
GENERATION DE MAILLAGES

Une introduction par la pratique

Génération de maillages :

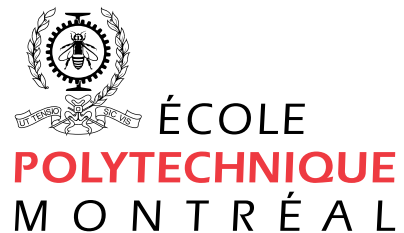
Une introduction par la pratique

RICARDO CAMARERO

Département de génie mécanique

École Polytechnique de Montréal

10 janvier 2024]



PRÉFACE

0.1 Préambule

Ce cours présente les principes fondamentaux et méthodologiques de la génération de maillages. Ce nouveau domaine d'activité en science et en génie, issu de l'essor de la simulation numérique, fait le lien entre la modélisation géométrique et les résolveurs d'équations. Encore récents dans leurs développements, ces fondements scientifiques font l'objet de nombreuses recherches ; de sorte que l'enseignement de cette matière pose plusieurs défis. Contrairement aux disciplines bien établies, le contenu est encore mal défini à cause des progrès rapides et de l'évolution constante des techniques.

Jusqu'à récemment, la génération de maillage était restreinte à quelques spécialistes qui se formaient par eux-mêmes, sur le tas, à partir d'articles et de communications de recherche. Avec la généralisation du calcul scientifique, les usagers proviennent dorénavant d'une grande variété de domaines, avec des formations et des attentes diverses vis-à-vis cette nouvelle discipline. En plus, l'utilisation des maillages intervient plus tôt dans la carrière d'un ingénieur ou scientifique, d'où la nécessité d'une approche plus formelle et rigoureuse, qui, tout en conservant sa finalité pratique, assure une formation de niveau universitaire. Finalement, la nature même de cette matière amène la plupart des usagers qui en font une forte utilisation à acquérir des connaissances et des d'habiletés qui sont non traditionnelles par rapport à la provenance des domaines d'application. Ce qui pose le délicat problème du niveau de compétence attendu de la part d'un étudiant. Nous allons tenter de positionner cette formation par rapport à cet ensemble de questions, sachant que le contenu et l'approche pédagogique demeureront en évolution.

Cette formation s'adresse aux ingénieurs et scientifiques actifs dans l'application des techniques numériques pour la simulation de problèmes caractérisés par des modèles complexes d'équations aux dérivées partielles nécessitant des techniques numériques pour leur résolution. On vise en premier lieu les étudiants aux cycles supérieurs qui doivent intégrer cette technologie très tôt dans leur démarche de chercheur.

0.2 Rôle du maillage dans le calcul appliqué

Le contexte dans lequel se situe cet enseignement est celui de l'utilisation efficace des outils du calcul appliqué, logiciels de recherche ou commerciaux, qui repose sur une bonne intégration du volet génération de maillage et notamment sur le transfert des informations pertinentes entre le modéleur géométrique et le résolveur.

La solution d'un problème par simulation numérique repose sur la discrétisation, étape fondamentale, qui consiste à transformer un problème dans un espace continu en son équivalent dans un espace discret. Ce procédé est appliqué aux équations différentielles pour la physique du phénomène, ainsi qu'à la géométrie qui borne le domaine de calcul pour l'application des conditions frontières. Le résultat de cette discrétisation est un système d'équations algébriques et un maillage qui est le support géométrique servant aux schémas numériques appliqués aux équations différentielles du problème, ainsi qu'aux conditions frontières.

La génération de maillage est l'ensemble des méthodes utilisées pour discrétiser l'espace ou un domaine pour fins de calculs, et leur étude sera l'objet de ce cours.

0.3 Matière

On vise à établir un contenu qui soit un ensemble pratique, complet et générique de sujets dans un contexte de formation en science et en ingénierie ; pratique, dans la mesure où il reflète l'utilisation moderne de cette technologie ; complet, dans la mesure où il couvre les sujets d'intérêt avec assez de détail pour pouvoir en faire une mise en oeuvre ; universel, dans la mesure où la présentation est générique pour être applicable à une grande variété de disciplines du génie et facilement adaptable à des applications variées.

Le contenu thématique générique (Tableau 1) d'une formation en maillage retenu dans ce cours comprend deux volets ; les sujets reliés au contexte de la simulation numérique et les sujets ayant trait aux techniques de maillage proprement dit, ainsi que leur mise en oeuvre sur le plan informatique.

0.4 Approche

On suppose que cette matière est nouvelle pour l'étudiant et qu'il est intéressé par les enjeux techniques de la simulation numérique. On aborde la matière par des exposés des concepts fondamentaux plutôt que la présentation de sujets avancés. De façon générale, on vise l'acquisition de concepts et de connaissances plutôt que des présentations pour spécialistes. Le cours est caractérisé par une approche pratique, et comprend :

- une présentation sommaire du contexte de la simulation numérique ;

<ol style="list-style-type: none"> 1. Contexte de la simulation Numérique <ol style="list-style-type: none"> 1.1. Modélisation géométrique 1.2. Visualisation et Environnement informatique 2. Maillages <ol style="list-style-type: none"> 2.1. Structurés : <ul style="list-style-type: none"> — méthodes algébriques : maillages conformes, transfinis — méthodes EDP : syst'emes elliptiques, concentration de mailles 2.2. Non-structurés : <ul style="list-style-type: none"> — méthode de Delaunay, retournement d'arêtes — avance de front 2.3. Hybrides : <ul style="list-style-type: none"> — décomposition spatiale : multiblocs
--

TABLE 1 – Organisation du contenu

- une introduction générale aux divers types de maillages et leurs caractéristiques ;
- une exposition détaillée des principes élémentaires et des fondements mathématiques des différentes techniques de génération de maillages ;
- le développement d'une méthodologie couvrant les aspects numériques ainsi qu'informatiques.

L'approche pédagogique repose sur les éléments suivants :

- les concepts fondamentaux plutôt que des résultats de recherche ;
- analogies pour compléter ou motiver des démonstrations ;
- traitement détaillé des idées générales en vue d'une mise en oeuvre informatique ;
- pas de revue bibliographique minutieuse.

0.5 Objectifs de formation

Le contenu et l'approche pédagogique de ce cours sont basés sur les fonctions essentielles de la simulation numérique dans un contexte d'applications en ingénierie. La génération de maillage n'est pas une discipline fondamentale, mais plutôt une technique qui vient en support au calcul scientifique. Ce qui implique des connaissances et aptitudes qui sont généralement en dehors des compétences requises par le domaine d'application proprement dit. En conséquence, l'expérience de formation sera cadrée

par deux objectifs : acquérir un ensemble toujours croissant de connaissances techniques en maillage que l'étudiant doit maîtriser, et élargir l'éventail des savoirs-faire et habilités personnelles en réalisation et mise en oeuvre d'algorithmes de maillage.

À la fin du cours, il est attendu de l'étudiant qu'il apprécie le rôle et le positionnement du maillage dans la démarche globale de résolution de problèmes, qu'il connaisse et comprenne les différentes techniques courantes de maillage, qu'il puisse contribuer au développement d'application de ces techniques, et de le faire à l'intérieur de cadres variés, soit en recherche (nouveaux algorithmes...), soit dans l'utilisation de logiciels du commerce (application, choix d'un logiciel...).

Implicitement, une dernière exigence est que l'étudiant à la fin du cours doit être capable d'aborder la génération de maillages avec maturité et discernement. C'est -à-dire qu'il aura acquis des connaissances et des aptitudes dans la génération de maillages qui lui permettront :

- d'accéder et de comprendre la littérature technique et commerciale du domaine ;
- de connaître et de comprendre les principales méthodes utilisées dans ce domaine, ainsi que leurs limites ;
- de concevoir et de réaliser des applications simples.

0.6 Retombées d'apprentissage

En s'inspirant de la taxonomie de Bloom du domaine de la pédagogie, on élabore une échelle de compétence (Tableau 2) conçue pour faire correspondre cinq paliers avec des niveaux d'activités, qui s'apparent au développement progressif des habilités chez l'ingénieur professionnel, allant de l'apprentis au dirigeant supérieur.

1	Avoir fait l'expérience de ou avoir vu
2	Être capable de participer à et de contribuer à
3	Être capable de comprendre et d'expliquer
4	Avoir l'habilité de pratiquer ou de mettre en oeuvre
5	Être capable de diriger ou d'innover dans

TABLE 2 – Échelle de compétence basée sur les activités selon Bloom

En adoptant un niveau de compétence entre trois à quatre, on établit un certain équilibre entre l'acquisition de connaissances techniques et le développement d'habilités en réalisation. Cet ensemble, contenu et objectifs, s'appuyant sur la pratique contemporaine dans le domaine du maillage, nous apparaît clair et cohérent. Cette approche vise à combler le fossé entre une formation universitaire et les besoins de la pratique industrielle.

Table des matières

0.1	Préambule	i
0.2	Rôle du maillage dans le calcul appliqué	ii
0.3	Matière	ii
0.4	Approche	ii
0.5	Objectifs de formation	iii
0.6	Retombées d'apprentissage	iv
1	Introduction	1
1.1	Historique	1
1.2	Géométrie et topologie d'un maillage	2
1.2.1	Les systèmes de coordonnées	4
1.2.2	Maillages à frontières immergées	10
1.2.3	Maillages curvilignes	12
1.2.4	Maillages non-structurés	14
1.3	Formes des éléments/cellules	15
1.4	Rôle et Classification des maillages	17
2	Maillages Curvilignes	21
2.1	Les maillages algébriques	21
2.1.1	Transformations conformes	23
2.1.2	La transformation $z = w^2$	24
2.1.3	La transformation $z = e^w + w$	25
2.1.4	Critique	26
3	Maillages Transfinis	29
3.1	Motivation	29
3.2	Interpolant bivarié de quatre points	30
3.3	Interpolant univarié entre deux courbes	32
3.3.1	Interpolant bivarié entre quatre courbes	35
3.4	Exemples	39
3.4.1	$w = z^2$	39
3.4.2	Domaine circulaire	41
3.5	Limites des maillages transfinis	43

3.6	Aspects topologiques	44
4	Maillages elliptiques	47
4.1	Maillages curvilignes	47
4.2	Modèle d'équations de mailles	48
4.3	Inversion des variables	49
4.4	Équations de mailles elliptiques	52
4.5	Discrétisation des équations de mailles	55
4.6	Choix d'un résolveur	57
	4.6.1 Sur-relaxation successive par point	59
	4.6.2 Surrelaxation par bloc	60
4.7	Algorithme global	63
	4.7.1 Structure de données	63
4.8	Comparaison des maillages transfini et Winslow	65
5	Concentration de Maillages	69
5.1	Motivation	69
5.2	Équations de maille de Poisson	71
5.3	Choix des termes forcés	74
5.4	Concentration des mailles	75
5.5	Synthèse des équations de maille	80
	5.5.1 Exemples	81

