MEC6212: GENERATION de MAILLAGES

Exercice: Interpolation de Lagrange

19 janvier 2023

Énoncé

À partir d'un nombre de points distincts représentant la discrétisation d'une courbe quelconque, on veut construire un interpolant de Lagrange qui approxime cette courbe :

1. Soit un échantillonnage (x_i, y_i) de cette courbe en un nombre nbCNTRL de points ;
2. Écrire une fonction Matlab, `geoLAGRANGE.m` pour approximer ces points, utilisant l'interpolation de Lagrange ;
3. Le protocole d'appel :

   [P,PTS] = geoLAGRANGE(CNTRL,nbCNTRL)

   ou,

   CNTRL : tableau qui contient les coordonnées (x,y) des nbCNTRL points de collocation, structuré de la façon suivante :
   x = CNTRL(1 :nbCNTRL,1) et y = CNTRL(1 :nbCNTRL,2) ;

   nbCNTRL : nombre de points de collocation

   P : tableau qui contient les coordonnées (x,y) des PTS points interpolés, structuré :
   x=P(1 :PTS,1), et y=P(1 :PTS,2)

   PTS : nombre de points interpolés
4. Cette fonction sera appellée d'un programme montré à la Figure 1.

```
switch SEG(iSEG,1)%typeSEG
case 10%---------------------------------------------------------- Bezier
        [P,ptsSEG] = geoBEZIER(PLN(PLN1:PLN2,1:2),SEG(iSEG,3));
        SEG(iSEG,4)= iPT+1;
        SEG(iSEG,5)= ptsSEG;%---------------- nombre de PT sur le segment
        for j=1:ptsSEG-1
              iPT = iPT + 1;
              GEO(iPT,1) = P(j,1);
              GEO(iPT,2) = P(j,2);
        end
case 20%---------------------------------------------------------- spline
        [P,ptsSEG] = geoSPLINE(PLN(PLN1:PLN2,1:2),SEG(iSEG,3));
        SEG(iSEG,4) = iPT+1;
        SEG(iSEG,5) = ptsSEG;%--------------- nombre de PT sur le segment
        for j=1:ptsSEG-1
              iPT = iPT + 1;
              GEO(iPT,1) = P(j,1);
              GEO(iPT,2) = P(j,2);
        end
case 30%---------------------------------------------- polynome de Lagrange
        nbCNTSEG = finCNTSEG -iniCNTSEG +1;
        [P,ptsSEG] = geoLAGRANGE(PLN(iniCNTSEG:finCNTSEG,1:2),SEG(iSEG,3));
        for j=1:ptsSEG-1
              GEO(iPT,1) = P(j,1);
              GEO(iPT,2) = P(j,2);
              iPT = iPT + 1;
        end
otherwise
end
```

FIGURE 1 – Programme appellant pour différents types d'interpolants

1 Interpolation de Lagrange

Soit un ensemble de $n+1$ points,

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

On cherche un polynôme $p_n(x)$, de degré n interpolant ces $n+1$ points (x_i, y_i), de la forme,

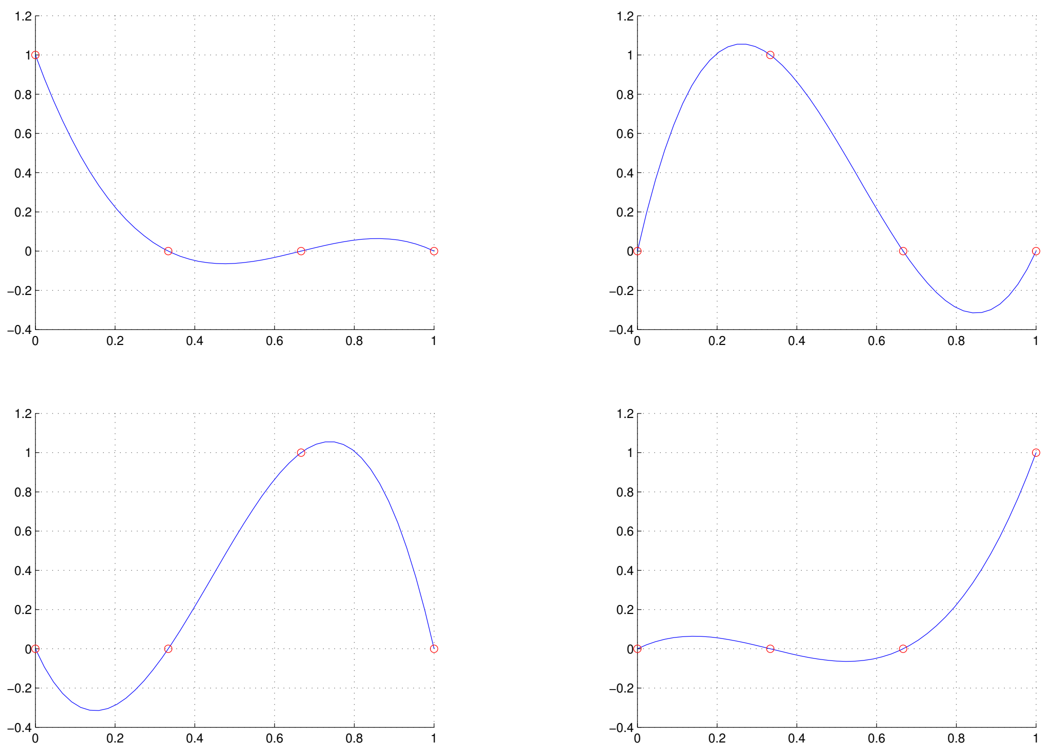
$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x).$$

Cette approximation s'interprêtre comme une combinaison linéaire les polynômes de Lagrange L_k, pondérés par les valeurs des données y_k.

Le k-ème polynôme de Lagrange L_k est **l'unique** polynôme qui vérifie,

x_k	x_0	x_1	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
$L_k(x)$	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0

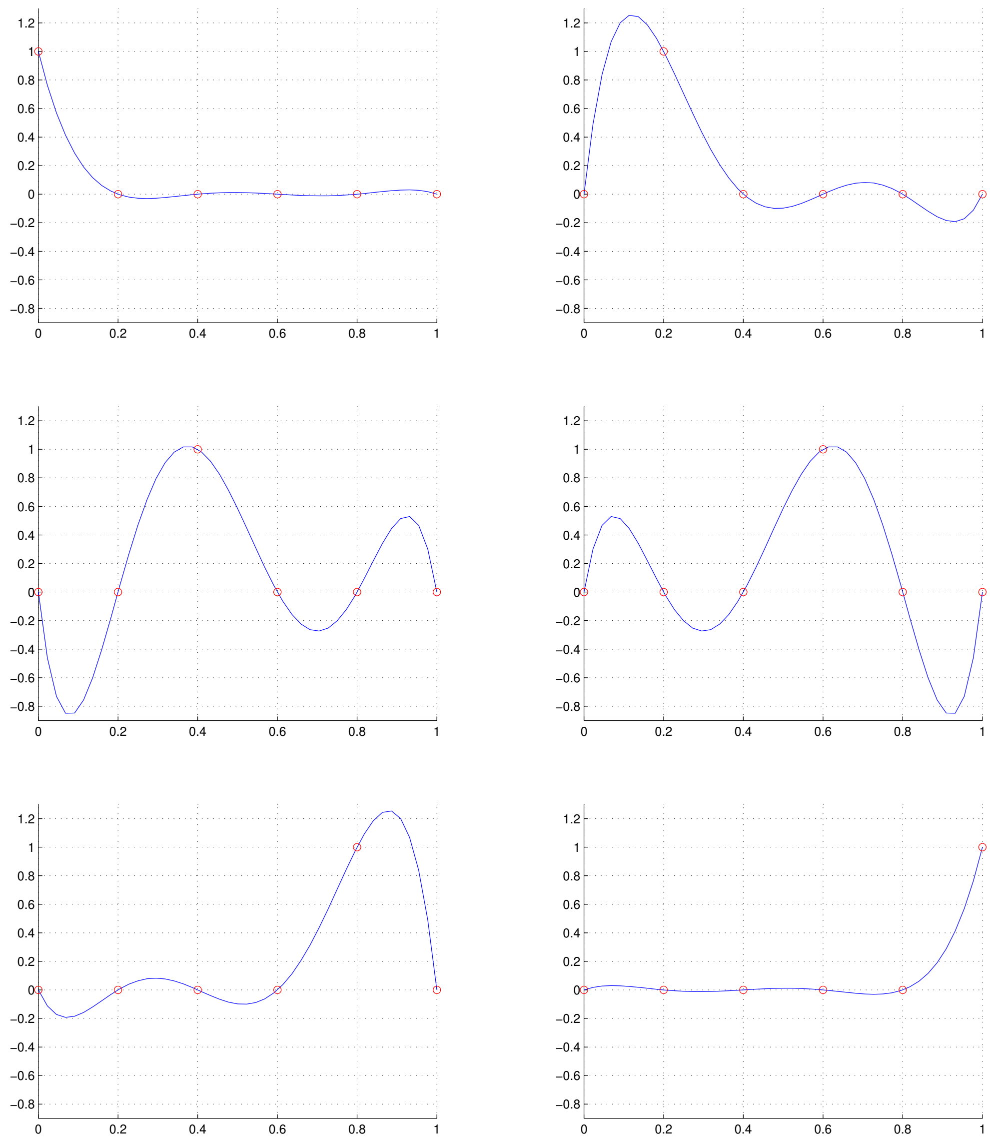
c-à-d, le polynôme L_k s'annule à tous les points de collocation, sauf au point x_k, où il vaut 1. Par exemple, pour les 4 polynômes de degré 3, L_k $k = 1 ... 4$,



$$f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \quad + \quad f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \quad + \quad f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

ou bien, les 6 polynômes de degré 5, $L_k \ k = 1...6$,



On construit les $n+1$ polynômes de Lagrange

$$L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x).$$

à partir de l'écriture

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_k)\ldots(x_k-x_{n-1})(x_k-x_n)}$$

On note que le terme

$$\frac{(x-x_k)}{(x_k-x_k)}$$

est indéterminé. En le retirant du produit, on obtient,

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Ce qui donne,

$$L_k(x_k) = 1 \text{ et pour } i \neq k, L_k(x_i) = 0$$

Finalement, le polynôme d'interpolation devient,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k * L_k(x)$$

2 Paramètrisation

Dans le dévelopement précédent, l'interpolant construit est basé sur une représentation explicite, $y = f(x)$, c-à-d que le paramètre est x.

Dans ce travail, ce qui recherché, en fait, est une représentation paramétrique plutôt qu'explicite. Le paramètre u est arbitraire, et $0 \leq u \leq nbCNTRL - 1$ donne une paramétrization en fonction du numéro k du point, qui est proche de la paramètrisation intrinsèque basée sur la longueur de la courbe.

La fonction `geoLAGRANGE` doit construire une approximation des (x_i, y_i) distribués en fonction d'un paramètre $0 \leq u \leq uFin$. Alors $P(x(u), y(u))$ s'exprime,

$$\begin{aligned} x(u) &= \sum_{k=0}^{n} x_k * L_k(u) \\ y(u) &= \sum_{k=0}^{n} y_k * L_k(u) \end{aligned}$$

où les polynômes $L_k(u)$ sont semblables aux $L_k(x)$, mais où le paramètre x est remplcé par u.

```
function [P,PTS] = geoLAGRANGE(CNTRL,nbCNTRL)
%------------------------------------------------------------------------
%   Interpolant de Lagrange de degre nbCNTRL-1, echantillonne sur
%   U(1)= 0 =< u =< nbCNTRL-1=U(nbCNTRL) avec les nbCNTRL points de
%   collocation CNTRL ==>(x,y), et dU uniforme.
%------------------------------------------------------------------------
PTS=20;%---------------------------------------- nombre de points echantillonnes
nbINTRVL=nbCNTRL-1;%------------------------------ parametrisation de la courbe
dU= double(nbINTRVL)/(PTS-1);
U=(0:double(nbINTRVL));
P(1,1:2)=CNTRL(1,1:2);%------------------------------------ points en extremites
P(1,3)=0;%---------------------------------------------------------parametre u debut
P(PTS,1:2)=CNTRL(nbCNTRL,1:2);
P(PTS,3)=U(nbCNTRL);%----------------------------------------------parametre u fin
u=0;
%------ subdivise en un nombre specifie de points avec repartition uniforme
for iPTS=uint16(2):PTS-1
    u=u+dU;
    P(iPTS,1:3)= [0 0 u];%----- (x,y) du point correspondant au parametre u
    for i=1:nbCNTRL
        L=1.;
        for j=1:nbCNTRL
            if (j~=i)
                L= L*(u-U(j))/(U(i)-U(j));
            end
        end
        P(iPTS,1:2) = P(iPTS,1:2) + L*CNTRL(i,1:2);
    end
end
```

FIGURE 2 – Construction de l'interpolant sous forme paramétrique uniforme

La Fig. 2, montre un exemple de fonction qui calcule une approximation de Lagrange qui prend en arguments,

CNTRL : tableau qui contient les coordonnées (x,y) des nbCNTRL points de collocation, structuré :

x = CNTRL(1 :nbCNTRL,1) et y = CNTRL(1 :nbCNTRL,2) ;

nbCNTRL : nombre de points de collocation

et retourne, les PTS points de l'interpolant, sous forme du tableau P,

P : tableau qui contient les coordonnées (x,y) des PTS points interpolés, structuré :

x=P(1 :PTS,1), y=P(1 :PTS,2) et u=P(1 :PTS,3)

PTS : nombre de points interpolés

3 Paramétrisation quelconque

Dans l'exemple de la Section précédente, la fonction,

[P,PTS] = geoLAGRANGE(CNTRL,nbCNTRL)

retourne $PTS = 20$ points uniformement répartis sur l'intervalle.

L'objectif de cet exercice est de construire une approximation polygonale $P(1 : nbPT, 1 : 3)$ de $nbPT$ points pour la courbe $(x(t), y(t), t)$ où la paramétrisation t est fonction de la courbure, tel qu'illustré à la Fig. 3.

On utilisera comme critère, la distance entre le point milieu d'un segment $PT_1 - PT_2$ du polygone et le point milieu du segment curviligne approximé (en pointillé). C'est-à-dire, pour chaque segment du polygone, la distance entre les points A et B sera inférieure à une valeur cible donnée. Ceci est équivalent à la courbure.

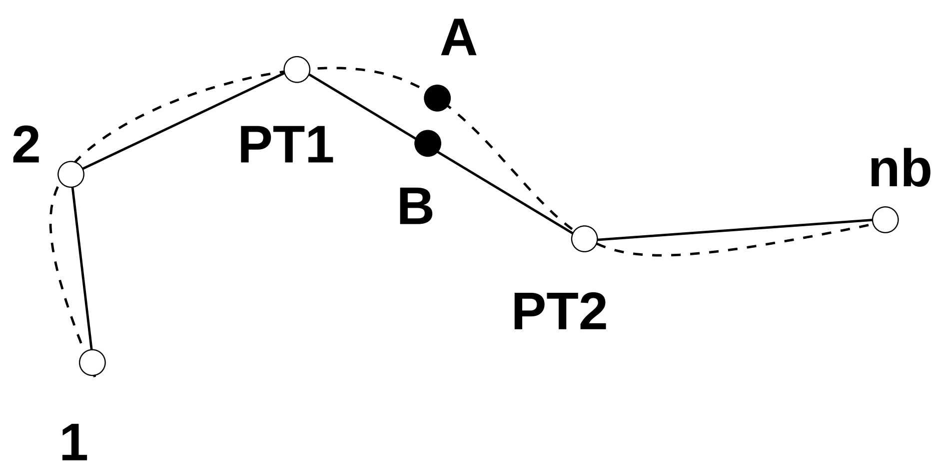


FIGURE 3 – Critère de la paramétrisation

$$L_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

où la position P_A est obtenue par :

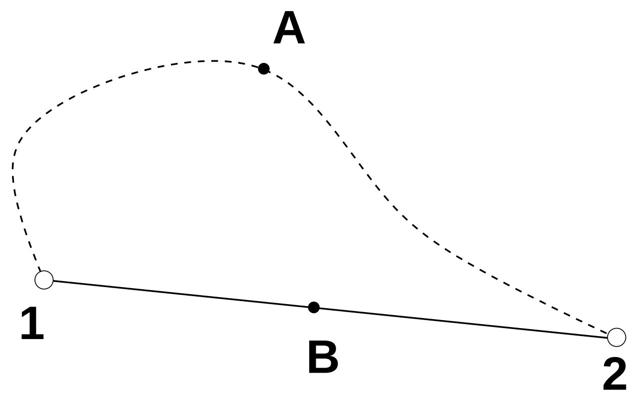
$$\begin{aligned} x_A &= f(t_A) \\ y_A &= g(t_A) \end{aligned}$$

et la valeur du paramètre $t_A = .5 * (t_1 + t_2)$. Les coordonnées du point P_B à mi-chemin du segment sont obtenues par,

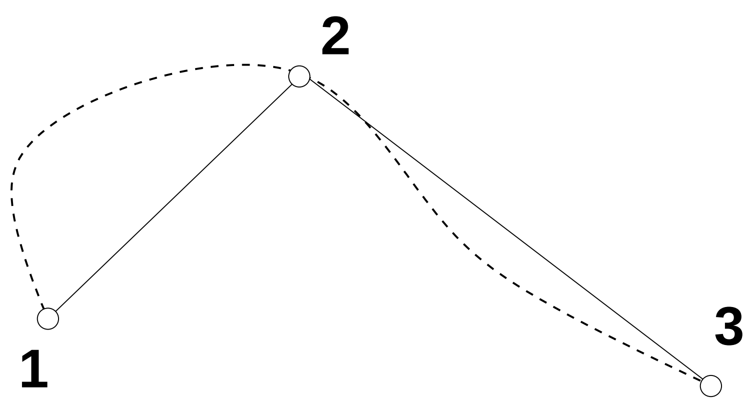
$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{2}(x_{pt1} + x_{pt2}) \\ y_B &= \frac{1}{2}(y_{pt1} + y_{pt2}) \end{aligned}$$

Le point de départ de cet algorithme de subdivision binaire est le segment $1-2$ reliant les extrémités de la courbe comme illustré à la Fig. 4(a).

Visuellement, on constate que c'est une approximation grossière. Alors, on subdivise l'intervalle en introduisant le point A dans le polygone approximant, qui devient $1-2-3$



(a) Test 1er Seg

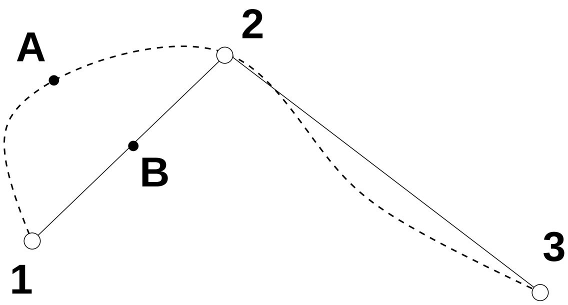


(b) 1ème subdivision

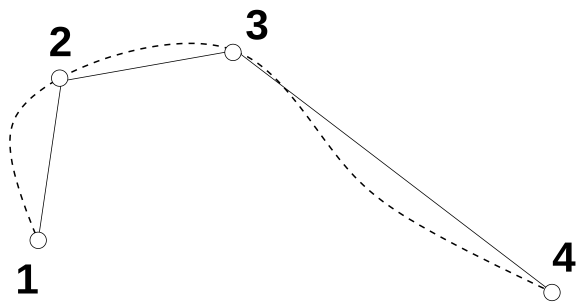
FIGURE 4 – Intervalle de départ

Pour chaque segment du polygone d'approximation, on doit calculer si la condition est vérifiée.

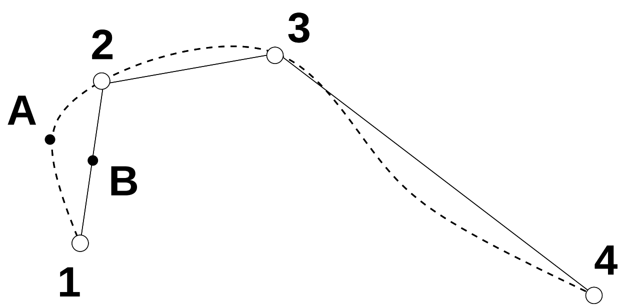
A la Fig. 5(a), on applique le test sur le segment $1-2$, et comme le critère n'est pas vérifié, on divise l'intervalle et on introduit le point A dans le polygone, qui alors devient $1-2-3-4$.



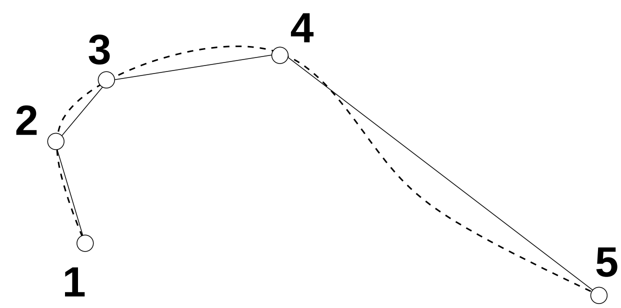
(a) Test 1er Seg



(b) 2ème subdivision



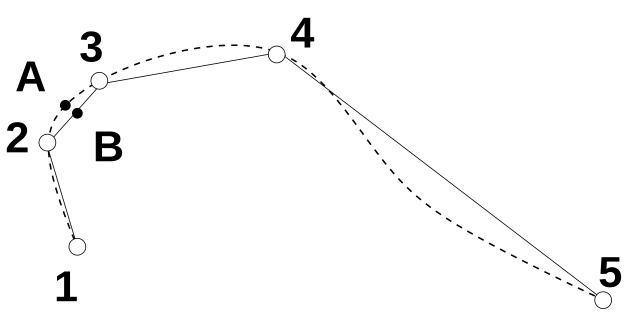
(c) Test 1er Seg



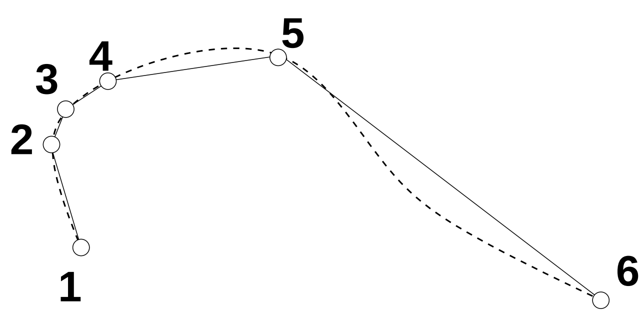
(d) 3ème subdivision

FIGURE 5 – Algorithme de subdivision binaire appliqué au 1er segment, 1

On répète ce procédé de subdivision du segment 1, jusqu'à ce que le critère soit vérifié, comme illutré, par exemple, à la Fig. 5(d). Alors, le test est appliqué au segment suivant, 2, Fig. 6(a), donnant le poygone $1-2-3-4-5-6$.



(a) Test 4ème Seg



(b) 4ème subdivision

FIGURE 6 – Algorithme de subdivision binaire appliqué au segment 2

Après qu'un segment vérifie le critère, on passe au suivant, et ainsi de suite jusqu'au dernier segment, comme décrit dans le programme à la Fig. 7.

```
function [P,PTS] = geoLAGRANGE(CNTRL,nbCNTRL)
%   Interpolant de Lagrange de degre nbCNTRL-1, echantillonne sur
%      U(1)= 0 =< u =< nbCNTRL-1=U(nbCNTRL)
%   avec les nbCNTRL points de collocation CNTRL ==>(x,y)
%-------------------------------------- Intervalle initial ------------------------
PTS=2; PT1=1; PT2=2;
U=(0:double(nbCNTRL-1));%------------------------ parametrisation de la courbe
P(1,1:2)=CNTRL(1,1:2);
P(1,3)=0;%--------------------------------------------------------parametre u debut
P(2,1:2)=CNTRL(nbCNTRL,1:2);
P(2,3)=double(nbCNTRL-1);%----------------------------------------parametre u fin
%--------------- subdivise tant que le critere geometrique n'est pas verifie
while PT1 < PTS
    Q(1:3) = (P(PT1,1:3)+P(PT2,1:3))/2;%------ Point milieu de l'intervalle
    PTS=PTS+1;
    for iPT=PTS:-1:PT2+1%------------------ decale la discretisation d'un PT
        P(iPT,1:3) = P(iPT-1,1:3);
    end
    %On evalue le point sur le SEG type Lagrange -----------------------------
    u=Q(3);
    P(PT2,1:3)= [0 0 u];%---------------------- Calcule les coordonnnees (x,y)
    %------------------------ du point correspondant au parametre u sur le SEG
    for i=1:nbCNTRL
        L=1.;
        for j=1:nbCNTRL
            if (j~=i)
                L= L*(u-U(j))/(U(i)-U(j));
            end
        end
        P(PT2,1:2) = P(PT2,1:2) + L*CNTRL(i,1:2);
    end
    ecart = (P(PT2,1) - Q(1))^2 +(P(PT2,2) - Q(2))^2;
    if ecart < .00001
        PT1 = PT1+2;
        PT2 = PT1+1;
    end
end
```

FIGURE 7 – Construction de l'interpolant avec répartition adaptée à la courbure.

4 Exercice

Faire cet exercice après la lecture du document **exMARS_geom**.

1. Étudier l'algorithme de la Fig. 7
2. Transcrire dans un fichier matlab, **geoLAGRANGE.m** et remplacer son équivalent **geoLAGRANGE.p** dans **MARS**.
3. Exécuter à partir de l'interface :
   3.1. Construire une polyligne dans le panneau **Construction générale** .
   3.2. Construire une approximation de Lagrange avec le bouton **Lagrange** du panneau **Segments**.
   3.3. Vérifier que le résulat est bien celui attendu.
4. Modifier le critère $ecart$, et analyser visuellement le comportement.
5. Vérifier que le résulat donne bien une répartition concentrée selon la coubure.
6. Peut-on prévoir le nombre de points du polygone final ?
7. Comment modifier l'algorithme de sorte que l'on puisse spécifier le nombre de points du polygone final ?
8. Avec un cercle, la courbure est constante. Vérifier.