MEC6212 : Génération de maillage

MAILLAGES CURVILIGNES

Ricardo Camarero
Département de génie mécanique

20 janvier 2024

Motivation et contexte

Concepts de base et historique

Maillages Structurés :

- **Maillages curvilignes**
- *Interpolation transfinie*
- *Méthodes EDP : Elliptiques*
- *Concentration de mailles*

Maillages non-structurés :

- *Triangulation de Delaunay*
- *Maillages Delaunay contraints*
- *Méthode d'avance de front*

Maillages Hybrides :

- *Décomposition spatiale : multiblocs, hiérarchique*

Table des matières

Concepts de base

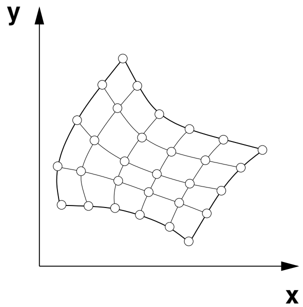
Un maillage algébrique est une transformation entre :

un espace physique (x, y)	$x = f(u,v)$ $y = g(u,v)$	un espace paramétrique (u, v)

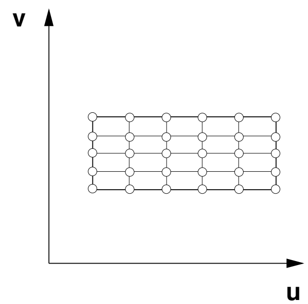
1. **Les diverses techniques de maillages algébriques sont caractérisées par une transformation dont l'expression est connue explicitement.**
2. **La génération du maillage se ramène à une simple évaluation des fonctions $f(u, v)$ et $g(u, v)$.**
3. **Par exemple, des expressions analytiques tel que :**
   - *Systèmes de coordonnées : cartésien, polaire ...*
   - *Transformations conformes ;*
   - *Interpolation transfinie.*

Génération du maillage

➜ **Dans l'espace paramétrique, (u, v), on génère un maillage régulier cartésien, et le maillage dans l'espace physique, (x, y), est obtenu par la transformation,**

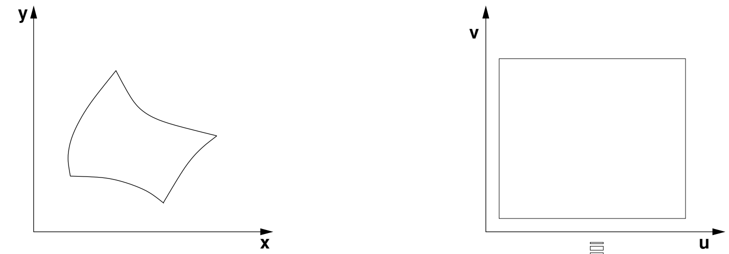


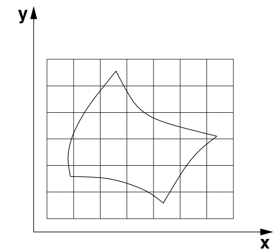
$$x = f(u, v)$$
$$y = g(u, v)$$



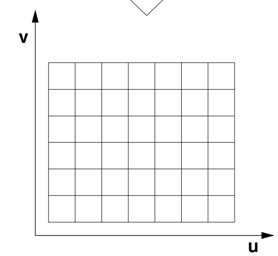
➜ **Le problème est de trouver les fonctions f et g pour un domaine donné tel que les lignes dans l'espace paramétrique seront transformées sur les frontières du domaine.**

Une transformation triviale

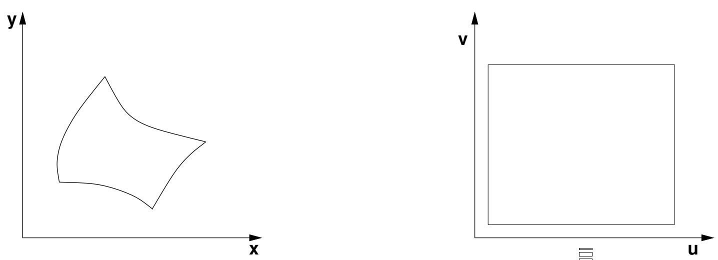


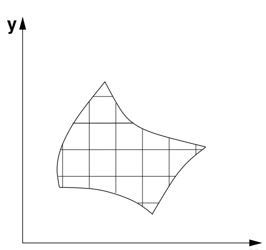


$$x = u$$
$$y = v$$

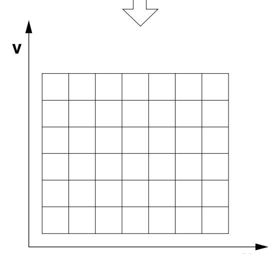


Une transformation triviale

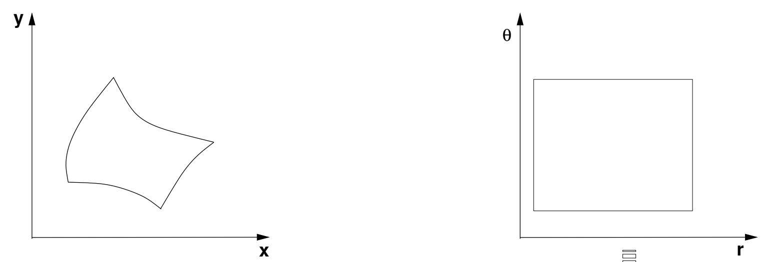


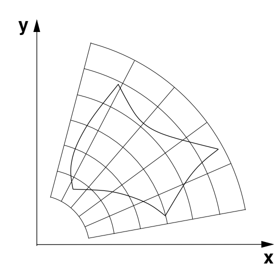


$$x = u$$
$$y = v$$

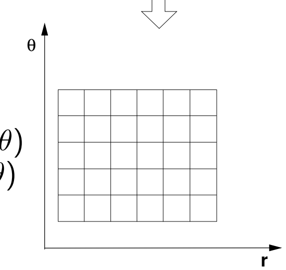


Une autre transformation





$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$



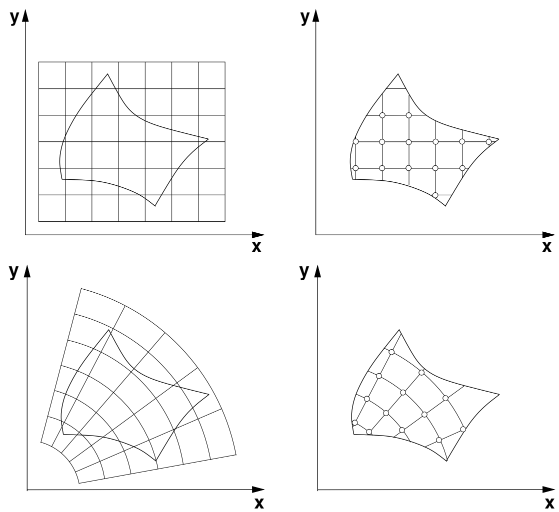
Maillages algébriques non curvilignes

Pour une transformation algébrique quelconque :

✘ *les lignes de maillage ne sont pas alignées avec les frontières du domaine ;*

✘ *les sommets de la grille paramétrique ne coincident pas avec la frontière du domaine ;*

✘ *la structure de l'espace paramétrique est perdue lors du tri des sommets intérieurs /extérieurs.*



La problèmatique

Les maillages algébriques utilisant une transformation quelconque ne sont pas généralement géométriquement conforme car :

1. *Le point de départ n'est pas la géométrie dans l'espace physique mais un maillage régulier dans l'espace paramétrique ;*
2. *Le maillage intérieur doit être raccordé à la discrétisation de la frontière, soit,*
    - *avec une couche d'éléments/mailles pour en faire un maillage géométriquement conforme ;*

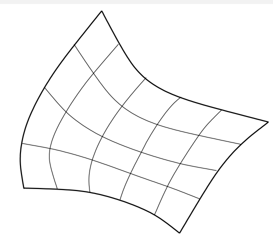
      ou bien,
    - *par une reconstruction de l'interpolant dans l'application des conditions frontières pour prendre en compte une représentation correcte de la géométrie.*

Ce qui donne un maillage hybrique ou nonstructuré.

Maillages structurés curvilignes

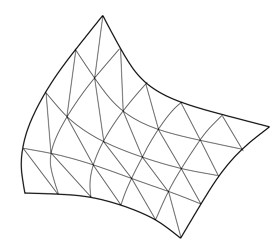
Les caractéristiques sont :

- *un patron qui se répète ;*
- *le nombre d'éléments autour d'un noeud est le même partout ;*
- *un réseau de lignes ou de courbes de maillage qui varient de facon monotone entre les bords du domaine ;*



Ce qui se traduit par :

- *une structure de données implicite et effficace ;*
- *un maillage qui épouse les frontières du domaine.*



Pour la forme géométrique des éléments en pratique, on retrouve soit des quadrangles (hexahèdres) ou des triangles (tétraèdres) curvilignes.

Propriétés de la transformation

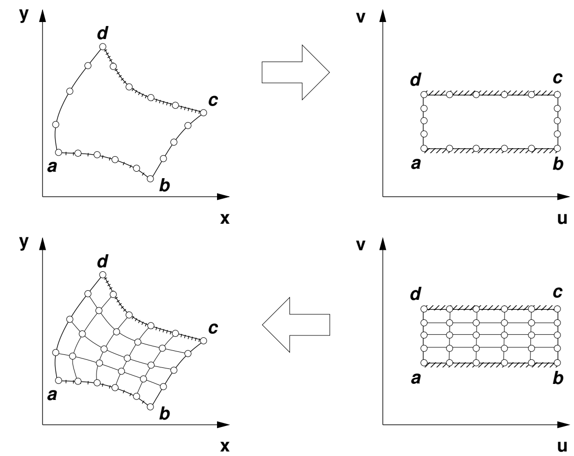
Cette application réalise une transformation d'un maillage régulier dans l'espace paramétrique en un réseau de deux familles de lignes de maillage dans l'espace physique avec les propriétés suivantes :

- *la première et la dernière ligne de maillage de chaque famille, épousent les frontières respectives du domaine,*
- *les lignes intermédiaires du maillage sont adaptées aux frontières et varient de manière monotone d'une frontière à l'autre,*
- *le maillage n'est pas nécessairement orthogonal.*
- *topologiquement, le domaine est un rectangle curviligne qui doit avoir quatre cotés.*

➜ Il en découle une organisation efficace du domaine et le maillage demeure structuré pour des géométries complexes.

Le rectangle topologique

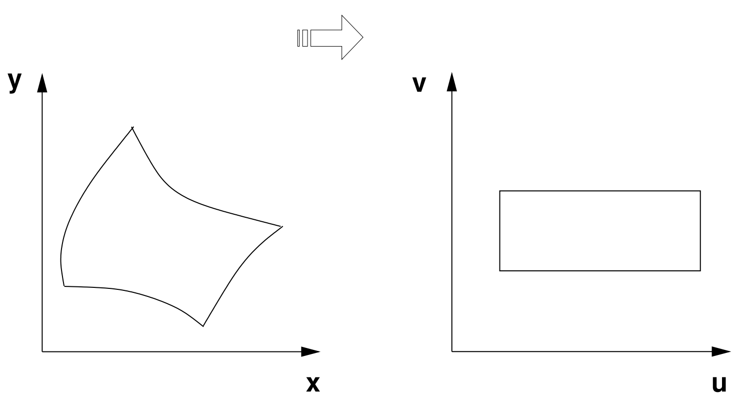
On identifie les deux paires de frontières dans l'espace physique correspondant aux valeurs limites des paramètres u et v, respectivement.



La problèmatique

Le problème est de trouver f et g pour un domaine donné tel que les lignes dans l'espace paramétrique seront transformées sur les frontières du domaine.

$$u = f^{-1}(x, y)$$
$$y = g^{-1}(x, y)$$



Fonction d'une variable complexe

Les transformations conformes réalisent une application d'un domaine dans le plan complexe (u, v) vers le plan complexe (x, y) par la fonction d'une variable complexe :

$$z = f(w)$$

où $z = x + \imath y$, $w = u + \imath v$ et $\imath = \sqrt{-1}$.

- Ces transformations sont basées sur les propriétés de la fonction $f(w)$ qui se décompose en :

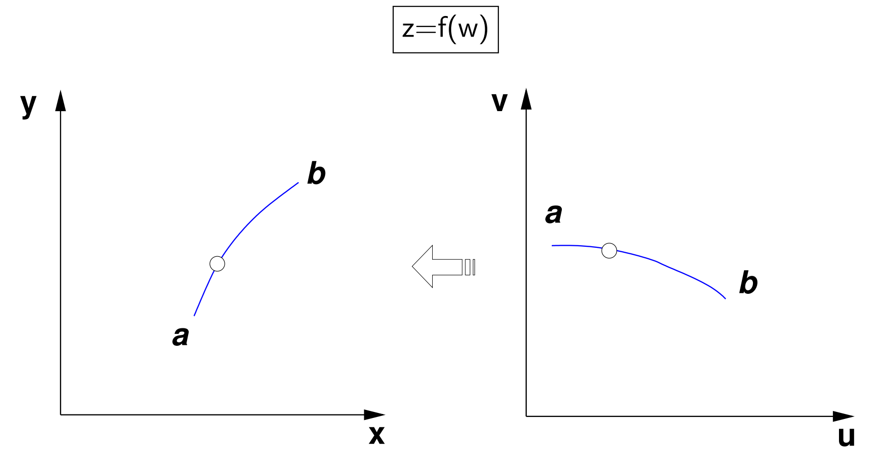
partie réelle	partie imaginaire
$x = x(u, v)$	$y = y(u, v)$

- Les fonctions x et y ne peuvent être choisies de façon arbitraire, mais doivent vérifier les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \nabla^2 x &= 0 \\ \nabla^2 y &= 0 \end{aligned}$$

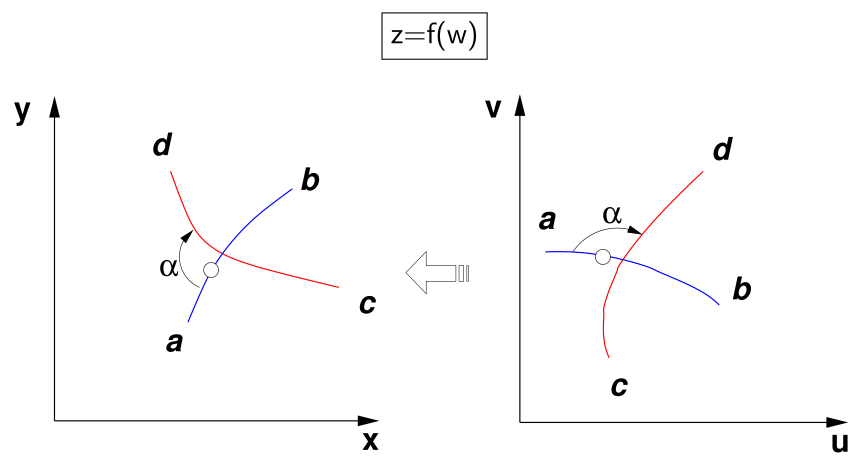
c-à-d x et y sont des fonctions harmoniques.

Transformation d'une courbe



En parcourant la courbe de $a \rightarrow b$ dans l'espace paramétrique, (w), on engendre son image dans l'espace physique, (z).

Préservation des angles



On répète avec une autre courbe, $c \rightarrow d$, formant un angle α avec la première, qui sera préservée dans l'espace physique, (Z).

La transformation $z = w^2$

La fonction $z = w^2$ avec $z = x + \imath y$ et $w = u + \imath v$ peut s'expliciter en ses parties réelle et imaginaire : ➜

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= 2uv \end{aligned}$$

La droite $v = v_0$ dans l'espace (u, v) donne la courbe paramétrique dans l'espace (x, y) : ➜

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v_0^2 \\ y &= 2uv_0 \end{aligned}$$

On élimine $u = \frac{y}{2v_0}$ et on obtient : ➜

$$x = \frac{y^2}{4v_0^2} - v_0^2$$

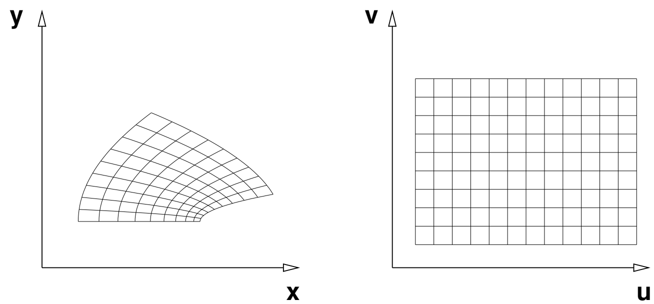
1. **Ce qui est l'équation explicite d'une parabole.**
2. **En variant le paramètre $v = v_0$, on obtient une famille de courbes paraboliques.**

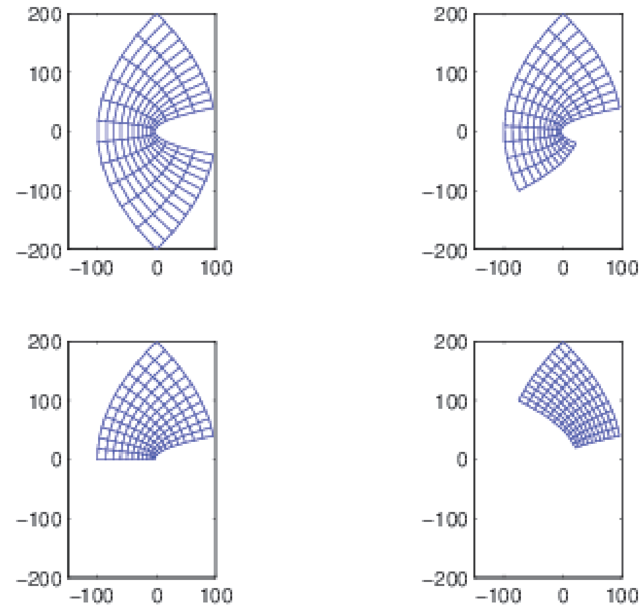
De façon semblable, la droite $u = u_0$ dans l'espace (u, v) donne, dans l'espace (x, y), la courbe,

$$x = u_0^2 - \frac{y^2}{4u_0^2}$$

- *En variant le paramètre $u = u_0$, on obtient une deuxième famille de courbes paraboliques.*
- *Ces deux familles sont orthogonales découlant de la propriété de la préservation des angles.*

$$\boxed{z = w^2}$$

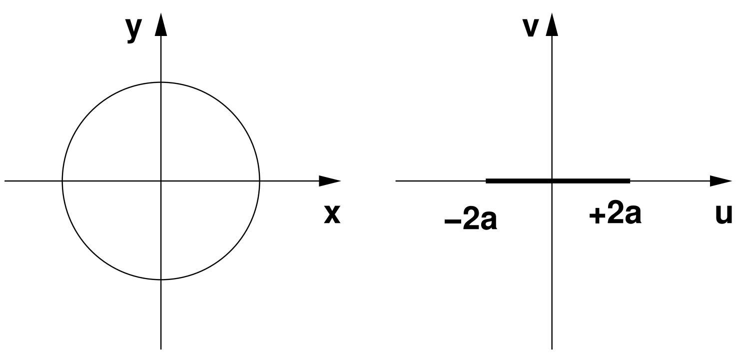




Transformation vers un cercle

$$z = f(w) = \frac{w}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 - a^2}$$

$$-2a \leq \quad u \quad \leq 2a$$



Transformation de Joukowsky

Dans le domaine de l'aérodynamique, la transformation la plus illustre est celle de Joukowsky :

$$z(w) = w + \frac{\lambda^2}{w}$$

où $z = x + \imath y$, et $w = u + \imath v$.

➜ Après quelques manipulations, on obtient,

$$z(w) \quad = \quad \frac{u(u^2 + v^2 + \lambda^2)}{(u^2 - v^2)} + \imath \frac{v(u^2 + v^2 - \lambda^2)}{(u^2 - v^2)}$$

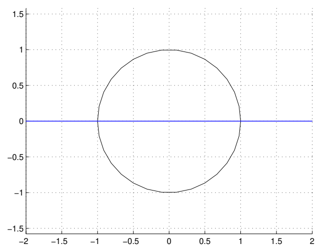
➜ On choisi la courbe w, le cercle,

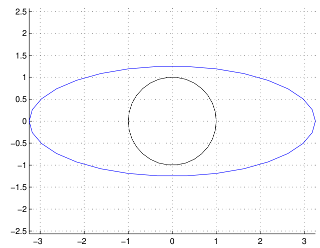
$$w = re^{\imath\theta} = rcos\theta + \imath rsin\theta$$

C'est-à-dire, $u = rcos\theta$ et $v = rsin\theta$, et on substitue dans z,

$$z(\theta) \quad = \quad \frac{cos\theta(r^2 + \lambda^2)}{r(cos^2\theta - sin^2\theta)} + \imath \frac{sin\theta(r^2 - \lambda^2)}{r(cos^2\theta - sin^2\theta)}$$

➜ **En variant le paramètre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, on obtient, pour $\lambda = 1$, l'image du cercle dans l'espace z**

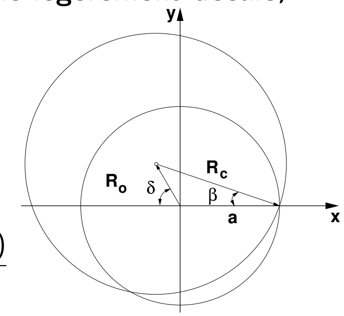




Le paramètre λ contrôle l'excentricité de la conique.

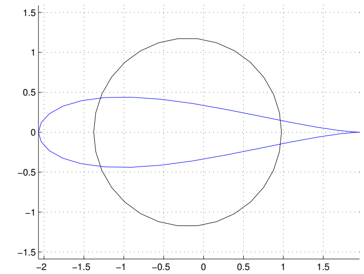
➜ **En choisissant w comme courbe, un cercle légèrement décalé,**

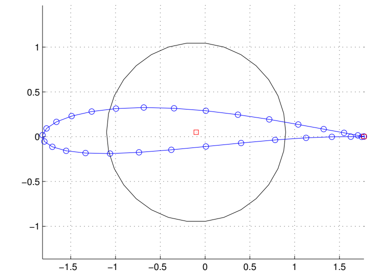
$$\begin{aligned} w &= re^{\imath\theta} + R_o(-cos\delta + \imath sin\delta) \\ &= (rcos\theta - R_o cos\delta) + \imath(rsin\theta + R_o sin\delta) \\ &= x + \imath y \end{aligned}$$



On substitue u et v dans

$$z(w) = \frac{u(u^2 + v^2 + \lambda^2)}{(u^2 - v^2)} + \imath \frac{v(u^2 + v^2 - \lambda^2)}{(u^2 - v^2)}$$

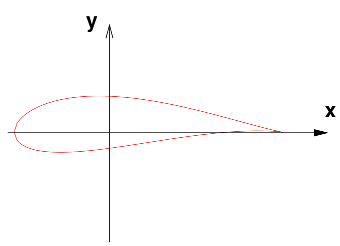


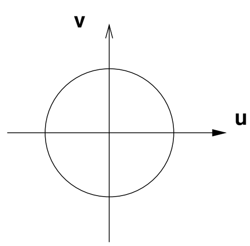


Une variante de la transformation de Joukowsky permet un contrôle sur les caractéristiques du profil :

$$\frac{z + ka}{z - ka} = \left(\frac{w + a}{w - a}\right)^k$$

et, transforme un cercle dans le plan w en un profil de corde a dans le plan z .



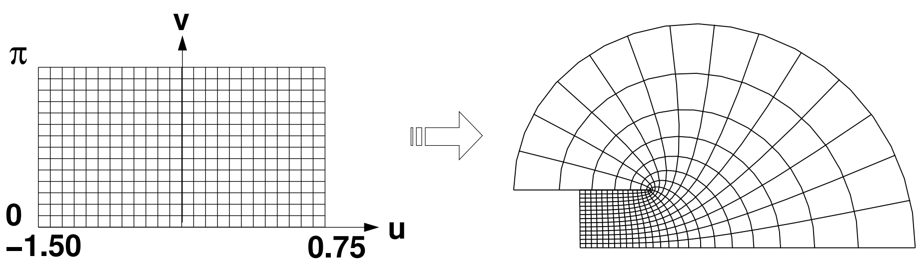


où $k = \frac{2\pi - \delta}{\pi}$ représente les paramètres du profil et δ est l'angle entre deux arcs de cercle au bord de fuite.

La transformation $z = e^w + w$

Un autre exemple remarquable transforme les deux demi-droites dans le plan w en deux demi-droites superposées dans le plan z :

$$v = \pi \left\{ \begin{array}{lll} u & \leq & 0 \\ u & \geq & 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad y = 1 \left\{ \begin{array}{lll} x & \leq & 0 \\ x & \leq & 0 \end{array} \right.$$



Géométriquement, la droite $v = \pi$ est pliée sur elle-même, au point $(u = 0, v = \pi)$ vers la gauche.

Cette transformation envoie l'espace (u, v) vers l'espace (x, y). En substituant la relation d'Euler,

$$e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath \sin\theta,$$

dans $z = e^w + w$ on obtient,

$$z = x + \imath y = e^u \cos v + u + \imath(e^u \sin v + \imath v)$$

avec ses parties réelle et imaginaire :

$$x = e^u \cos v + u$$
$$y = e^u \sin v + v$$

Pour transformer la droite $v = v_0$ du plan (u, v) vers le plan (x, y), on remplace v par v_0. Ce qui donne :

$$x = e^u \cos v_0 + u$$
$$y = e^u sin v_0 + v_0$$

On élimine la variable u en l'isolant dans l'équation de y,

$$u = \ln \frac{y - v_0}{\sin v_0}$$

et on substitue dans l'équation de u,

$$u = \frac{v - y_0}{\sin y_0} \cos y_0 + \ln \frac{v - y_0}{\sin y_0}$$

On remarque que cette expression est indéterminée si le dénominateur $\sin v_0$ est nul, ce qui correspond à $v_0 = m\pi$ pour $m = 0, 1, 2, \ldots$.

$\boxed{m \text{ est pair}}$

On a alors :

$$\begin{array}{lll} x & = & e^u + u \\ y & = & v_0 \end{array}$$

C'est une droite $y = v_0$ avec x variant de moins l'infini à plus l'infini. En prenant $m = 0$, alors $v_0 = 0$ se transforme en la droite $y = 0$.

$\boxed{m \text{ est impair}}$

Cela donne :

$$\begin{array}{lll} x & = & -e^u + u \\ y & = & v_0 \end{array}$$

On a toujours une droite, mais la variation de x atteint un extremum à $u = 0$, donc à $x = -1$. En fait, il s'agit d'une demi-droite allant de moins l'infini à $x = -1$.
On peut interpréter ce cas comme la droite $v = v_0$ du plan (u, v) étant pliée à $x = -1$.

Avec $m = 1$, $v_0 = \pi$ se transforme en la demi-droite $y = \pi$ de moins l'infini à $x = -1$.

La deuxième famille de courbes peut être trouvée en posant la droite $u = u_0$ dans le plan (u, v). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &= e^{u_0} \cos v + u_0 \\ y &= e^{u_0} \sin v + v \end{aligned}$$

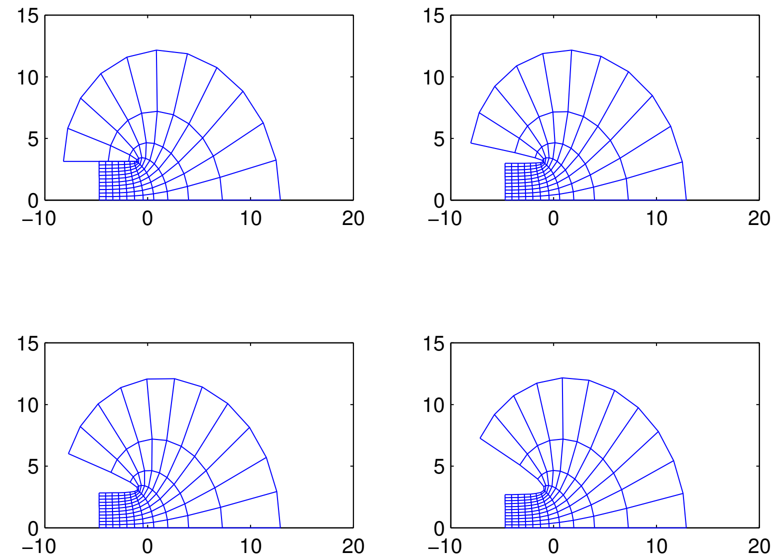
On isole v dans la première équation,

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{x - u_0}{e^{u_0}}\right)$$

et on remplace dans la deuxième :

$$y = e^{u_0} \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{x - u_0}{e^{u_0}}\right)\right) + \cos^{-1}\left(\frac{x - u_0}{e^{u_0}}\right)$$

Cette équation est définie seulement pour les valeurs d'argument $\frac{x-u_0}{e^{u_0}}$ valides dans le cosinus inverse, de -1 à 1, donc sur la plage $-e^{u_0} + u_0$ à $e^{u_0} + u_0$.



Critique

➜ **Les transformations algébriques :**

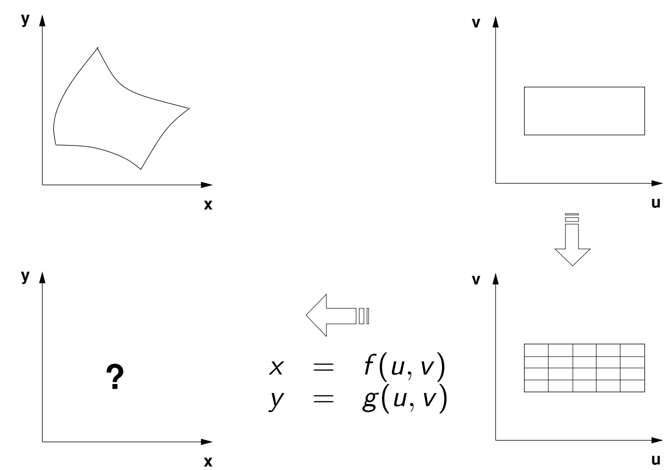
- en général, ne sont pas des maillages curvilignes, et nécéssitent un raccordement du maillage frontière (1-d) avec le maillage intérieur (quadrangles/triangles) par l'insertion de mailles triangulaires ;
- strictement parlant, sont des **maillages hybrides** (non structurés) sur le plan des opérations informatiques et des structures de données ;
- perdent les avantages des maillages structurés.

➜ **Les transformations conformes :**

- sont curvilignes, efficaces et de bonne qualité ;
- préservent les angles entre deux courbes, ce qui permet des maillages orthogonaux ;
- à cause de leur origine mathématique, ce type de transformation se limite à deux dimensions et par conséquent, exclu la possibilité de maillages en trois dimensions.

➜ **Ces approches sont limitées quant à la possibilité de mailler des géométries de formes diverses.**

Le probléme de chercher une transformation telle qu'un rectangle dans l'espace paramétrique soit transformé sur les frontières d'un domaine physique quelconque est mal posé car f et g ne disposent d'aucunes informations sur la géométrie.



$$\begin{aligned} x &= f(u, v) \\ y &= g(u, v) \end{aligned}$$

On doit introduire la discrétisation des frontières physiques vers le rectangle paramétrique, et remplacer les transformations algébriques f et g par un modèle de maille : interpolant transfini ou système d'équations différentielles.