratique

Ricardo CAMARERO
Département de génie mécanique
École Polytechnique de Montréal
10 janvier 2024]

ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

Table des matières

Chapitre 2

Maillages Curvilignes

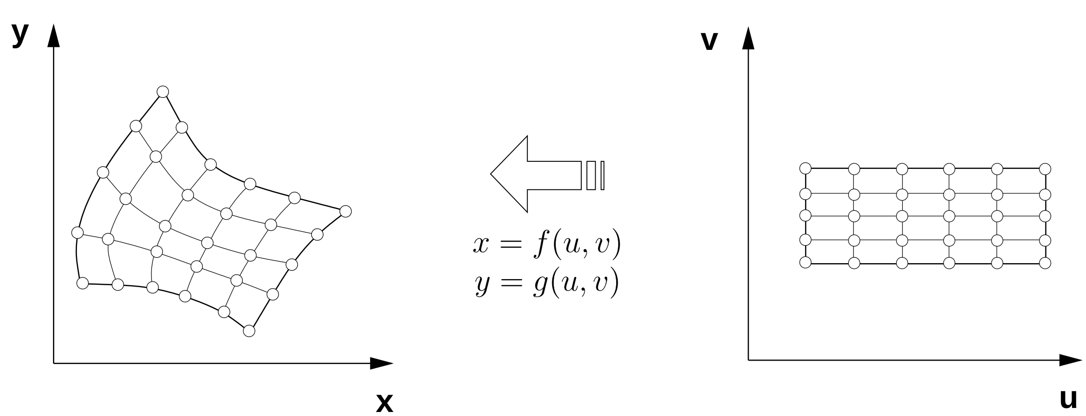
2.1 Les maillages algébriques

Un maillage algébrique est une transformation entre un espace physique (x, y) et un espace paramétrique (u, v) de la forme,

$$\begin{array}{rcl} x & = & f(u, v) \\ y & = & g(u, v) \end{array} \tag{2.1}$$

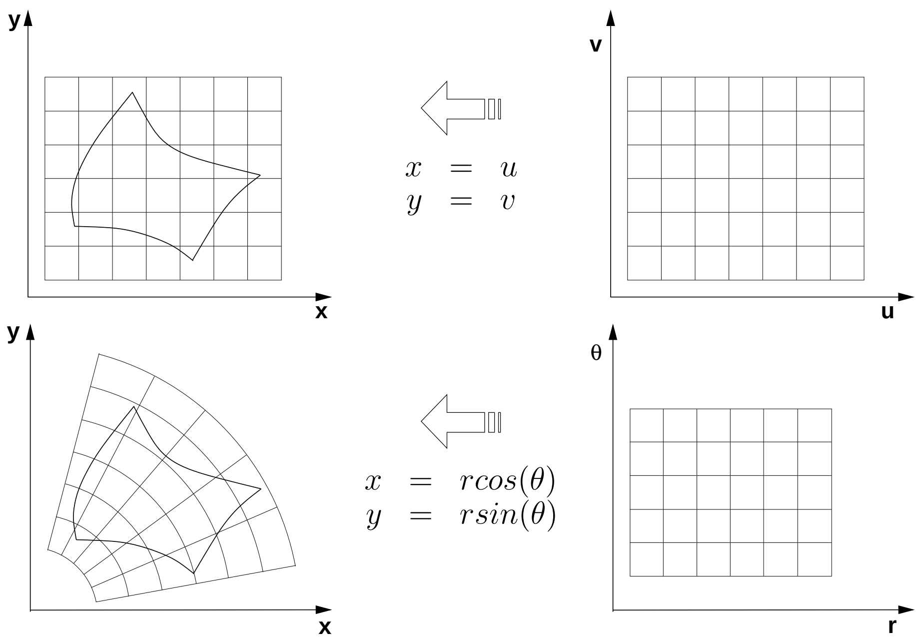
Les diverses techniques de maillages algébriques sont caractérisées par une transformation dont l'expression est connue explicitement. Alors, la génération du maillage se ramène à une simple évaluation des fonctions $f(u, v)$ et $g(u, v)$.

Dans l'espace paramétrique, (u, v), on génère un maillage régulier cartésien, et le maillage dans l'espace physique, (x, y), est obtenu par la transformation :



Le problème est de trouver les fonctions f et g pour un domaine donné tel que les lignes dans l'espace paramétrique seront transformées, idéalement, sur les frontières du domaine.

On illustre avec deux transformations triviales présentées au Chapitre. 1 sur les systèmes de coordonnées.

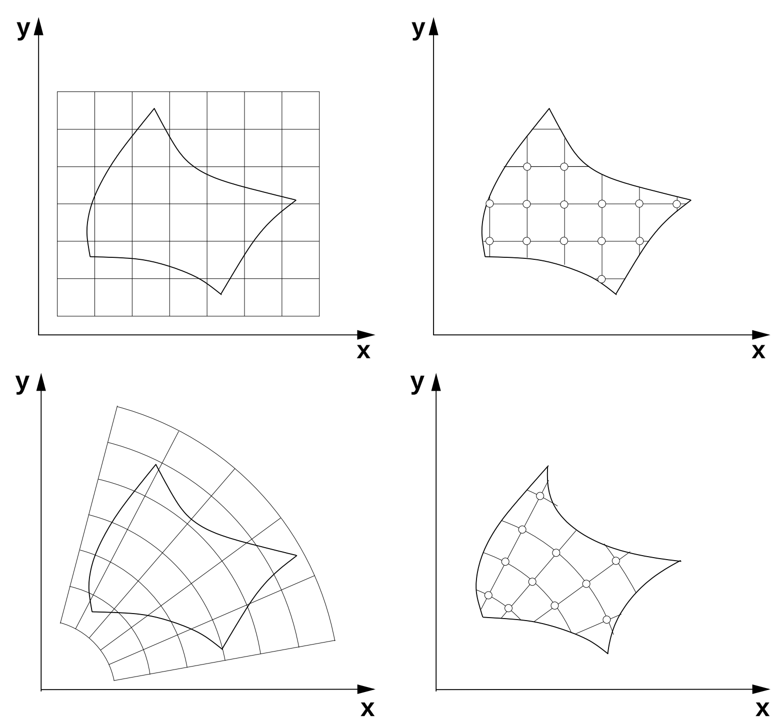


Pour cet exemple, ainsi que pour une transformation algébrique quelconque, après l'élimination des mailles extérieures au domaine, on obtient :

✘ *les lignes de maillage ne sont pas alignées avec les frontières du domaine ;*

✘ *les sommets de la grille paramétrique ne coincident pas avec la frontière du domaine ;*

✘ *la structure de l'espace paramétrique est perdue lors du tri des sommets intérieurs /extérieurs.*



On constate que ces maillages ne sont pas généralement géométriquement conformes car le point de départ n'est pas la géométrie dans l'espace physique mais un maillage régulier dans l'espace paramétrique. Alors, le maillage intérieur doit être raccordé à la discrétisation de la frontière, soit,

— *avec une couche d'éléments/mailles pour en faire un maillage géométriquement conforme, ou bien,*
— *par une reconstruction de l'interpolant dans l'application des conditions frontières pour prendre en compte une représentation correcte de la géométrie.*

Ce qui est recherché est une transformation qui donne un maillage curviligne, avec les caractéristiques qui sont,

— *la première et la dernière ligne de maillage de chaque famille, épousent les frontières respectives du domaine ;*
— *les lignes intermédiaires du maillage sont adaptées aux frontières et varient de manière monotone d'une frontière à l'autre ;*
— *un patron qui se répète avec un nombre d'éléments autour d'un sommet qui est le même partout ;*
— *le maillage n'est pas nécessairement orthogonal ;*
— *topologiquement, le domaine est un rectangle curviligne qui doit avoir quatre cotés.*

Ce qui se traduit par :

— une structure de données implicite et effficace ;
— un maillage qui épouse les frontières du domaine.
— des éléments qui en pratique sont des quadrangles (hexahèdres) ou des triangles (tétraèdres) curvilignes.

2.1.1 Transformations conformes

Les transformations conformes réalisent une application d'un domaine dans le plan complexe (u, v) vers le plan complexe (x, y) par la fonction d'une variable complexe :

$$z = f(w)$$

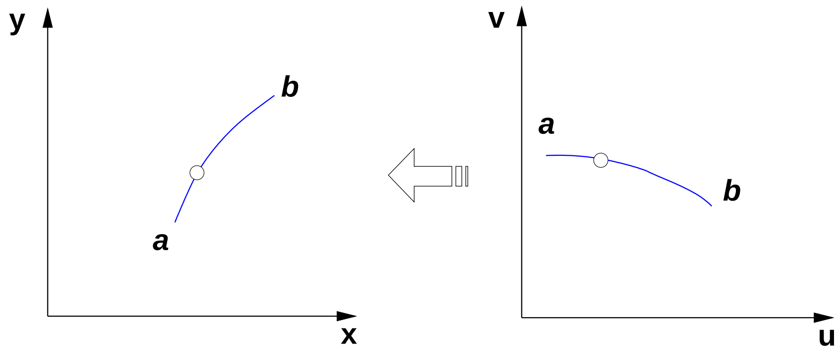
où $z = x + \imath y$, $w = u + \imath v$ et $\imath = \sqrt{-1}$.

Ces transformations sont basées sur les propriétés de la fonction $f(w)$ qui se décompose en partie réelle, $x = x(u, v)$, et une partie imaginaire, $y = y(u, v)$. Les fonctions x et y ne peuvent être choisies de façon arbitraire, mais doivent vérifier les relations de Cauchy-Riemann :

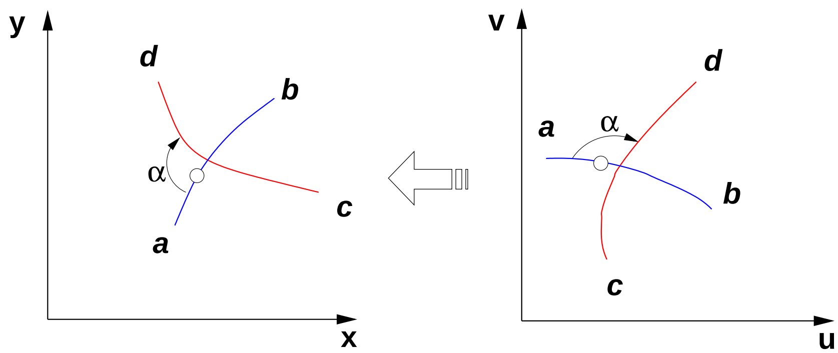
$$\begin{aligned} \nabla^2 x &= 0 \\ \nabla^2 y &= 0 \end{aligned}$$

c-à-d x et y sont des fonctions harmoniques.

En parcourant la courbe de $a \to b$ dans l'espace paramétrique, (w), on engendre son image dans l'espace physique, (z).



On répète avec une autre courbe, $c \to d$, formant un angle α avec la première, qui sera préservé dans l'espace physique, (z).



2.1.2 La transformation $z = w^2$

La fonction $z = w^2$ avec $z = x + \imath y$ et $w = u + \imath v$ peut s'expliciter en ses parties réelle et imaginaire : ➜

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= 2uv \end{aligned}$$

La droite $v = v_0$ dans l'espace (u, v) donne la courbe paramétrique dans l'espace (x, y) : ➜

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v_0^2 \\ y &= 2uv_0 \end{aligned}$$

On élimine $u = \frac{y}{2v_0}$ et on obtient : ➜

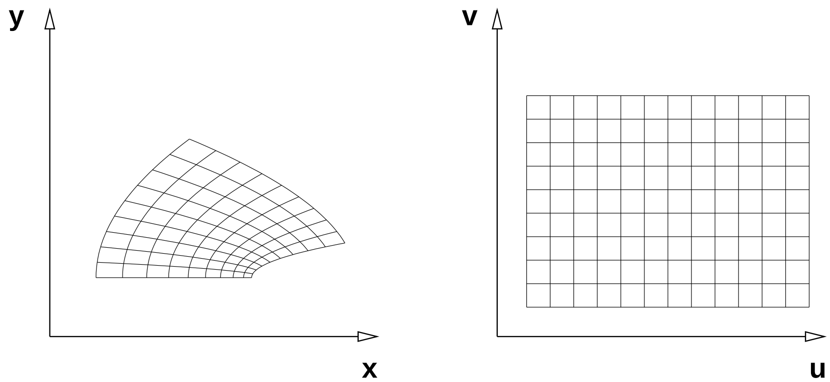
$$x = \frac{y^2}{4v_0^2} - v_0^2$$

Ce qui est l'équation explicite d'une parabole. En variant le paramètre $v = v_0$, on obtient une famille de courbes paraboliques.

De façon semblable, la droite $u = u_0$ dans l'espace (u, v) donne, dans l'espace (x, y), la courbe,

$$x = u_0^2 - \frac{y^2}{4u_0^2}$$

En variant le paramètre $u = u_0$, on obtient une deuxième famille de courbes paraboliques. Ces deux familles sont orthogonales découlant de la propriété de la préservation des angles.



La grille régulière dans l'espace (u, v) donne le maillage curviligne composé de deux familles de courbes paraboliques dans l'espace (x, y). Ce qui représente un intérêt pratique seulement si les frontières du domaine de calcul sont de formes paraboliques!!!!

2.1.3 La transformation $z = e^w + w$

Un autre exemple remarquable transforme les deux demi-droites dans le plan w en deux demi-droites superposées dans le plan z :

$$v = \pi \begin{cases} u & \leq & 0 \\ u & \geq & 0 \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad y = 1 \begin{cases} x & \leq & 0 \\ x & \leq & 0 \end{cases}$$

La transformation $z = e^w + w$ a pour effet de plier la droite $v = \pi$ sur elle-même, au point $(u = 0, v = \pi)$ en la rabattant vers la gauche. Ce qui donne le résultat suivant,

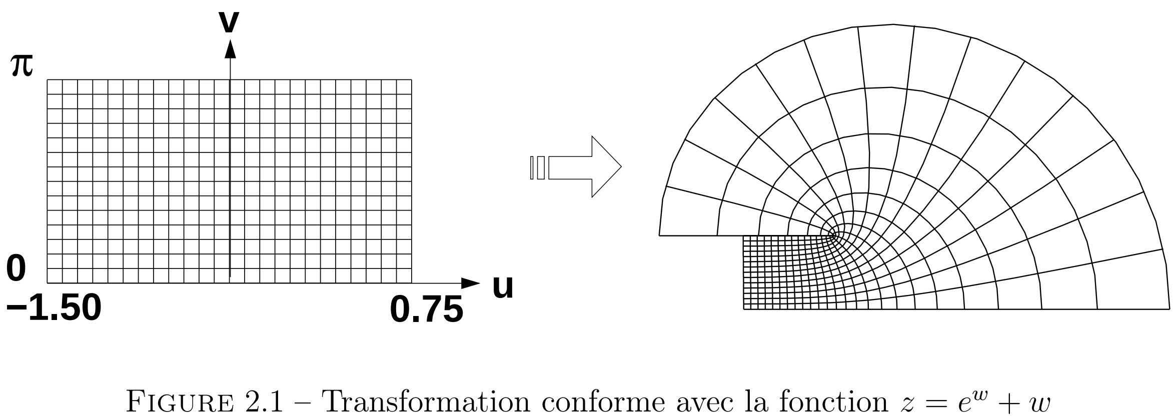


FIGURE 2.1 – Transformation conforme avec la fonction $z = e^w + w$

La figure suivante montre différents maillages obtenus par la transformation pour plusieurs valeurs du rabattement. Sana être totalement généralement applicable, cette transformations a trouvé des utilisations pratique en aérodynamique.

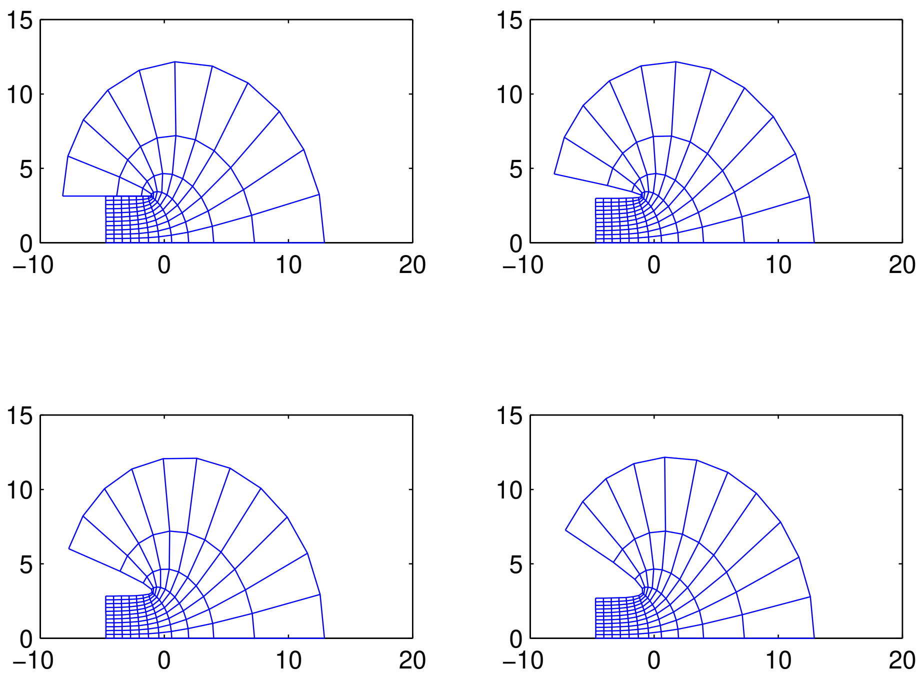


FIGURE 2.2 – Transformation conforme avec la fonction $z = e^w + w$ avec diverses valeurs du rabattement

2.1.4 Critique

Ces différents exemples montrent les limites des modèles de mailles basés sur les transformations algébriques qui,

— en général, ne donnent pas des maillages curvilignes, et nécéssitent un raccordement du maillage frontière (1-d) avec le maillage intérieur (quadrangles/triangles) par l'insertion de mailles triangulaires ;

— strictement parlant, sont des **maillages hybrides** (non structurés) sur le plan des opérations informatiques et des structures de données ;

et ainsi perdent les avantages associés aux maillages structurés.

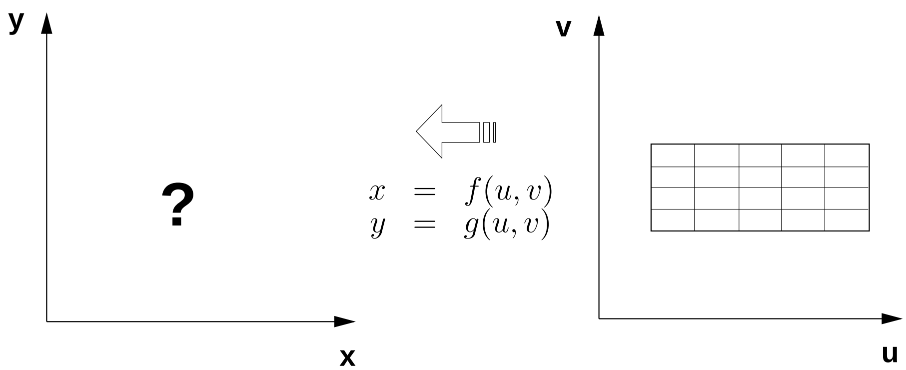
Présentant un certain intérêt, les transformations conformes permettent des maillages,

— curvilignes, efficaces et de bonne qualité ;
— préservent les angles entre deux courbes, ce qui permet des maillages orthogonaux.

Cependant, à cause de leur origine mathématique, ce type de transformation se limite à deux dimensions et par conséquent, exclu la possibilité de maillages en trois dimensions.

En conclusion, ces approches sont limitées quant à la possibilité de mailler des géométries de formes diverses.

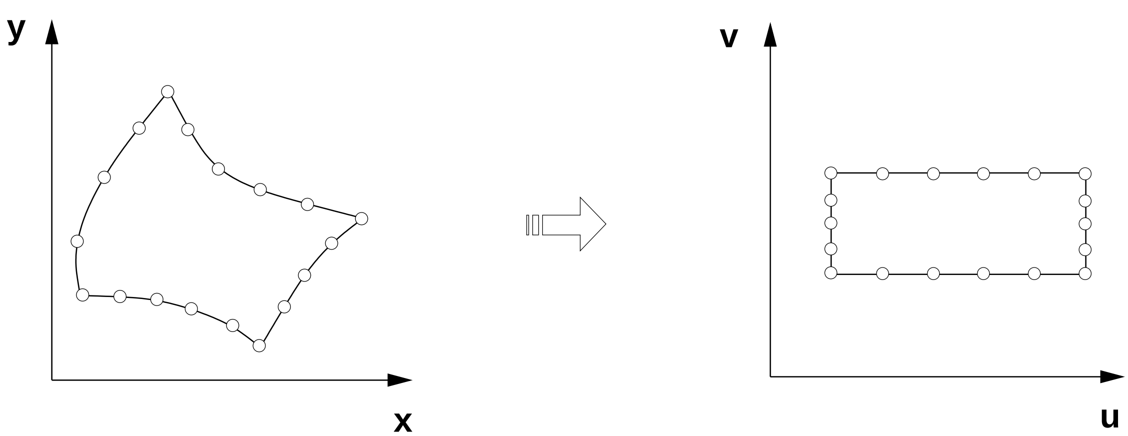
Le probléme de chercher une transformation telle qu'un rectangle dans l'espace paramétrique soit transformé sur les frontières d'un domaine physique quelconque est mal posé car f et g ne disposent d'aucunes informations sur la géométrie. Autrement dit, comme illustré ci-dessous,



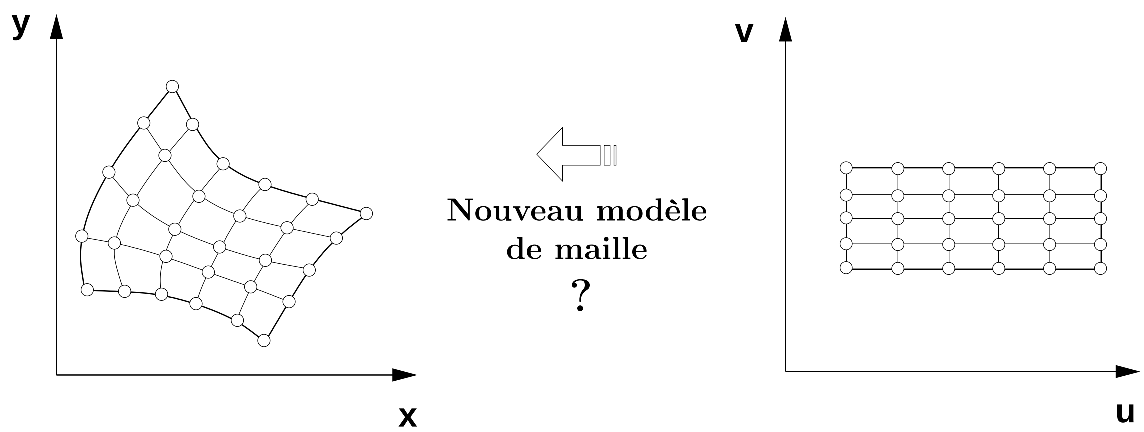
le maillage résultant de la transformation,

$$
\begin{aligned}
x &= f(u, v) \\
y &= g(u, v)
\end{aligned}
$$

ne donnera pas nécessairement le maillage souhaité du dommaine si f et g ne contiennent pas l'information de la géométrie. Il faut donc introduire la discrétisation des frontières physiques dans la transformation qu'opère ces fonctions,



L'approche sera de remplacer ces transformations algébriques par un nouveau modèle de maille qui utilise explicitement cette information comme schématisé ci-dessous.



On propose comme mécanisme une technique d'interpolation transfinie ou bien un système d'équations différentielles qui sont présentés aux chapitres suivants.