COURS

THÉORIE DE LA CIRCULATION

CIV6705

LES FILES D'ATTENTE

(Recueil des acétates utilisées)

par:

K. Baass

Attention: Il n'est pas suffisant de consulter ces acétates. Elles ne remplacent pas les cours et les références bibliographiques choisies pour le cours.

Janvier 2003

LES PHENOMENES D'ATTENTE

- BIBLIOGRAPHIE
- INTRODUCTION
- CLASSIFICATION DES SYSTEMES
- MECANISMES DE SERVICE
- PROCESSUS D' ARRIVEES
- INTENSITE DE TRAFIC, FACTEUR D'UTILISATION FACTEUR DE SATURATION
- LES TYPES DE FILE D'ATTENTE
  - PRINCIPE GENERAL
  - DETERMINISTE
  - STOCHASTIQUE
    - M/M/1
    - M/M/N
    - M/M/ ∞
    - Systèmes avec pertes
    - Pollaczek- Khintchine
- QUELQUES PROBLEMES PARTICULIERS
  - RETARDS AUX CARREFOURS
    - SANS FEUX
    - AVEC FEUX
  - CAPACITE D'UN CARREFOUR SANS FEUX

NOTATION

λ, q — taux d'arrivée (unités/s)

μ, s — taux de service, de départ (unités/s)

ρ, y — facteur d'utilisation, charge

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad \text{et} \quad y = \frac{q}{s}$$

STRUCTURE D'UN PHENOMENE D'ATTENTE

- LA FORME LA PLUS SIMPLE COMPORTE 3 PHASES PRINCIPALES :
  - UNE ARRIVÉE D'UNITES À SERVIR (SOURCE)
  - UNE FILE D'ATTENTE (QUEUE)
  - UN SERVICE
- DANS QUELLES CONDITIONS UN PHÉNOMÈNE D'ATTENTE PEUT-IL ENGENDRER UNE QUEUE ?
  - ARRIVÉES A INTERVALLES REGULIERS ET LES TEMPS DE SERVICE CONST. SI $\lambda > \mu$ IL EST ÉVIDENT QUE LA FILE S'ALLONGE INDÉFINIMENT.
  - L'UNE AU MOINS DES VARIABLES λ OU μ PRÉSENTE UN CARACTÈRE ALÉATOIRE.

LES FILES D'ATTENTE

INTRODUCTION

PROBLEMES A RESOUDRE :

- CONGESTION DU RESEAU
- MINIMISATION DES RETARDS
- DIMENSIONNEMENT DU SYSTEME DE TRANSPORT
- AMELIORATION DU SERVICE

EXEMPLES PARTICULIERS :

- BRETELLES D'AUTOROUTES
- TRAVERSES POUR PIETONS
- POSTE DE PEAGE
- PARC DE STATIONNEMENT, GARAGE
- FEUX DE CIRCULATION
  - CYCLE
  - STOCKAGE TOURNE A GAUCHE

LES QUESTIONS SUIVANTES SE SOULEVENT:

- COMBIEN DE VEHICULES VONT ATTENDRE ?
- QUEL EST LE TEMPS D'ATTENTE ?
- QUELLE EST LA PROBABILITE DE TROUVER UNE PLACE DE STATIONNEMENT LIBRE ?
- COMBIEN DE VOIES OU DE POSTES DE PEAGE FAUT IL PREVOIR ?

LA SOLUTION DE CES PROBLEMES

- SIMULATION
- ANALYSE PAR LA THEORIE DES FILES D'ATTENTE

MISE EN GARDE:

- OUTILS PRATIQUES BASES SUR LA THEORIE ENCORE PEU DEVELOPPES. MATHEMATICIENS CHERCHENT DES APPLICATIONS A DE BELLES SOLUTIONS ET NON PAS DES SOLUTIONS A DES VRAIS PROBLEMES.
- LA THEORIE TRAITE SURTOUT DU REGIME PERMANENT (EN PRATIQUE NOUS SOMMES INTERESSES AU COMPORTEMENT DU SYSTEME EN FONCTION DU TEMPS. λ DEPASSE TEMPORAIREMENT μ)
- CERTAINS PROBLEMES SE RESOLVENT FACILEMENT DE MANIERE APPROX. (GRAPHIQUE) MAIS DEVIENNENT EXTREMEMENT COMPLEXES THEORIQUEMENT.

QUELQUES REMARQUES GENERALES

- LES ARRIVEES DES VEHICULES SE FONT SELON UN CERTAIN DEBIT ET SELON UNE CERTAINE DISTRIBUTION DANS LE TEMPS.

- LES DEPARTS DES VEHICULES SE FONT APRES UN CERTAIN TEMPS D'ARRET. LES INTERVALLES ET LES DEBITS DE DEPART SONT DETERMINES PAR LA CAPACITE DE SERVICE DU GUICHET OU PAR LA CAPACITE PHYSIQUE DE LA ROUTE ET DU CONDUCTEUR.

- DEPENDANT DES ARRIVEES ET DES DEPARTS LE SYSTEME ETUDIE VA ETRE PLUS OU MOINS SATURE.

- DANS CERTAINES CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT SE FORMENT DES FILES D'ATTENTE,

- IL Y A DEUX TYPES DE RETARD :

    - RETARD CAUSE PAR LE SERVICE DANS LE SYSTEME

    - RETARD CAUSE PAR L'ATTENTE DANS LA FILE.

— ON DISTINGUE DEUX SITUATIONS :

- LA CIRCULATION DISCONTINUE

PRESENCE DE CAUSES D'ARRET SYSTEMATIQUE DES VEHICULES TELLES QUE :

→ FEUX DE CIRCULATION

→ INCIDENTS, REDUCTION TEMPORAIRE DE LA CAPACITE

→ SURCHARGE AUX HEURES DE POINTE

→ VARIATIONS CYCLIQUES DES ARRIVEE ET DES DEPARTS

- LA CIRCULATION CONTINUE

AUCUNE AUTRE CAUSE QUE L'EVOLUTION INTERNE DU COURANT DE CIRCULATION N'ENTRAINE L'ARRET DES VEHICULES.

— ON DISTINGUE DEUX REGIMES :

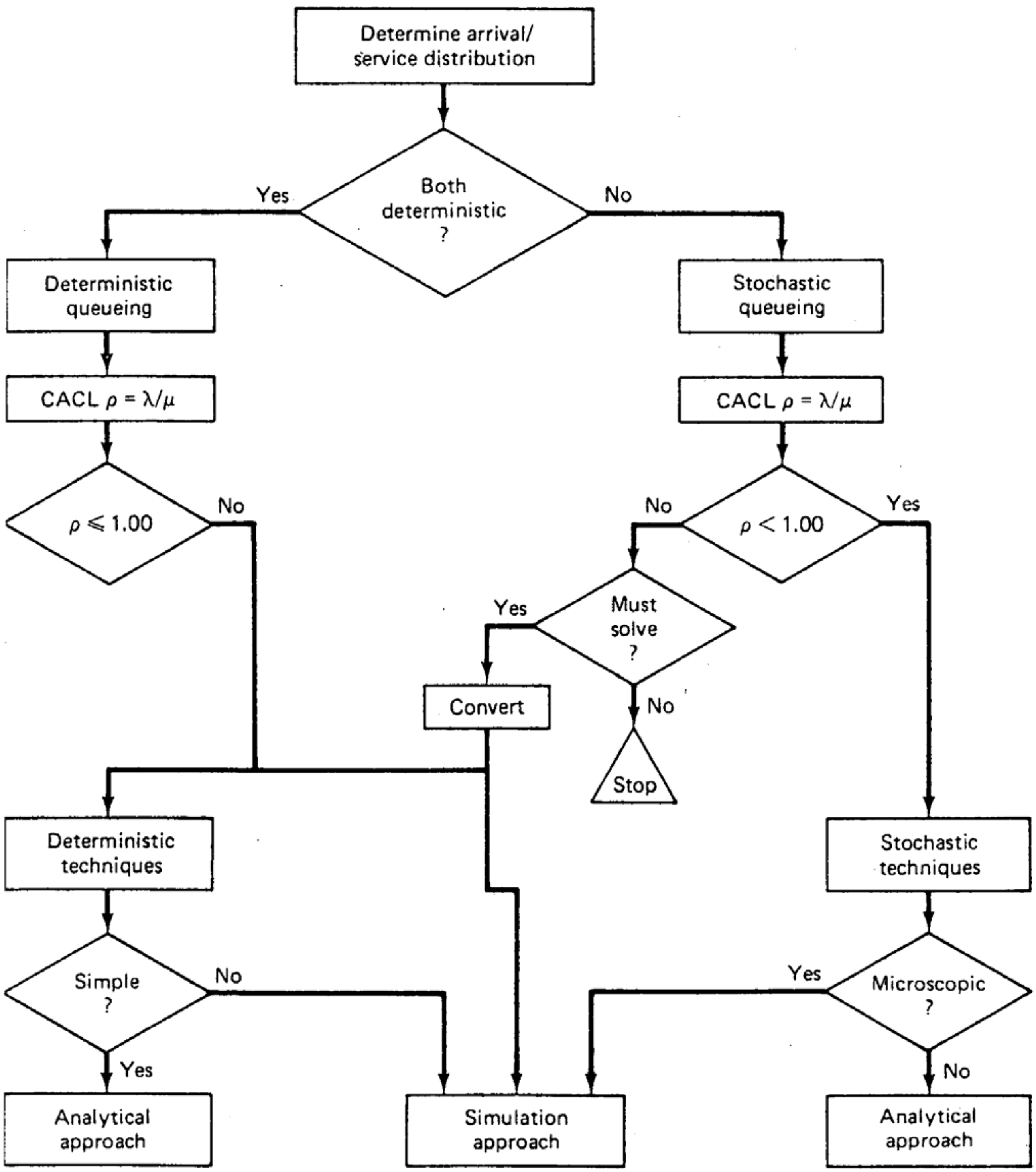
- LE REGIME PERMANENT (STATIONNAIRE)

CE REGIME S'ETABLIT AU BOUT D'UN CERTAIN TEMPS DE FONCTIONNEMENT DU SYSTEME. LES LOIS STATISTIQUES DES ARRIVEES ET DEPARTS RESTENT LES MEMES.

- LE REGIME TRANSITOIRE

LES CONDITIONS D'ARRIVEES ET DE DEPARTS CHANGENT DANS LE TEMPS. DIFFICILE A ANALYSER THEORIQUEMENT.

- LE TRAITEMENT MATHEMATIQUE A ETE LIMITE AUX PROBLEMES DU TYPE "BARRIERE" DONC A UN ELEMENT DISCRET (POSTE DE PEAGE, CARREFOUR, PLACE DE STATIONNEMENT).
- LES CAS CONTINUS (SECTION DE ROUTE OU DE C.D.F. OÙ LA RELATION TEMPS DE PARCOURS/DEBIT EST UN ELEMENT CLE) SONT RESOLUS PAR ANALOGIE AU PROBLEMES DU TYPE BARRIERE.



Flowchart of Queueing Analysis Approaches (MAY, 1990)

LA CLASSIFICATION DES SYSTEMES

LA CLASSIFICATION DES PROBLEMES SE FAIT SELON LES CARACTERISTIQUES DES ARRIVEES, DES DEPARTS, SELON LE NOMBRE DE CANAUX, SELON LA LONGUEUR ADMISSIBLE DE LA FILE D'ATTENTE ET SELON LA DISCIPLINE DES PERSONNES ATTENDANT DANS LA FILE.

$$\boxed{A/B/C : (L/Disc)}$$

A ARRIVEES : MOYENNES ET DISTRIBUTION STATISTIQUE DES ECARTS

B DEPARTS : MOYENNES ET DISTRIBUTION STATISTIQUE DES ECARTS

C NOMBRE DE CANAUX EN SERIE OU EN PARALLELE (1 à ∞)

L LA LONGUEUR MAX. ADMISSIBLE DE LA FILE (1 à ∞)

isc LA DISCIPLINE DES MEMBRES DE LA FILE, PAR EX. PREMIER ARRIVE, PREMIER PARTI.

POUR A ET B ON A :

M : DISTRIBUTION DES ECARTS NEG EXP.

D : ECARTS CONSTANTS (DETERMINISTES)

G : DISTRIBUTION GENERALE DES ECARTS

E_K : DISTRIBUTION ERLANG DES ECARTS AVEC PARAMETRE K.

POUR Disc ON A :

FIFO : FIRST IN - FIRST OUT

SIRO : SERVICE IN RANDOM ORDER

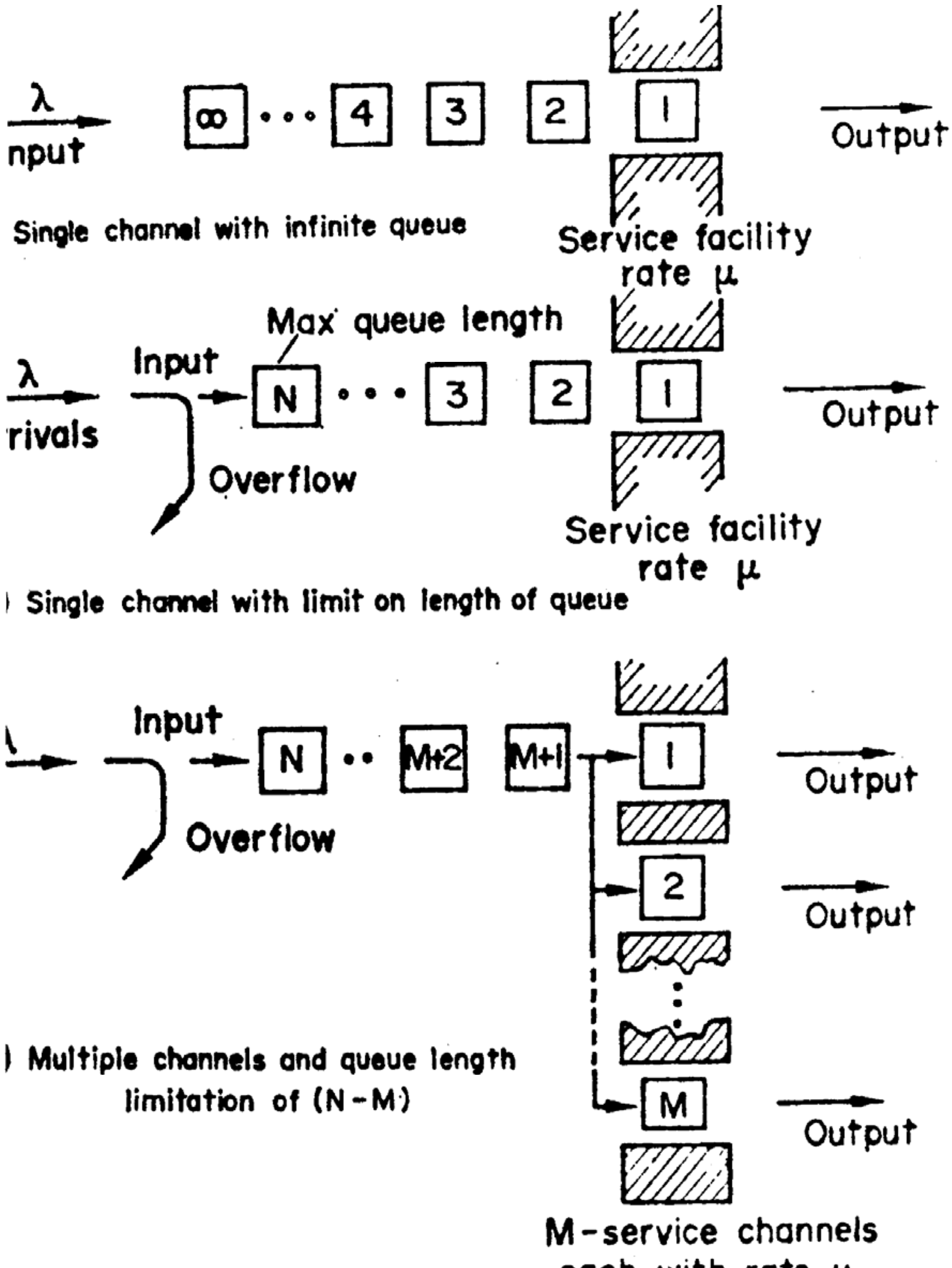
LIFO : LAST IN - FIRST OUT

MPLES EN CIRCULATION ROUTIERE :

UN SEUL CANAL, VOIE OU GUICHET : POSTE DE PEAGE, ENTREES AUX CARREFOURS, ARRET D'AUTOBUS.....

PLUSIEURS VOIES ARRANGEES EN PARALLELE : PARCS DE STATIONNEMENT, PLACES D'ANCRAGE, GARES, TERMINAUX D'AUTOBUS, COUR DE CAMIONNAGE....

ATTENTE D'UN CRENEAU DANS UN COURANT PRIORITAIRE, CARREFOURS SANS FEUX, PIETONS.....



1. Diagrammatic representation of queueing system arrangements

REF. BLUNDEN

Classification Scheme of Probability Distributions Used in Stochastic Queueing Problems[a] (A. MAY, 1990)

Arrival Distribution	Service Distribution			
	Constant	Random	Erlang	Generalized
Constant	Deterministic queueing approach	D/M	D/E	D/G
Random	M/D	M/M	M/E	M/G
Erlang	E/D	E/M	E/E	E/G
Generalized	G/D	G/M	G/E	G/G

[a] D, constant mean value distribution; M, random distribution; E, Erlang distribution; G, generalized distribution.

LE MECANISME DE SERVICE

LE TEMPS DE SERVICE EST LE TEMPS QUI S'ECOULE ENTRE LE DEBUT ET LA FIN DU SERVICE. CE TEMPS SE MESURE ENTRE LES DEPARTS SUCCESSIFS (LORSQU'UNE FILE D'ATTENTE EXISTE QUI DEMANDE CONTINUELLEMENT LE SERVICE)

ON MESURE LA DENSITE DE PROBABILITE ET LA FONCTION DE REPARTITION DES ECARTS DE DEPART AVEC $\overline{T_s}$ ET σ_s^2.

LE DEBIT DE SATURATION OU TAUX DE DEPART OU ENCORE CAPACITE EST

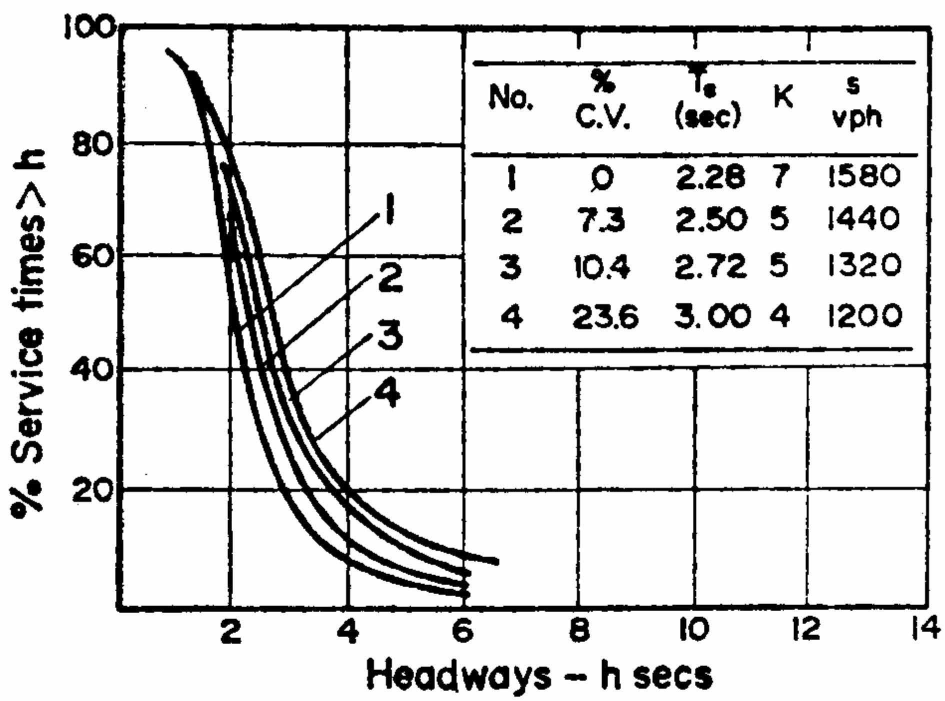
$$\mu = \frac{1}{\overline{T_s}} \quad \text{ou} \quad S = \frac{3600}{\overline{S}} \ (\text{veh/h})$$

DISTRIBUTIONS STATISTIQUES DES ECARTS

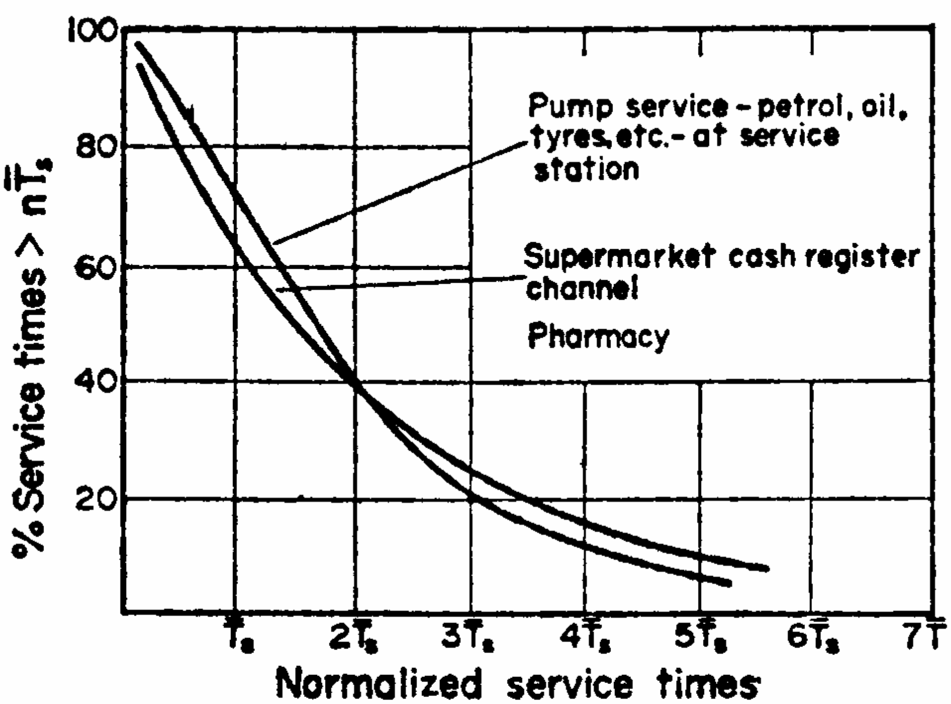
- DÉPEND DU SYSTÈME ETUDIÉ

EX : → TEMPS CONSOMME A UNE POMPE A ESSENCE
EXPONENTIELLE

→ DEPART D'UN CARREFOUR OU D'UN POSTE DE PEAGE
± UNIFORME



(a) Intersection start-line headways
(Hoffman Bvde and 47th St. Richmond, Cal.)



(b) Retail traffic activities – Sydney region

I (a) and (b). Service-time distributions for various types of traffic activity.

LA DISTRIBUTION D'ERLANG PERMET DE BIEN DECRIRE CES DIFFERENTS CAS.

$$\boxed{s(t) = e^{-K\mu t} \sum_{n=1}^{K-1} \frac{(K\mu t)^n}{n!}}$$

si $K=1$ $\quad s(t) = e^{-\mu t}$ DISTR. EXPON.

si $K=\infty$ $\quad s(t) = \bar{\bar{T}}_s$ pour $t < \bar{\bar{T}}_s$ DISTR.

$\quad\quad = 0$ pour $t > \bar{\bar{T}}_s$ CONST.

PEUT ETRE ESTIMEE PAR: $K = \dfrac{\bar{\bar{T}}_s^{\,2}}{\sigma_s^2}$

VALEUR DE K EST EN GENERAL PLUS
INDE POUR LA DISTRIBUTION DES DEPARTS
E POUR LA DISTRIBUTION DES ARRIVEES.

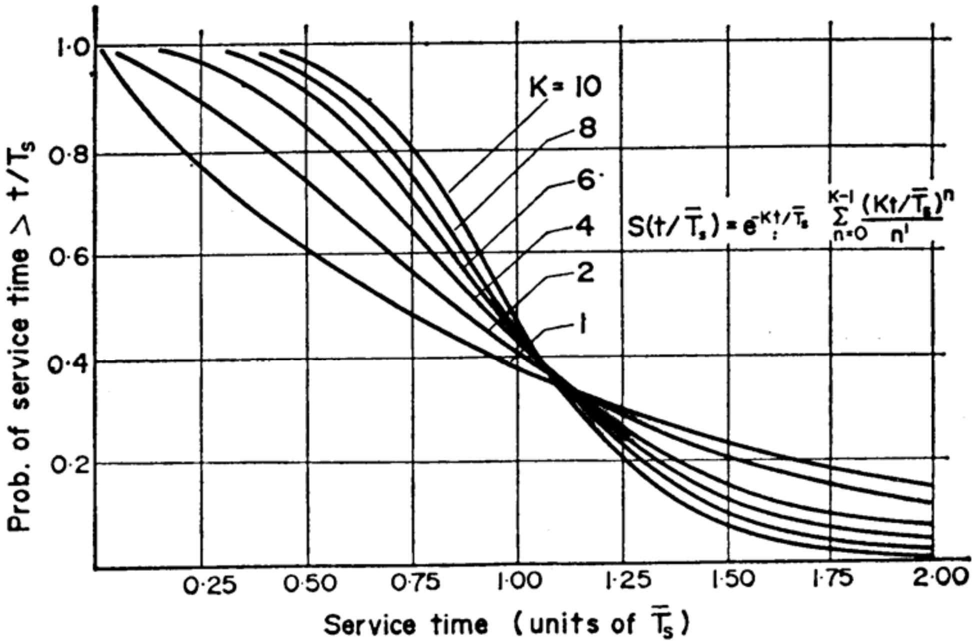


FIG. 3.3. Family of Erlang service-time distributions.

LE PROCESSUS D'ARRIVEE

LES ECARTS ENTRE LES VEHICULES ARRIVANT SONT MESURES EN AMONT DE LA FILE.

LA MOYENNE DE LA DISTRIBUTION EST

$$\bar{T}_a \quad \text{ou} \quad \bar{h}$$

LE DEBIT D'ARRIVEE EST

$$\lambda = \frac{1}{\bar{T}_a} \quad \text{OU} \quad q = \frac{3600}{\bar{h}} \ (\text{véh}/h)$$

LA DISTRIBUTION DE PROBABILITE DES ARRIVEES PEUT ETRE REPRESENTEE PAR UNE FONCTION ERLANG.

SOUVENT ON PEUT SE BASER SUR UNE FONCTION NEGATIVE EXPONENTIELLE (DEPLACEE OU DECOMPOSEE EN VEHICULES LIBRES ET VEHICULES GENES)

$$\boxed{A(t) = e^{-\lambda t}}$$

PRÉSENTATION DU PRINCIPE

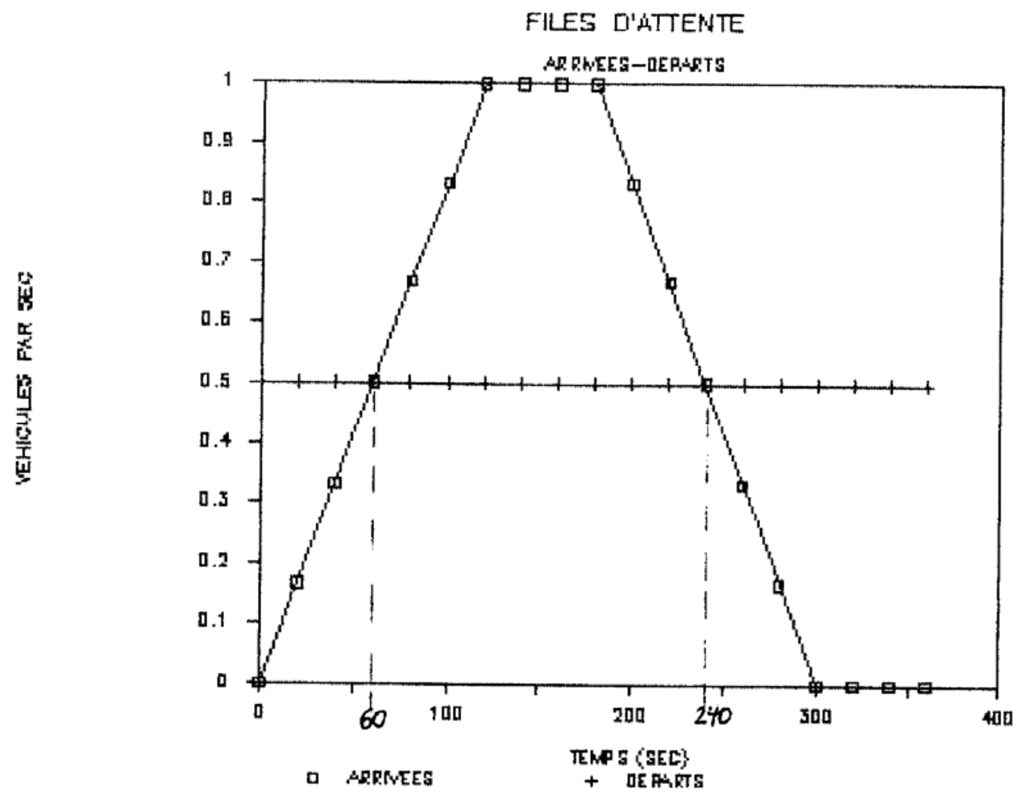
Exemple d'un problème déterministe

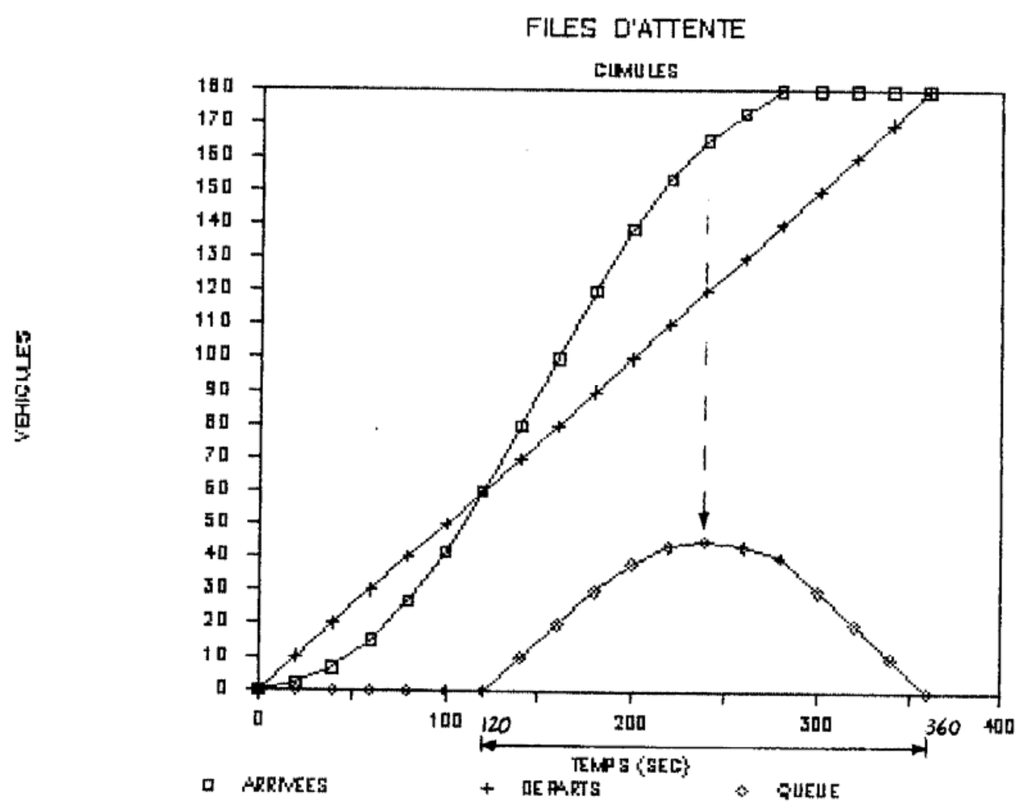
LES FILES D'ATTENTE

temps	arrivees	departs	arrivees cumulees	departs cumules	queue
	a(t)	s(t)	A(t)	S(t)	Q(t)
0	0	0.5	0	0	0
20	0.16666	0.5	1.66666	10	0
40	0.3333	0.5	6.6666	20	0
60	0.5	0.5	15	30	0
80	0.66666	0.5	26.6666	40	0
100	0.83333	0.5	41.6666	50	0
120	1	0.5	60	60	0
140	1	0.5	80	70	10
160	1	0.5	100	80	20
180	1	0.5	120	90	30
200	0.8333	0.5	138.333	100	38.333
220	0.666666	0.5	153.3333	110	43.3333
240	0.5	0.5	165	120	45
260	0.333333	0.5	173.3333	130	43.3333
280	0.166666	0.5	180	140	40
300	0	0.5	180	150	30
320	0	0.5	180	160	20
340	0	0.5	180	170	10
360	0	0.5	180	180	0

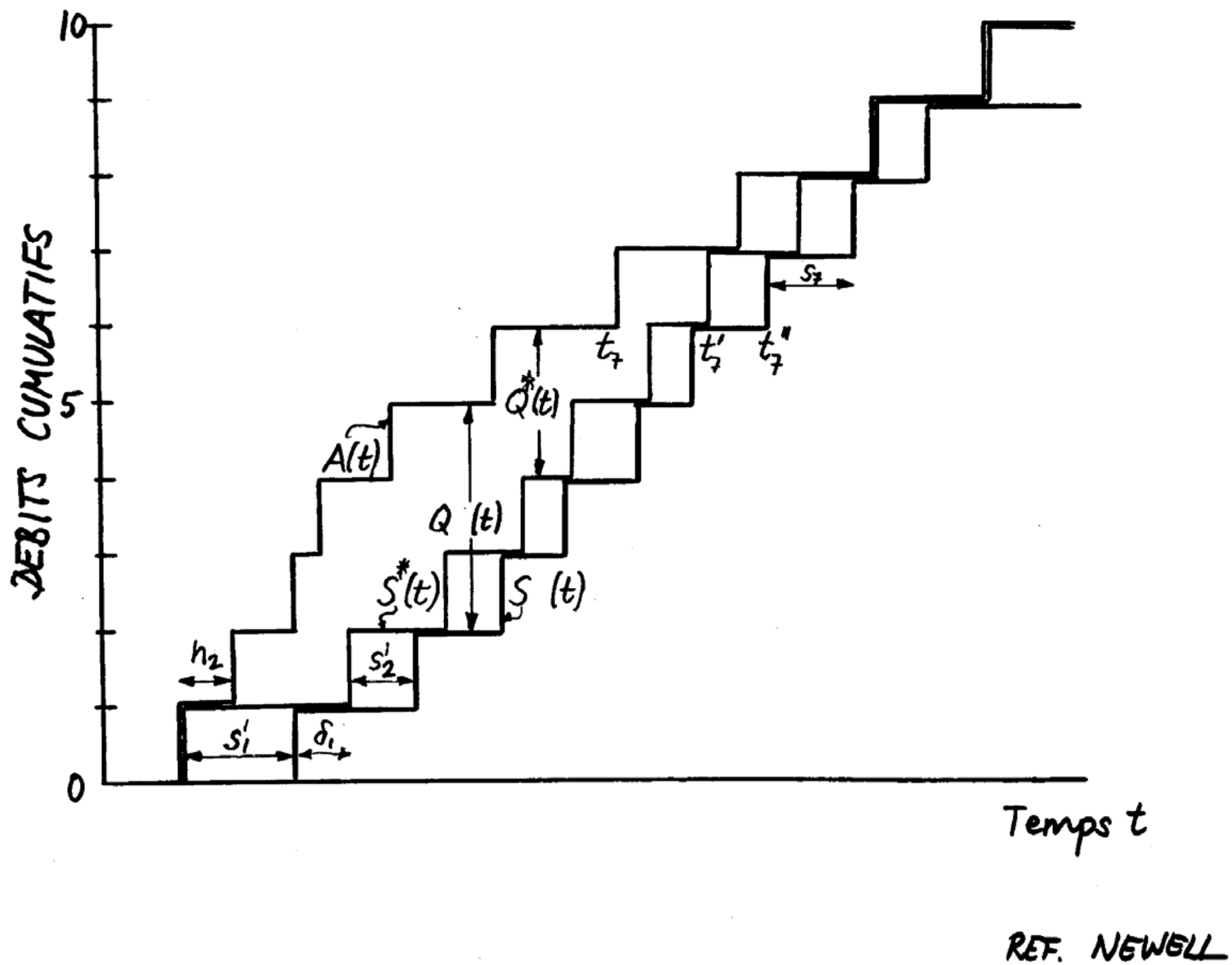
TEMPS	ARRIVEES	ARRIVEES CUMULEES
$0 \le t \le 120$	$a(t) = \frac{1}{120} t$	$A(t) = \int_0^{120} \frac{1}{120} t \, dt$
$120 \le t \le 180$	$a(t) = 1$	$A(t) = \int_{120}^{180} dt + 60$
$180 \le t \le 300$	$a(t) = -\frac{1}{120} t + 2.5$	$A(t) = \int_{180}^{300} \left(-\frac{1}{120} t + 2.5\right) dt + 120$

TEMPS	DEPARTS (CAPACITE)	DEPARTS CUMULES
$0 \le t \le 360$	$s(t) = 0.5$	$S(t) = \frac{1}{2} \int_0^{360} dt$


FILES D'ATTENTE
ARRIVEES—DEPARTS
VEHICULES PAR SEC
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
60
100
200
240
300
400
TEMPS (SEC)
ARRIVEES
DEPARTS


FILES D'ATTENTE
CUMULES
VEHICULES
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
100
120
200
300
360
400
TEMPS (SEC)
ARRIVEES
DEPARTS
QUEUE

ARRIVÉES ALÉATOIRES



$A(t)$: DISTRIBUTION CUMULATIVE DES ARRIVEES

$S^*(t)$: DISTRIBUTION CUMULATIVE D'UNITES QUI ONT COMMENCE LE SERVICE

$S(t)$: DISTRIBUTION CUMULATIVE DES DEPARTS

$Q^*(t)$: LE NOMBRE D'UNITES EN FILE

$Q(t) = A(t) - S(t)$ LE NOMBRE D'UNITES DANS LE SYSTEME

DANS LE CAS FIFO ON A :

s_j' : LE TEMPS DE SERVICE

δ_j : LE TEMPS ENTRE LE MOMENT OU j A ETE SERVIE ET LE MOMENT OU $j+1$ COMMENCE A ETRE SERVIE. (EN GENERAL $\delta = 0$)

LE TEMPS MOYEN PASSÉ EN FILE D'ATTENTE :

$$T = \frac{1}{n} \sum_{j+1}^{j+n} \left(t_k'' - t_k \right)$$

LE TEMPS TOTAL PASSE EN FILE D'ATTENTE POUR LES VEHICULES $j+1$ A $j+n$ EST EGAL A LA SURFACE ENTRE $A(t)$ ET $(S(t)$ ET LES 2 LIGNES HORIZONTALES FORMEES PAR j ET $j+n$

LE CAS DETERMINISTE

BEAUCOUP DE CAS EN PRATIQUE PEUVENT ETRE APPROXIMES PAR UNE DISTRIBUTION UNIFORME DES ARRIVEES ET DES DEPARTS :

IL Y A DIFFERENTS CAS INTERESSANTS OÙ IL Y A DES FILES ET DES RETARDS (MEME SI y (OU ρ) ≤ 1)

- SERVICE INTERROMPU AVEC $y \leq 1$ (FEUX ..)
- INTERRUPTION CAUSEE PAR DES INCIDENTS OU DES ACCIDENTS OU DES REDUCTIONS TEMPORAIRES DE CAPACITE
- SURSATURATION AUX HEURES DE POINTE
- VARIATIONS CYCLIQUES DES DEBITS DES ARRIVEES ET DES DEPARTS

SERVICE INTERROMPU (FEUX)

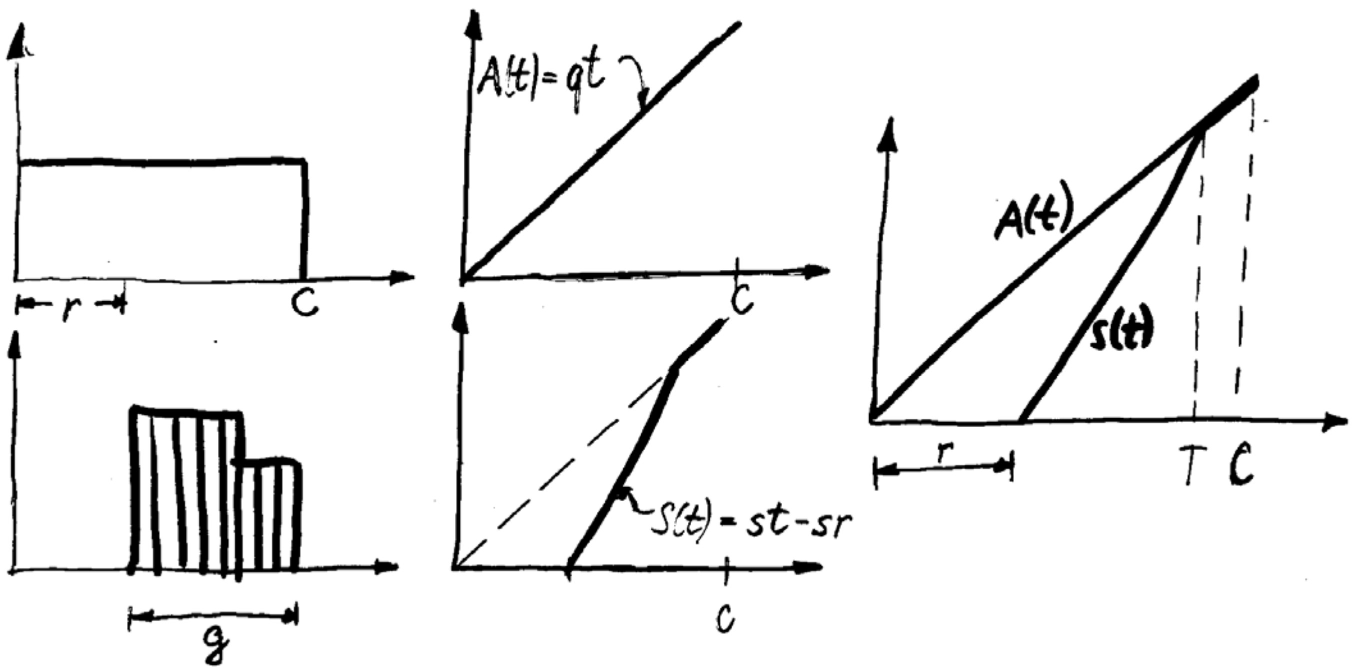
C = Cycle

g = Temps de vert

q = débit d'arrivée

s = débit de saturation

$y = \frac{q}{s}$ charge



ARRIVEES

$0 < t < C \qquad a(t) = q \qquad A(t) = \int_0^t q\,dt = qt$

DEPARTS

$0 < t < r \qquad s(t) = 0 \qquad S(t) = 0$

$r < t < T \qquad s(t) = s \qquad S(t) = \int_r^t s\,dt = st - sr$

$T < t < C \qquad s(t) = q \qquad S(t) = qt$

QUEUES :

$$0 < t \leq r \qquad Q = \int_0^r q\,dt$$

$$r < t \leq T \qquad Q = \int_0^r q\,dt - \int_r^T (q-s)\,dt$$

$$T < t \leq C \qquad Q = 0$$

DISSIPATION DE LA FILE T QUAND $Q = 0$

$$Q = qt - st + sr$$

$$T = \frac{sr}{s-q} = \frac{r}{1-y}$$

RETARD :

$$D = \int_0^T q\,t\,dt - \int_r^T (st - sr)\,dt = \left[\frac{qt^2}{2}\right]_0^T - \left[\frac{st^2}{2} - srt\right]_r^T$$

$$D = \frac{qT^2}{2} - \left(\frac{sT^2}{2} - srT - \frac{sr^2}{2} + sr^2\right)$$

$$D = \frac{T^2}{2}(q-s) + srT - \frac{sr^2}{2}$$

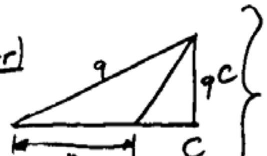
$$\boxed{D = \frac{qr^2}{2\left(1 - \frac{q}{s}\right)}}$$

$$\bar{D} = \frac{D}{qC} = \boxed{\frac{r^2}{2C(1-y)} = \bar{D}} \; y \leq$$

$$\bar{D} = \infty \qquad y > 1$$

$$\bar{D} = \frac{rC}{2} \qquad y = 1$$

$$\left\{\begin{array}{l} D = \dfrac{qC^2}{2} - \dfrac{qC^2(C-r)}{2} \\ D = \dfrac{qC^2 r}{2} \end{array}\right.$$



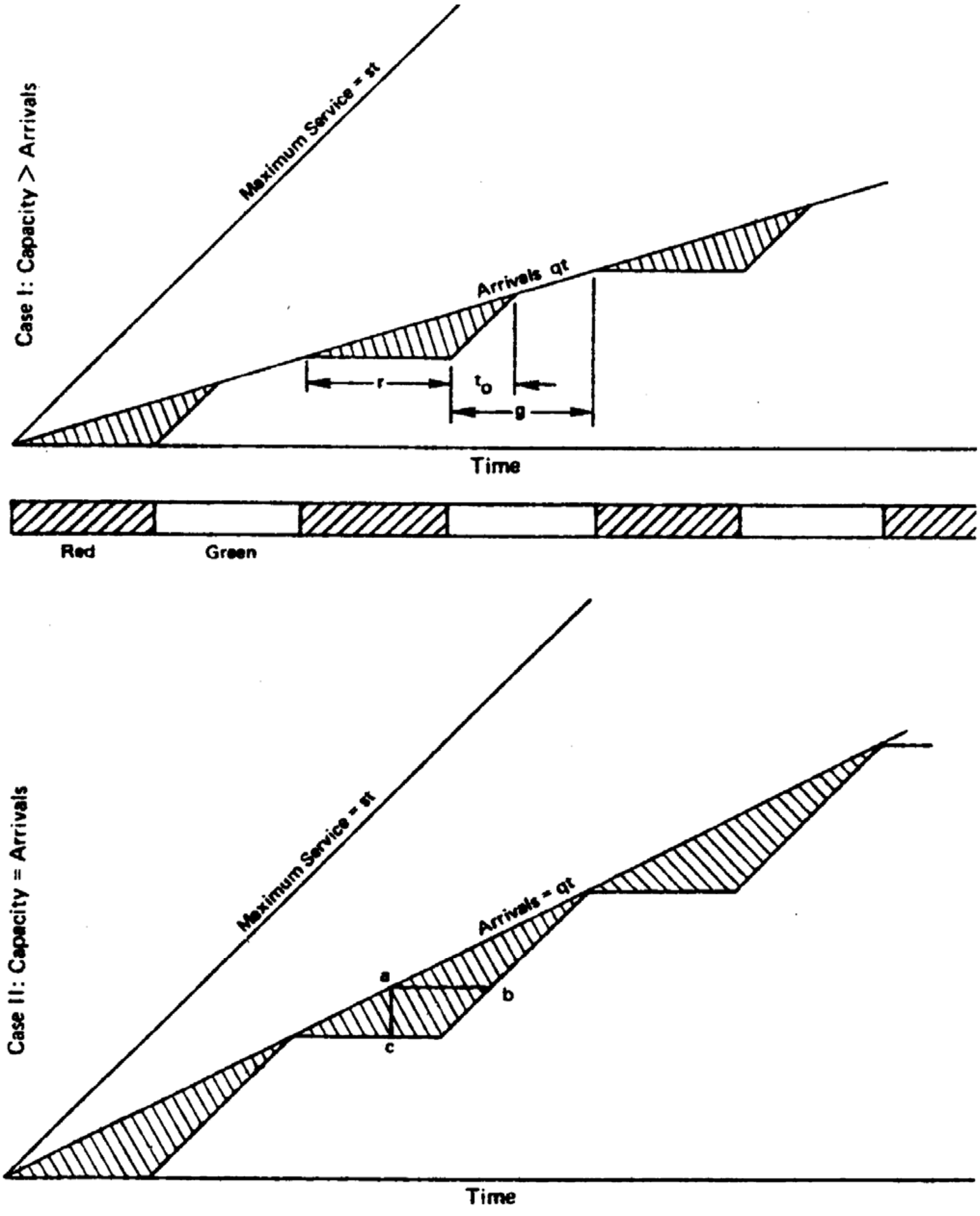
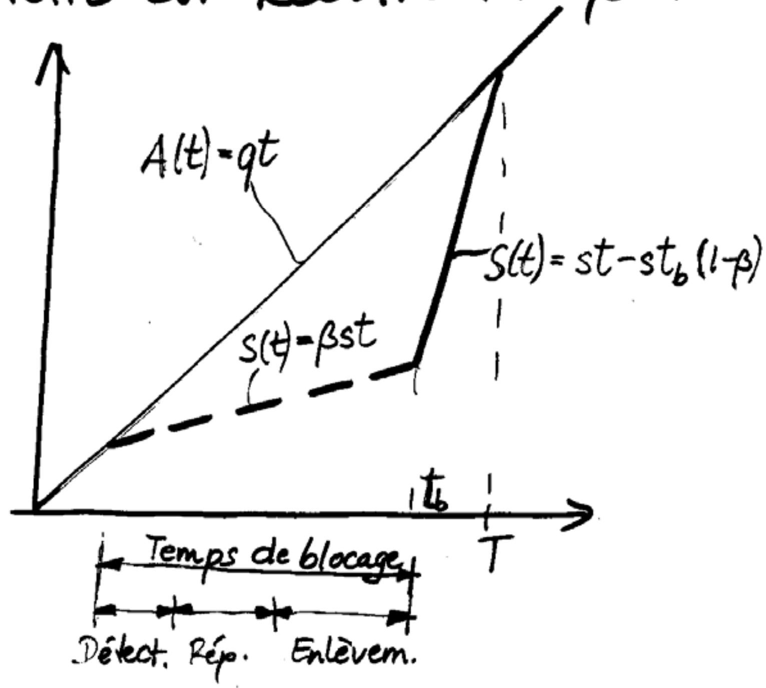


Figure 8.17 Representation of queuing at a signalized intersection.

INCIDENTS, ACCIDENTS

REDUCTION DE CAPACITE

LA CAPACITE EST REDUITE A βs !



ARRIVEES

$0<t\leq T$ $\quad a(t)=q \quad A(t)=\int_0^t q\,dt=qt$

DEPARTS

$0<t\leq t_b$ $\quad s(t)=\beta s \quad S(t)=\int_0^{t_b}\beta s\,dt=\beta st$

$t_b<t\leq T$ $\quad s(t)=s \quad S(t)=\int_{t_b}^{T}s\,dt+\int_0^{t_b}\beta s\,dt$

QUEUES

$0<t\leq t_b$ $\quad Q=\int_0^{t_b}q\,dt-\int_0^{t_b}\beta s\,dt$

$t_b<t\leq T$ $\quad Q=\int_0^{T}q\,dt-\int_{t_b}^{T}s\,dt-\int_0^{t_b}\beta s\,dt$

DISSIPATION DE LA FILE D'ATTENTE T ($Q=0$)

$$Q = qt - st + st_b - \beta s t_b \qquad = st_b(1-\beta) - T(s-q)$$

$$\boxed{T = \frac{t_b(1-\beta)}{(1-y)}}$$

RETARDS

$$D = \int_0^T qt\,db - \int_0^{t_b} \beta s t\,dt - \int_{t_b}^{T} \left(st - st_b(1-\beta)\right) dt$$

$$D = \left[\frac{qt^2}{2}\right]_0^T - \left[\frac{\beta s t^2}{2}\right]_0^{t_b} - \left[\frac{st^2}{2} - st_b t(1-\beta)\right]_{t_b}^T$$

$$D = \frac{qT^2}{2} - \frac{sT^2}{2} + st_b T(1-\beta) + \frac{st_b^2}{2}(1-\beta) - st_b^2(1-\beta)$$

$$\boxed{D = \frac{s^2 t_b^2 (1-\beta)}{2(s-q)} \{y-\beta\}}$$

$$\bar{D} = \frac{D}{qT} \qquad \boxed{\bar{D} = \frac{t_b(y-\beta)}{2y}}$$

NOMBRE DE VEHICULES IMPLIQUES

$$N = qT \qquad \boxed{N = \frac{q t_b (1-\beta)}{1-y}}$$

EXEMPLE:

TUNNEL À 2 VOIES. UN INCIDENT SE PRODUIT A L'HEURE DE POINTE, QUI NECESSITE LA FERMETURE D'UNE VOIE PENDANT 20 MINUTES. CAPACITE D'UNE VOIE 1250 v/h. DEBIT D'ARRIVEE 2000 v/h. LA CONGESTION DURE PENDANT COMBIEN DE TEMPS? COMBIEN DE VEHICULES SONT IMPLIQUES. SI ON PEUT ELIMINER L'INCIDENT APRES 15 MIN. QUEL SERA LE BENEFICE?

$q = 2000$ v/h $\quad s = 2500$ v/h $\quad \beta = 0.5$

$$T = \left(\frac{1-\beta}{1-y}\right) t_b = \frac{0{,}5}{0.2} \cdot 20 = 50 \text{ min.}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2y}(y-\beta)t_b = \frac{1}{1.6}(0.8-0.5)20 = 3\text{min } 45\text{ s}$$

$$N = qT = \frac{2000}{60} \cdot 50 = 1670 \text{ véh.}$$

$$D = \frac{1670 \cdot 225}{3600} = 104 \text{ heures}$$

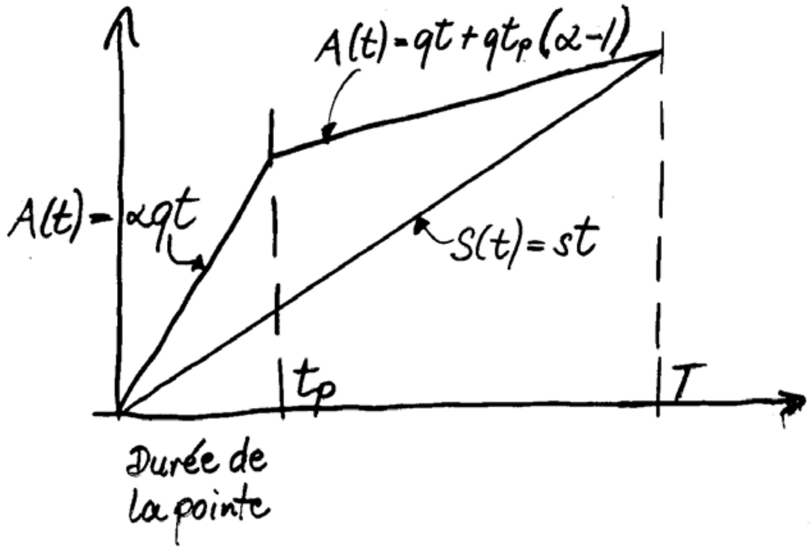
15 MINUTES

$T = 37.5$ min $\qquad \bar{D} = 2$min 49 s

$N = 1250$ véh $\qquad D = 58.6$ heures

DONC REDUCTION DE 44% DU RETARD TOTAL

SURSATURATION TEMPORAIRE



ARRIVEES :

$0 < t \leq t_p$ $\quad a(t) = \alpha q \quad A(t) = \int_0^{t_p} \alpha q \, dt = \alpha q t$

$t_p < t \leq T$ $\quad a(t) = q \quad A(t) = \int_{t_p}^{T} q \, dt + \int_0^{t_p} \alpha q \, dt$

DEPARTS :

$0 \leq t \leq T$ $\quad s(t) = s \quad S(t) = \int_0^{T} s \, dt = st$

QUEUES :

$0 < t \leq t_p$ $\quad Q = \int_0^{t_p} (\alpha q - s) \, dt$

$t_p < t \leq T$ $\quad Q = \int_{t_p}^{T} q \, dt + \int_0^{t_p} \alpha q \, dt - \int_0^{T} s \, dt$

DISSIPATION DE LA FILE

$$Q = qT - qt_p + \alpha q t_p - sT = (q-s)T + qt_p(\alpha - 1)$$

$$\boxed{T = \frac{y t_p(\alpha-1)}{1-y}}$$

RETARDS

$$D = \int_0^{t_b} \alpha q t \, dt + \int_{t_b}^{T} (qt + qt_p(\alpha-1))\, dt - \int_0^{T} st \, dt$$

$$D = \left[\frac{\alpha q t^2}{2}\right]_0^{t_p} + \left[\frac{qt^2}{2} + qt t_p(\alpha-1)\right]_{t_p}^{T} - \left[\frac{st^2}{2}\right]_0^{T}$$

$$D = \frac{q^2 t_p^2 (\alpha-1)^2}{2(s-q)} - \frac{q t_p^2}{2}(\alpha-1)$$

$$\boxed{D = \frac{q t_p^2 (\alpha-1)(y\alpha-1)}{2(1-y)}}$$

NOMBRE DE VEHICULES IMPLIQUES

$$N = qT = sT = \frac{q t_p(\alpha-1)}{(1-y)}$$

RETARD MOYEN

$$\boxed{\bar{D} = \frac{t_p(y\alpha-1)}{2}}$$

U.S. Department
of Transportation

**Federal Highway
Administration**

FREEWAY MANAGEMENT HANDBOOK

FREEWAY MANAGEMENT CONCEPTS

COMMUNICATIONS **SURVEILLANCE**

ECONOMIC ANALYSIS **DECISION PROCESS**

CONTROL CENTERS **LANE USE CONTROL**

INCIDENT MANAGEMENT **RAMP CONTROL**

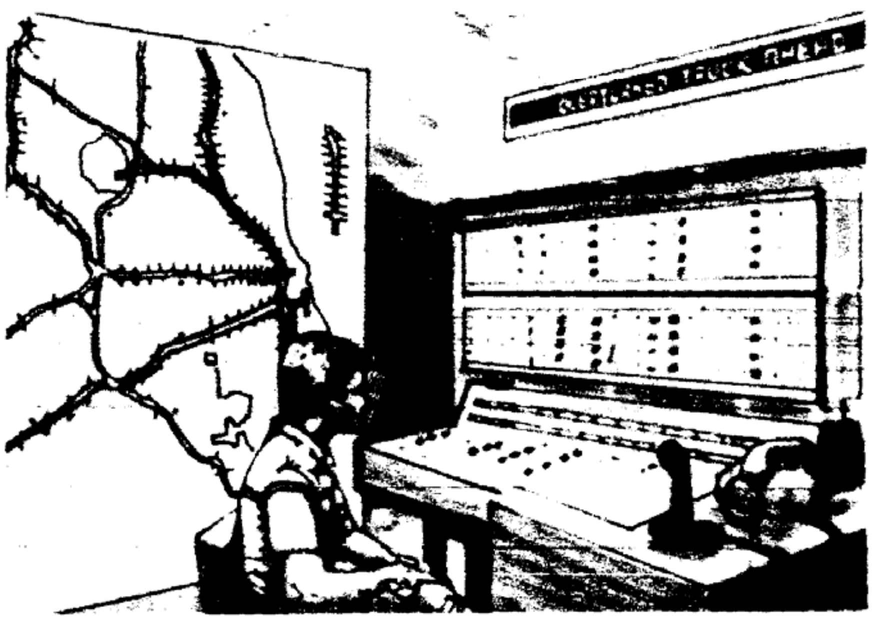
INFORMATION DISSEMINATION **HOV CONCEPTS**

Report No. FHWA-SA-97-064 **August 1997**

www.itsdocs.fhwa.dot.gov/

U.S. Department of Transportation
Federal Highway Administration

A Freeway Management Handbook



Volume 2: Planning & Design

Volume 1: Overview
Volume 2: Planning & Design
Volume 3: Operations & Maintenance
Volume 4: Annotated Bibliography

May 1983

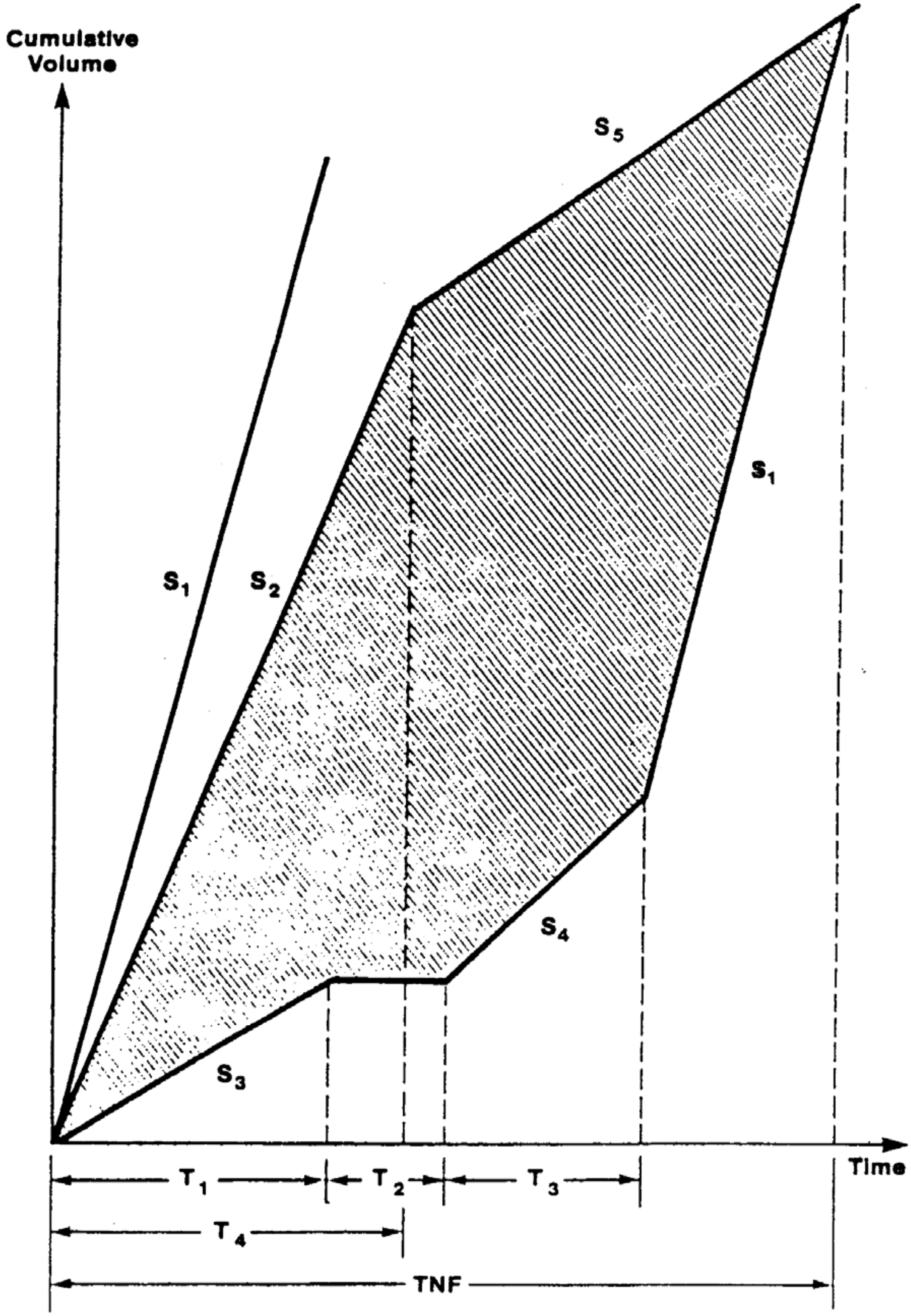


Figure 3.2. General Delay Condition

LEGEND:

S_1	-	capacity flow rate of the facility (vehicles/hour)
S_2	-	initial demand flow rate (vehicles/hour)
S_3	-	initial bottleneck flow rate (vehicles/hour)
S_4	-	adjusted bottleneck flow rate (vehicle/hour)
S_5	-	revised demand flow rate (vehicles/hour)
T_1	-	incident duration until first change (hours)
T_2	-	duration of total closure (hours)
T_3	-	incident duration under adjusted flow (hours)
T_4	-	elapsed time under initial demand (hours)
D	-	total delay (vehicle-hours)
TNF	-	total elapsed time until normal flow resumed (hours)

Note: T_4 is independent of other times.

To compute delay under general conditions:

$$
\begin{aligned}
D = \Big[& T_1^2 (S_1-S_3)(S_5-S_3) + T_2^2 S_1 S_5 + T_3^2 (S_1-S_4)(S_5-S_4) - T_4^2 (S_1-S_2)(S_2-S_5) \\
& + 2T_1 T_2 S_1 (S_5-S_3) + 2T_1 T_3 (S_1-S_4)(S_5-S_3) \\
& + 2T_1 T_4 (S_1-S_3)(S_2-S_5) + 2T_2 T_3 S_5 (S_1-S_4) + 2T_2 T_4 S_1 (S_2-S_5) \\
& + 2T_3 T_4 (S_1-S_4)(S_2-S_5) \Big] / 2 (S_1-S_5)
\end{aligned}
$$

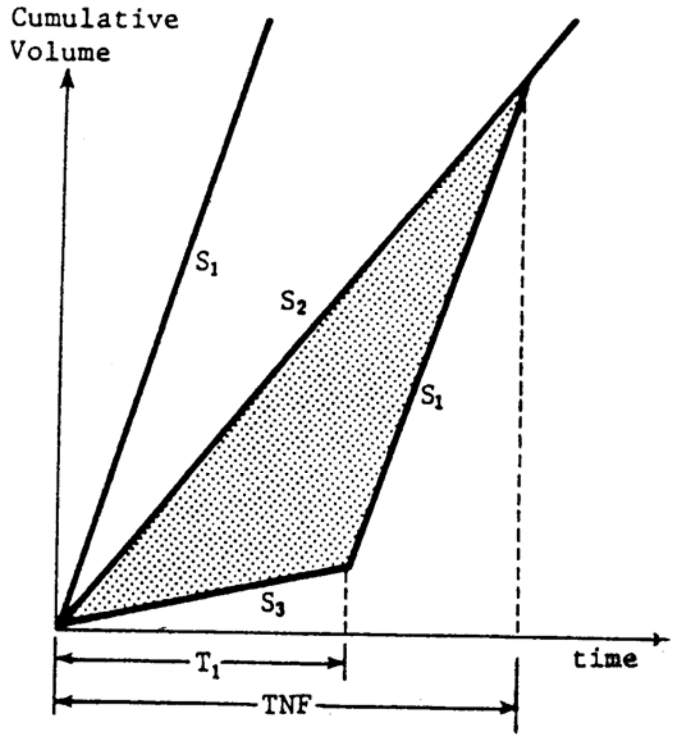
To compute time until normal flow resumes:

$$
TNF = \frac{T_1 (S_1 - S_3) + T_2 S_1 + T_3 (S_1 - S_4) + T_4 (S_2 - S_5)}{(S_1 - S_5)}
$$

TABLE 3.1. TYPICAL FLOW RATES FOR DELAY ESTIMATION

NUMBER OF LANES IN EACH DIRECTION	CAPACITY FLOW RATE = GET-AWAY FLOW RATE (VEHICLE/HR)	IN-LANE INCIDENTS (VEHICLE/HR)– ONE LANE BLOCKED	SHOULDER ACCIDENTS (VEHICLE/HR)
	S_1	S_{3a}	S_{3b}
2	3,700	1,300	3,000
3	5,550	2,700	4,600
4	7,400	4,300	6,300

DELAY CONDITIONS FOR SIMPLE BLOCKAGE



Condition 1: Simple Blockage

Condition 1 is known as a simple blockage. The number of vehicles that would have been processed if the incident had not occurred (the demand flow rate) is indicated by line S_2. The number that actually processed at the reduced flow rate is shown as line S_3. The duration of the incident, from the time of occurrence until clearance, is represented by the interval T_1. After the incident has been cleared, the queue of vehicles delayed by the incident will move past the site at a getaway rate of S_1, approaching the capacity flow rate of the facility. Traffic will continue to flow at this rate until all queued vehicles have been cleared.

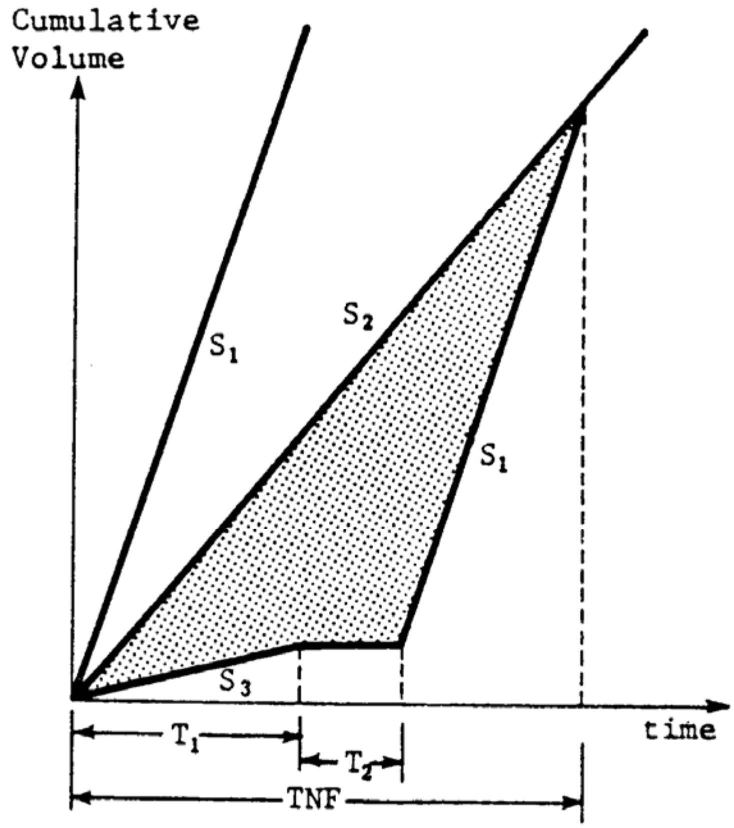
In this case T_2, T_3, and T_4 are zero; $S_2 = S_5$; and $S_3 = S_4$. The total delay is then given by:

$$D = \frac{T_1^2 (S_1 - S_3)(S_2 - S_3)}{2(S_1 - S_2)} \qquad (3)$$

The total elapsed time until normal flow resumes is calculated by:

$$TNF = \frac{T_1 (S_1 - S_3)}{(S_1 - S_2)} \qquad (4)$$

FIGURE 3.3.2. DELAY CONDITIONS FOR SHORT-TERM CLOSURE



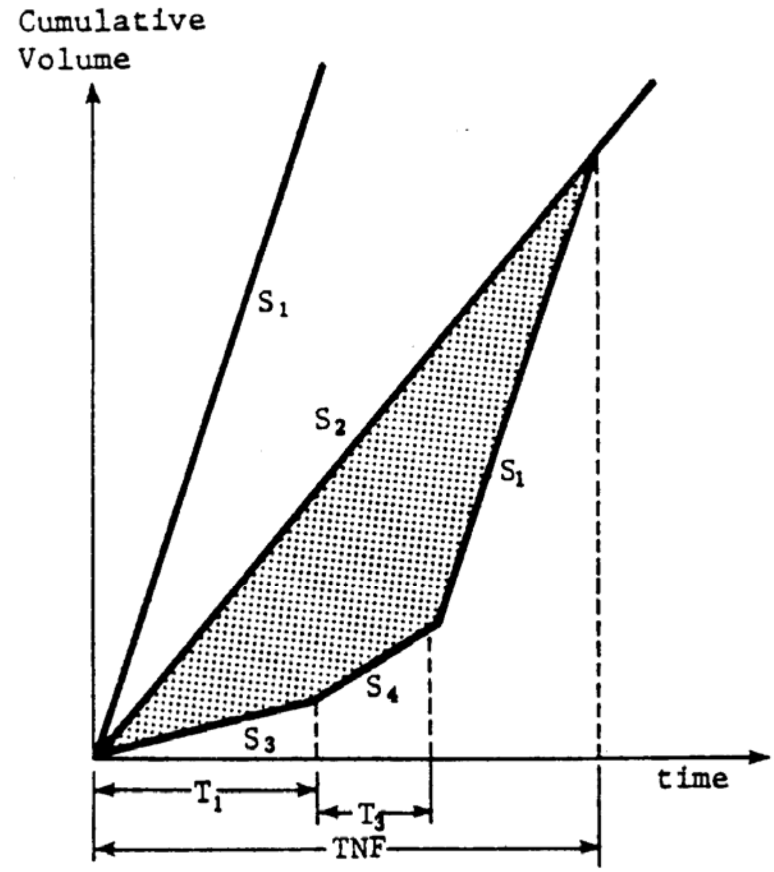
Condition 2: Short-Term Closure

In this condition the freeway is entirely closed for a period T_2 in order to remove the incident. Once cleared, flow returns to the getaway value S_1. In this case, T_3 and T_4 are zero, and $S_2 = S_5$, and $S_4 = S_1$. Therefore:

$$D = \frac{T_1^2 (S_1 - S_3)(S_2 - S_3) + T_2^2 S_1 S_2 + 2T_1 T_2 S_1 (S_2 - S_3)}{2(S_1 - S_2)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$TNF = \frac{T_1 (S_1 - S_3) + T_2 S_1}{(S_1 - S_2)} \qquad \textbf{(6)}$$

FIGURE 3.3.3. DELAY CONDITIONS FOR ADJUSTED BOTTLENECK



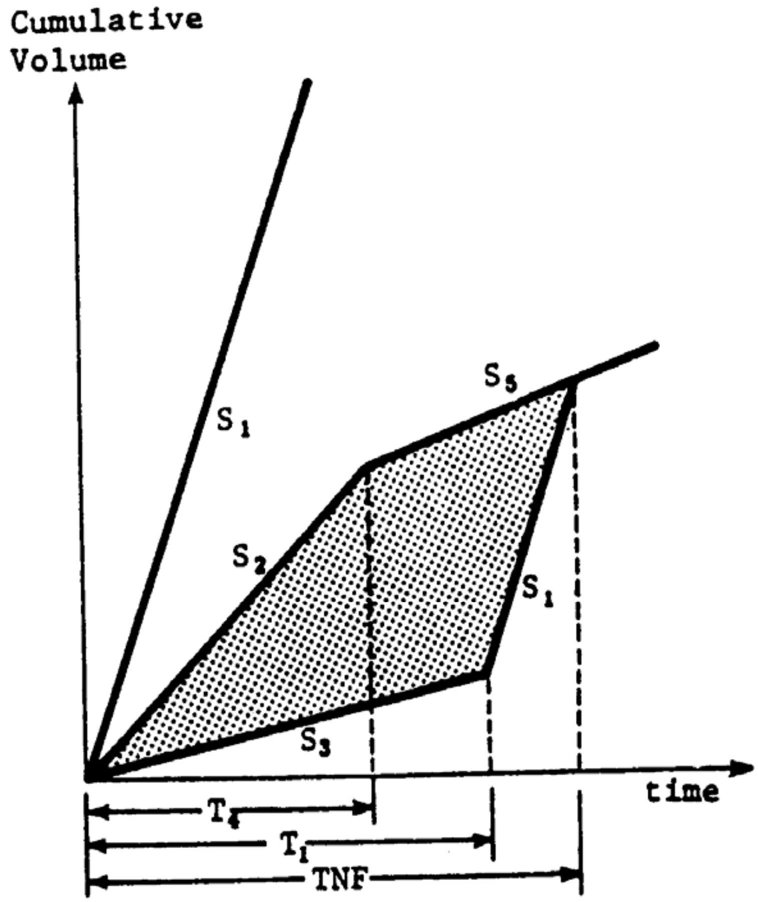
Condition 3: Adjusted Bottleneck

In this case the capacity available is increased prior to total clearance of the incident. For example, two lanes may have been blocked initially but one is cleared prior to total removal of the incident. In these circumstances T_2 and T_4 are zero and $S_2 = S_5$, hence:

$$D = \frac{T_1^2 (S_1 - S_3)(S_2 - S_3) + T_3^2 (S_1 - S_4)(S_2 - S_4) + 2T_1 T_3 (S_1 - S_4)(S_2 - S_4)}{2(S_1 - S_2)} \quad \textbf{(7)}$$

$$TNF = \frac{T_1 (S_1 - S_3) + T_3 (S_1 - S_4)}{(S_1 - S_2)} \quad \textbf{(8)}$$

FIGURE 3.3.4. DELAY CONDITIONS FOR REVISED DEMAND



Condition 4: Revised Demand

This case illustrates how total delay decreases when the demand rate is reduced during the incident by planned or unplanned diversions of upstream traffic or by a decrease in demand at the end of a peak period. In this case, $T_2 = 0$ and $S_3 = S_4$, and the equations become:

$$D = \frac{T_1^2\,(S_1 - S_3)(S_5 - S_3) - T_4^2\,(S_1 - S_2)(S_2 - S_5) + 2T_1\,T_4\,(S_1 - S_3)(S_2 - S_5)}{2\,(S_1 - S_5)} \tag{9}$$

$$TNF = \frac{T_1\,(S_1 - S_3) + T_4\,(S_2 - S_5)}{(S_1 - S_5)} \tag{10}$$

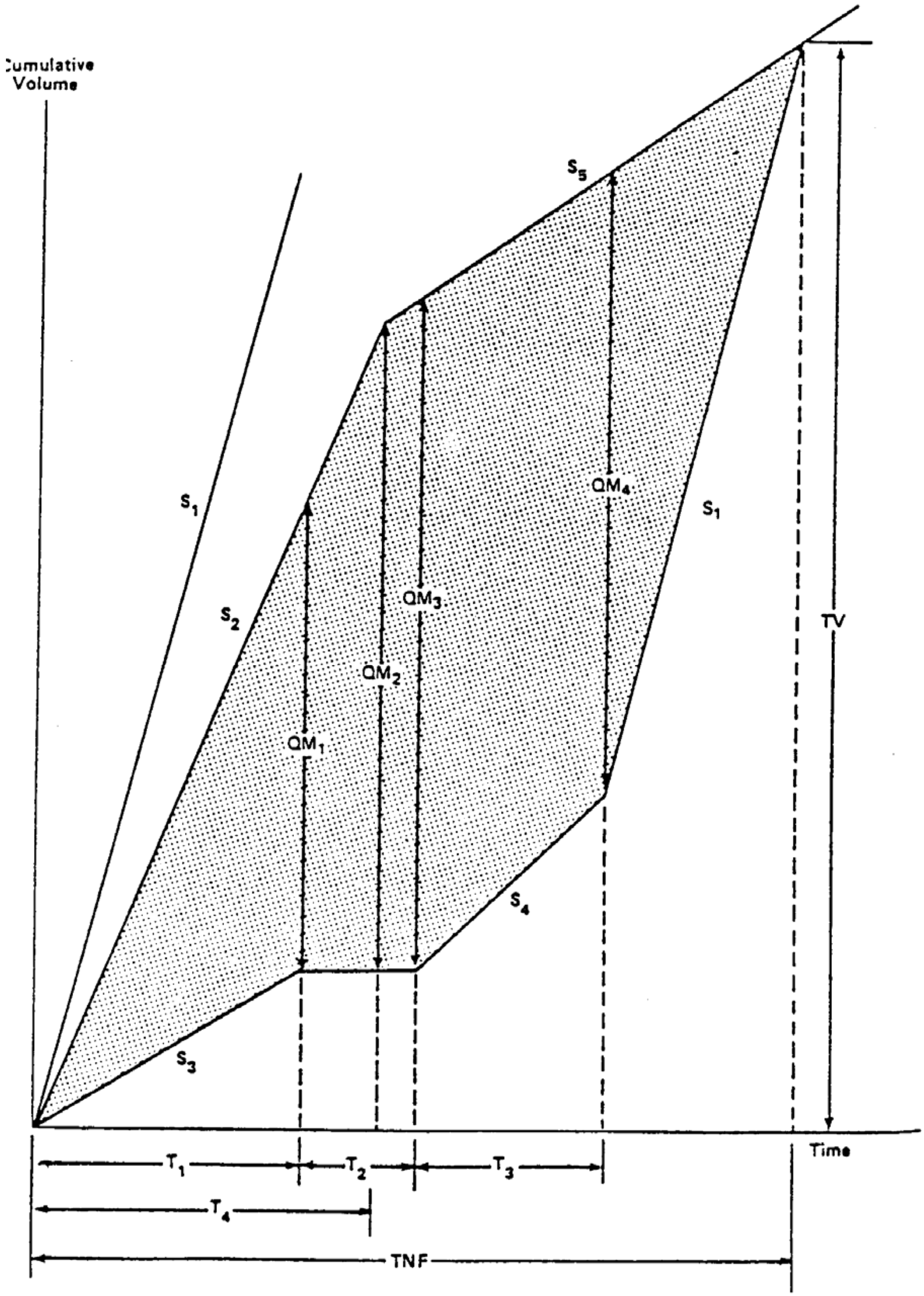


Figure 3.13. Maximum Queue Conditions

$$QM = T_a S_2 + T_b S_5 - T_c S_3 - T_d S_4 - T_e S_1$$

CASE	RANGE OF T_4	CRITICAL TNF	T_a	T_b	T_c	T_d	T_e
I	0	$T_1 \leq TNF$	T_1	0	T_1	0	0
II	$0 < T_4 \leq T_1$	$(T_1 + T_2) \leq TNF$	T_4	$T_1 + T_2 - T_4$	T_1	0	0
		$(T_1 + T_2 + T_3) \leq TNF$	T_4	$T_1 + T_2 + T_3 - T_4$	T_1	T_3	0
		$T_4 \leq TNF$	T_4	0	T_4	0	0
III	$T_1 < T_4 \leq (T_1 + T_2)$	$(T_1 + T_2) \leq TNF$	T_4	$T_1 + T_2 - T_4$	T_1	0	0
		$(T_1 + T_2 + T_3) \leq TNF$	T_4	$T_1 + T_2 + T_3 - T_4$	T_1	T_3	0
IV	$(T_1 + T_2) < T_4 \leq (T_1 + T_2 + T_3)$	$(T_1 + T_2) \leq TNF$	$T_1 + T_2$	0	T_1	0	0
		$(T_1 + T_2 + T_3) \leq TNF$	T_4	$T_1 + T_2 + T_3 - T_4$	T_1	T_3	0
		$T_4 \leq TNF$	T_4	0	T_1	$T_4 - T_1 - T_2$	0
V	$T_4 < (T_1 + T_2 + T_3)$	$(T_1 + T_2) \leq TNF$	$T_1 + T_2$	0	T_1	0	0
		$(T_1 + T_2 + T_3) \leq TNF$	$T_1 + T_2 + T_3$	0	T_1	T_3	0
		$T_4 \leq TNF$	T_4	0	T_1	T_3	$T_4 - T_1 - T_2 - T_3$

Figure 3.14. Maximum Queue Parameters

Table 3.3. Reductions in Delay Due to Improved Service Parameters

SERVICE IMPROVEMENT	DELAY REDUCTION	
	PEAK FLOW CONDITIONS (%)	OFF-PEAK CONDITIONS (%)
5% Improvement in Bottleneck Flow Rate (S_3)	8	21
10% Improvement in Bottleneck Flow Rate (S_3)	16	40
25% Improvement in Bottleneck Flow Rate (S_3)	38	88
25% Reduction in Clearance Time (8% Overall Reduction to T_1)	9	16
50% Reduction in Clearance Time (17% Overall Reduction in T_1)	19	44
20 Minute Earlier Demand Reduction	32	0*
10% Demand Reduction after 40 Minutes	14	0*
20% Demand Reduction after 40 Minutes	25	0*

*The off-peak traffic volumes of this example are not sufficient to be affected by these demand reduction situations.

ANALYSE STOCHASTIQUE

LES HYPOTHÈSES SUIVANTES DOIVENT ÊTRE SATISFAITES POUR QU'ON PUISSE CONCLURE QUE LES ARRIVÉES OU DÉPARTS SOIENT GOUVERNÉS PAR LE HASARD :

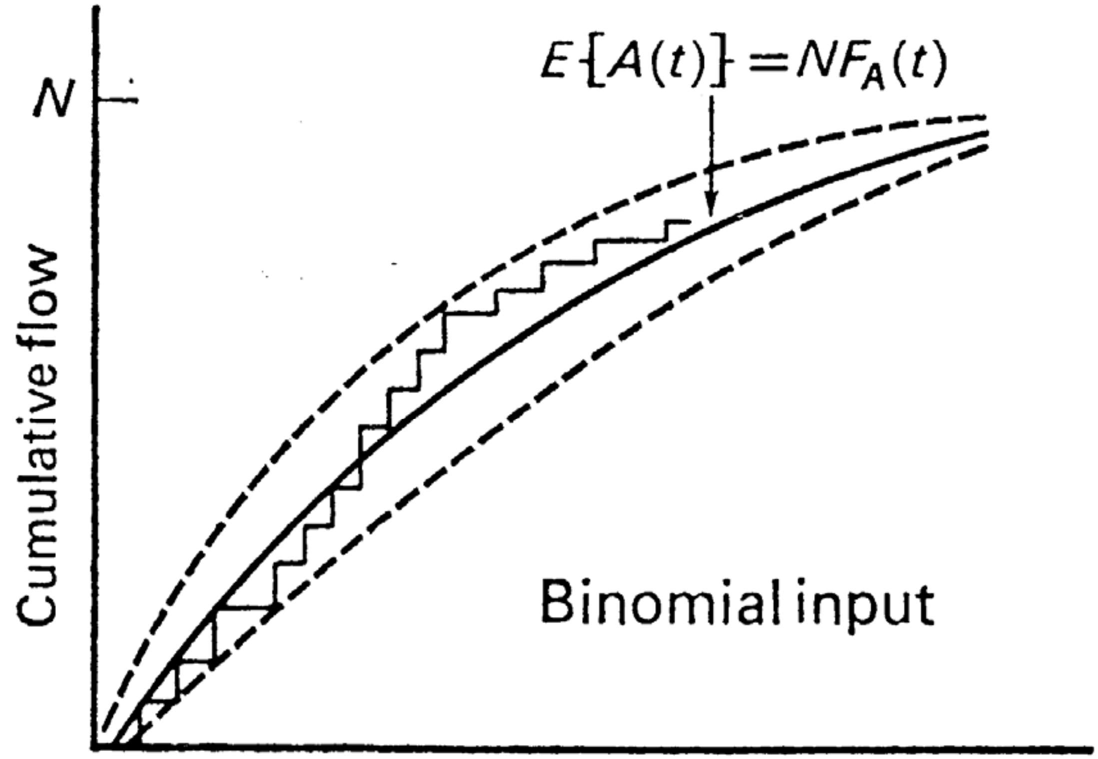
1) L'ARRIVÉE D'UNE AUTO EST INDÉPENDANTE DE CELLE D'UNE AUTRE (INDÉPENDANCE DES ARRIVÉES).

2) IL N'ARRIVE JAMAIS DEUX VEHICULES OU PLUS À LA FOIS.

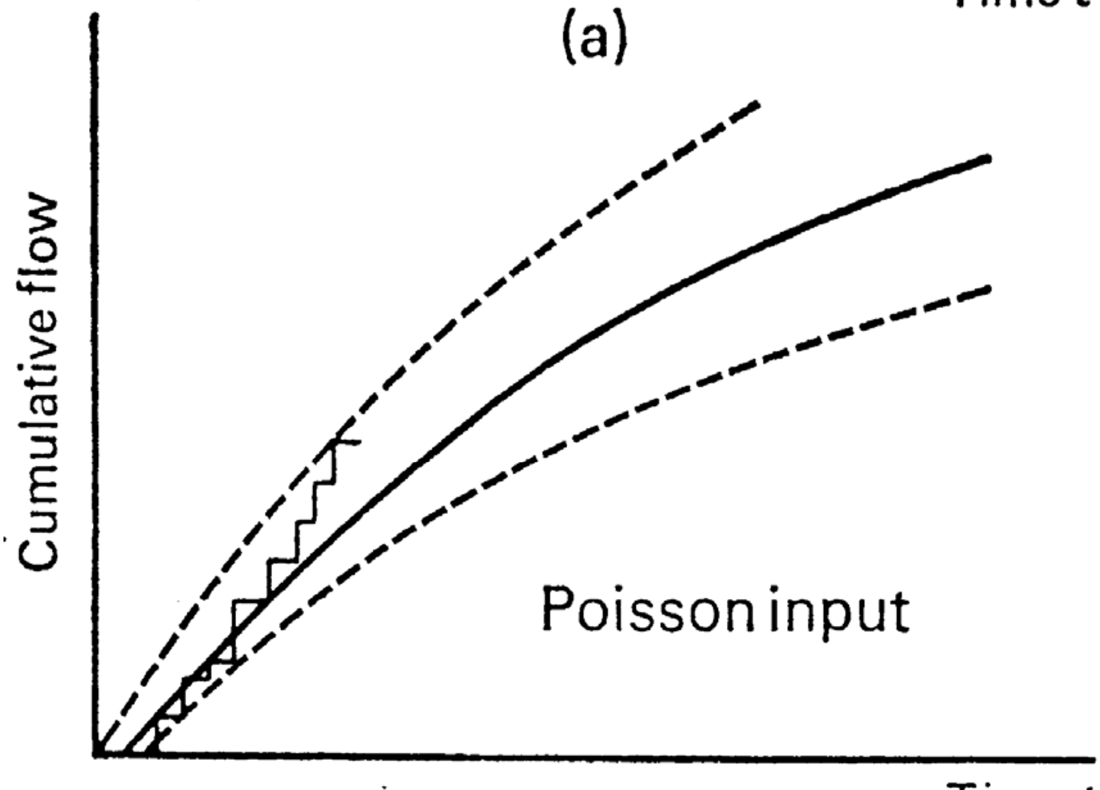
3) LE TAUX MOYEN DES ARRIVÉES NE VARIE PAS DANS LE TEMPS (STATIONNAIRE)

- LES DÉVELOPPEMENTS POUR LE CAS DE DISTRIBUTIONS GÉNÉRALES SONT EXTRÊMEMENT LONGUES ET DIFFICILES.

- CAS LE PLUS SIMPLE ET UTILE M/M/1 : (∞/FIFO)


$E\{A(t)\} = NF_A(t)$
N
Cumulative flow
Binomial input
Time t

(a)


Cumulative flow
Poisson input
Time t

(b)

REMARQUES

- LES SOLUTIONS DU PROBLEME EN FONCTION DU TEMPS SONT TRES COMPLEXES, DONC ON N'ENVISAGE DE SOLUTIONS QUE POUR LE CAS STATIONNAIRE. (EN EQUILIBRE STATISTIQUE)
- DANS CE CAS LA PROBABILITE POUR QU'IL Y AIT UN VEHICULE DANS LE SYSTEME EST INDEPENDANTE DU TEMPS.
- POUR DES PROBLEMES TRANSITOIRES ON SE SERT D'APPROXIMATIONS GRAPHIQUES OU DE LA SIMULATION.
- L'EQUILIBRE STATISTIQUE N'EXISTE QUE SI $y = \frac{q}{s}$ $\left(\rho = \frac{\lambda}{\mu}\right) < 1$, SINON LA FILE VA EN GRANDISSANT AVEC LE TEMPS.

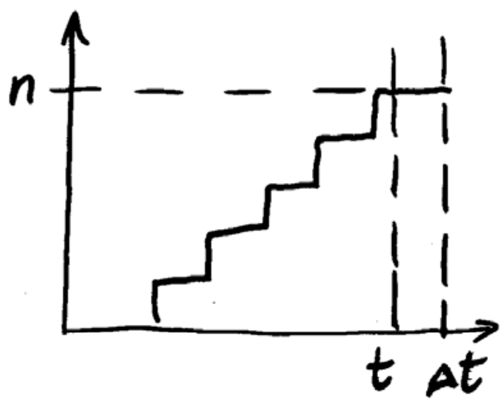
DEVELOPPEMENT DU MODELE $M/M/1 : (\infty, FIFO)$

DEFINISSONS :

$P_n(t)$	PROBABILITE QUE LE SYSTEME CONTIENNE n VEHICULES AU MOMENT t.
$(t, t\Delta t)$	UN INTERVALLE DE TEMPS SI COURT, QU'IL NE CONTIENT 0 OU 1 VEHICULE.
$\lambda \Delta t$	PROBABILITE QU'UN VEHICULE ENTRE PENDANT L'INTERVALLE Δt.
$1 - \lambda \Delta t$	PROBABILITE QU'AUCUN VEHICULE N'ENTRE DANS LE SYSTEME EN Δt.
$\mu \Delta t$	PROBABILITE QU'UN VEHICULE QUITTE LE SYSTEME EN Δt.
$1 - \mu \Delta t$	PROBABILITE QU'AUCUN VEHICULE NE QUITTE LE SYSTEME EN Δt.
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	LA CHARGE DU SYSTEME
$\lambda \Delta t \cdot \mu \Delta t = 0$	ARRIVEES ET DEPARTS SIMULTANES SONT NEGLIGEABLES, DONC EXCLUS.

L'ETAT DU SYSTEME CONTENANT EXACTEMENT n VEHICULES PEUT SE REALISER DE <u>TROIS</u> FAÇONS. SA PROBABILITE SE CALCULE COMME SOMME DES PROBABILITES DE CES TROIS COMPOSANTES.

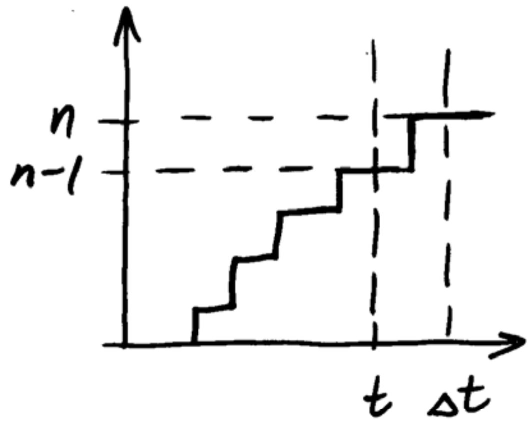
1) LE SYSTEME ETAIT A L'ETAT n AU MOMENT t ET AUCUN VEHICULE N'ARRIVE.



$$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) = 1-\mu\Delta t-\lambda\Delta t+\lambda\Delta t\mu\Delta t$$

$$(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)\cdot P_n(t)$$

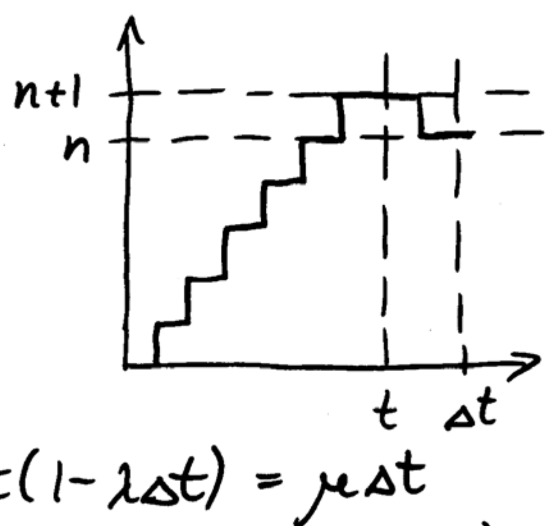
2) LE SYSTEME ETAIT A L'ETAT (n-1) AU MOMENT t ET UN VEHICULE ARRIVE DANS L'INTERVALLE. (1 ARRIVEE, 0 DEPARTS)



$$\lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t) = \lambda \Delta t$$

$$\lambda \Delta t \cdot P_{n-1}(t)$$

3) LE SYSTEME ETAIT A L'ETAT (n+1) AU MOMENT t ET UN VEHICULE PART DANS L'INTERVALLE Δt



$$\mu \Delta t (1 - \lambda \Delta t) = \mu \Delta t$$

$$\mu \Delta t \cdot P_{n+1}(t)$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)\{1-\lambda\Delta t - \mu\Delta t\} + \lambda\Delta t\, P_{n-1}(t) +$$
$$+ \mu\Delta t \cdot P_{n+1}(t) \qquad\qquad n \geq 1$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

$$\Delta t \longrightarrow 0$$

$$\boxed{\frac{d P_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda+\mu) P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)}$$

CETTE EQUATION DIFFERENTIELLE AUX DIFFERENCES FINIES CONSTITUE LE MODELE MATH.

- ON PEUT LA RÉSOUDRE SI ON CONNAÎT LE NOMBRE DE VÉHICULES DANS LA FILE À UN MOMENT INITIAL.

- SOLUTION GÉNÉRALE EST FORMIDABLE. TRANSFORMATION LAPLACE, FONCTION GÉNÉRATRICE QUI AMMENENT A DES FONCTIONS BESSEL, MÊME POUR LE CAS M/M/1

- SOLUTION EN FONCTION DU TEMPS EST TROP COMPLEXE

L'ETAT DU SYSTEME AVEC EXACTEMENT 0 VEHICULES PEUT SE PRODUIRE DE <u>DEUX</u> FAÇONS.

1) IL N'Y A AUCUN VEHICULE EN ATTENTE AU MOMENT t ET AUCUN VEHICULE N'ARRIVE.

$$P_0(t)(1-\lambda\Delta t)$$

2) IL Y A 1 VEHICULE EN ATTENTE AU MOMENT t QUI PART A L'INTERVALLE Δt.

$$P_1(t)(\mu\Delta t)$$

DONC :

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

$$\boxed{\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)}$$

ON SUPPOSE QUE LE PROCESSUS EST EN EQUILIBRE STATISTIQUE. LA PROBABILITE POUR QU'IL YAIT n VEHICULES DANS LE SYSTEME EST INDEPENDANTE DU TEMPS.

DONC : $\boxed{P_n(t) = P_n}$

ET : $\boxed{\dfrac{d\,P_n(t)}{dt} = 0}$ $\quad n \geq 0$

ALORS ON A :

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \qquad n = 0$$

$$\mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} = (\lambda + \mu) P_n \qquad n > 0$$

P_n EST DONNEE PAR $P_n(t)$ AVEC $t \to \infty$

IL S'AGIT D'EXPRIMER P_n PAR λ ET PAR μ.

PAR RECURSION NOUS AVONS :

$n=0$	$\lambda P_0 = \mu P_1$	$P_1 = \rho P_0$
$n=1$	$\lambda P_0 + \mu P_2 = (\lambda+\mu) P_1$	$P_2 = \rho^2 P_0$
$n=2$	$\lambda P_1 + \mu P_3 = (\lambda+\mu) P_2$	$P_3 = \rho^3 P_0$
$\vdots$		
$n=n-1$	$\lambda P_{n-2} + \mu P_n = (\lambda+\mu) P_{n-1}$	$P_n = \rho^n P_0$

$$\sum_{n=0}^{n\to\infty} P_n = 1 = P_0(1+\rho+\rho^2+\ldots) = \frac{P_0}{1-\rho} \qquad \rho<1$$

$$\text{ET} \quad \boxed{\begin{aligned} P_0 &= 1-\rho \\ P_n &= \rho^n(1-\rho) \end{aligned}}$$

POUR CONNAÎTRE LE FONCTIONNEMENT DU SYSTEME IL FAUT CALCULER.

- LE NOMBRE MOYEN (ET LA VARIANCE) DE VEHICULES DANS LE SYSTEME
- LE RETARD (DANS LE SYSTEME ET DANS LA FILE
- LA LONGUEUR DE LA FILE

NOMBRE MOYEN DE VEHICULES ET VARIANCE M/M/1 DANS LE SYSTEME

SELON DEFINITION DE L'ESPERANCE MATH. $E(n) = \sum_{n=0}^{n=\infty} n P_n$

$$E(n) = 0 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \ldots\ldots$$
$$= P_0 (\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots\ldots)$$

$$\boxed{E(n) = \frac{\rho}{1-\rho}} \qquad \rho < 1$$

$$VAR(n) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [n - E(n)]^2 P_n$$

$$\boxed{VAR(n) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$$

NOMBRE MOYEN DE VEHICULES DANS LA FILE

ON SOUSTRAIT DE $E(n)$ LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES EN SERVICE.

LE TEMPS MOYEN DE SERVICE EST $\frac{1}{\mu}$, ET LE TAUX D'ARRIVEE λ

DONC # MOYEN EN SERVICE $= \frac{\lambda}{\mu}$

$$\bar{q} = E(q) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

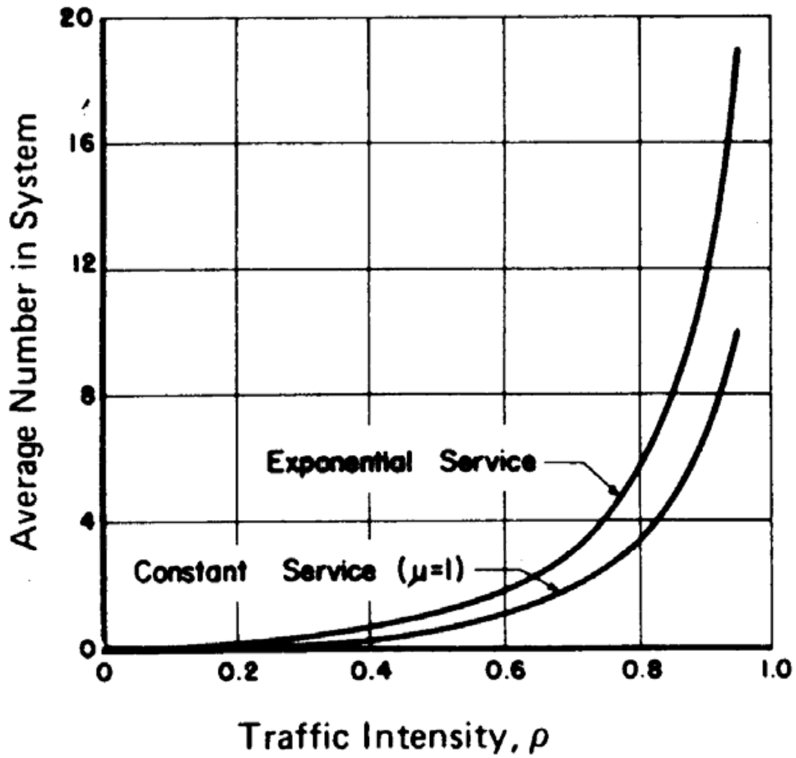


Figure 8.1 Average number in system as a function of traffic intensity.[1]

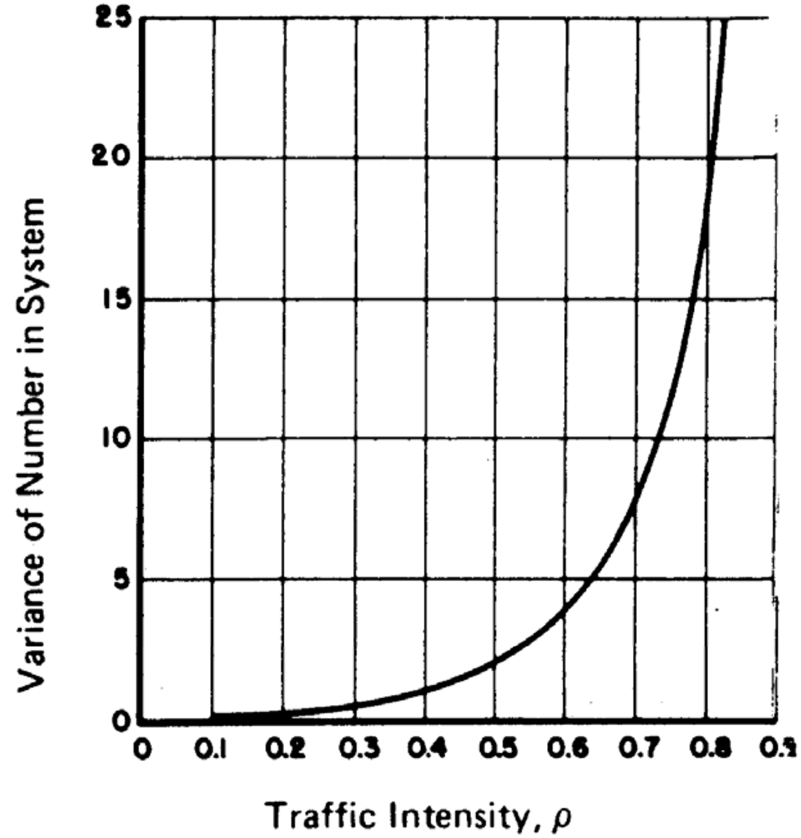


Figure 8.2 Variance of number in system as a function of traffic intensity.[1]

MAIS CECI INCLUT AUSSI LE TEMPS OÙ LA FILE EST DE LONGUEUR ZERO. SI ON VEUT CONNAITRE LA LONGUEUR MOYENNE DE LA FILE SOUS CONDITION QU'ELLE SOIT > 0

$$E(q \mid q>0) = \frac{\text{LONGUEUR MOYENNE}}{\text{PROBABILITE D'UNE FILE NON NULLE}}$$

$$= \frac{E(q)}{P(m>0)}$$

LA LONGUEUR EST ZERO, SI LE SYSTEME EST EN ETAT 0 OU 1

$$P(m>0) = 1-(P_0+P_1) = 1-(1-\rho+\rho(1-\rho))$$

$$= \rho^2$$

OU $$P(q \mid q>0) = \frac{\mu}{\mu-\lambda} = \frac{1}{1-\rho}$$

RETARD DANS UN SYSTEME M/M/1

IL Y A DEUX COMPOSANTES, LE TEMPS D'ATTENTE PASSÉ DANS LA FILE ET LE TEMPS D'ATTENTE PASSÉ EN SERVICE.

LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES DANS LE SYSTEME (OU DANS LA FILE) EST LE PRODUIT DU TEMPS MOYEN D'ATTENTE ET DU TAUX D'ARRIVEE.

$$E(n) = \lambda E(d)$$
$$E(q) = \lambda E(w)$$

RETARD MOYEN DANS LE SYSTEME $\bar{d}$

$$E(d) = E(n)/\lambda$$

$$E(d) = \boxed{\bar{d} = \frac{1}{\mu-\lambda}}$$

RETARD MOYEN DANS LA FILE $\bar{w}$ $E(w) = E(d) - E(s)$

$$E(w) = \boxed{\bar{w} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}} = \bar{d} - \frac{1}{\mu}$$

PROBABILITE DE PASSER LE TEMPS d DANS LE SYSTEME:

PUISQUE LES TEMPS DE SERVICE SONT DISTRIBUES EXPONENTIELLEMENT ON A :

LA PROBABILITE QU'UN VEHICULE PRENNE LE TEMPS s EN SERVICE

$$f(s) = \mu e^{-\mu s}$$

DONC SI $\bar{d} = \frac{1}{\mu - \lambda}$

$$\boxed{f(d) = (\mu - \lambda)\, e^{(\lambda - \mu) d}}$$

LA PROBABILITE DE PASSER PLUS QUE d DANS LE SERVICE

$$\int_0^d (\mu - \lambda)\, e^{(\lambda - \mu) t} = 1 - e^{(\rho - 1)\mu t}$$

$$\boxed{P(d > t) = e^{(\rho - 1)\mu t}}$$

LA PROBABILITE DE PASSER PLUS QUE w DANS LA FILE

$$P(w > t) = \rho\, P(d > t) = \boxed{\rho e^{(\rho - 1)\mu t} = P(w > t)}$$

A CHAQUE INSTANT $q = n - 1$

$\frac{\bar{n}}{\mu}$ = TEMPS D'ECOULEMENT DU NOMBRE MOYEN D'UNITES

$\frac{\bar{q}}{\lambda}$ = TEMPS D'ATTENTE DU NOMBRE MOYEN D'UNITES

EGAL, PUISQUE LE REGIME EST PERMANENT

$\bar{q} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \bar{n}$ ET TEMPS MOYEN D'ATTENTE DS. LA FILE $\bar{w} = \frac{\bar{q}}{\lambda}$

Single-Station Queuing Relationships with Poisson Arrivals and Exponential Service Times for Steady-State Conditions (MORLOK)

Queueing model†	Description of model
1 $p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = (\rho)^n(1-\rho)$	$p(n)$ = probability of having exactly n vehicles in system
2 $\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$	$\bar{n}$ = average no. of vehicles in system
3 $\mathrm{Var}(n) = \frac{\lambda\mu}{(\mu-\lambda)^2} = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$	$\mathrm{Var}(n)$ = variance of n (no. of vehicles in system)
4 $\bar{q} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\bar{q}$ = average length of queue
5 $f(d) = (\mu - \lambda)e^{(\lambda-\mu)d}$	$f(d)$ = probability of having spent time d in system
6 $\bar{d} = \frac{1}{\mu - \lambda}$	$\bar{d}$ = average time spent in system
7 $\bar{w} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \bar{d} - \frac{1}{\mu}$	$\bar{w}$ = average waiting time spent in queue
8 $p(d \leq t) = 1 - e^{-(1-\rho)\mu t}$	$p(d \leq t)$ = probability of having spent time t or less in system
9 $p(w \leq t) = 1 - \rho e^{-(1-\rho)\mu t}$	$p(w \leq t)$ = probability of having waited time t or less in queue

† λ = average number of vehicle arrivals per unit of time
μ = average servicing rate, number of vehicles per unit of time
ρ = traffic intensity or utilization factor = λ/μ

- CES RESULTATS NE PEUVENT ETRE OBTENUS QUE SOUS FORME DE DISTRIBUTIONS STATISTIQUES.

- EN EFFET, LES FORMULES NE DONNENT PAS LE NOMBRE DE VEHICULES DANS LA FILE EN FONCTION DE μ ET DE λ, MAIS LA PROBABILITE D'UNE VALEUR n DE CE NOMBRE.

LOI DU NOMBRE DE VEHICULES DANS LE SYSTEME

- FONCTION DE DENSITE

$$\boxed{p(n) = \rho^n (1-\rho)}$$

- FONCTION DE REPARTITION

$$P(n) = \sum_{i=0}^{n} \rho^i (1-\rho) = (1-\rho)\{1+\rho+\rho^2+\dots\}$$

$$\boxed{P(n) = 1-\rho^{n+1}}$$

- LA MOYENNE DE LA DISTRIBUTION EST

$$\boxed{\bar{n} = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

- LA VARIANCE DE LA DISTRIBUTION EST

$$\boxed{VAR(n) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$$

- CALCUL PAR RÉCURRENCE :

$$p(0) = 1-\rho$$
$$p(n) = \rho \cdot p(n-1)$$

LA LOI DU TEMPS D'ATTENTE DANS LA FILE

- LA FONCTION DE DENSITE

$$\boxed{p(w) = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) e^{-(\mu-\lambda)w}}$$

- LA FONCTION DE REPARTITION

$$\boxed{P(w) = 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)w}}$$

- LA MOYENNE

$$\boxed{\bar{w} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\bar{n}}{\mu}}$$

LA LOI DU TEMPS D'ATTENTE DANS LE SYSTEME

- LA FONCTION DE DENSITE

$$\boxed{p(d) = (\mu-\lambda) e^{-(\mu-\lambda)d}}$$

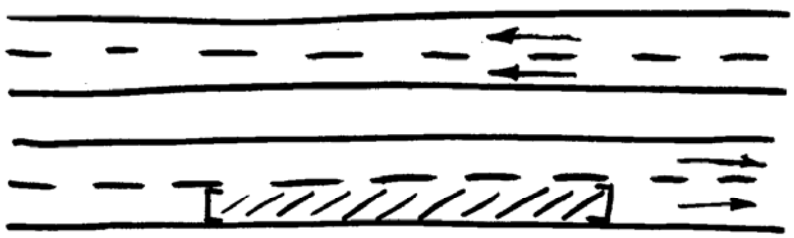
- LA FONCTION DE REPARTITION

$$\boxed{P(d) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)d}}$$

- LA MOYENNE

$$\boxed{\bar{d} = \frac{1}{\mu-\lambda}}$$

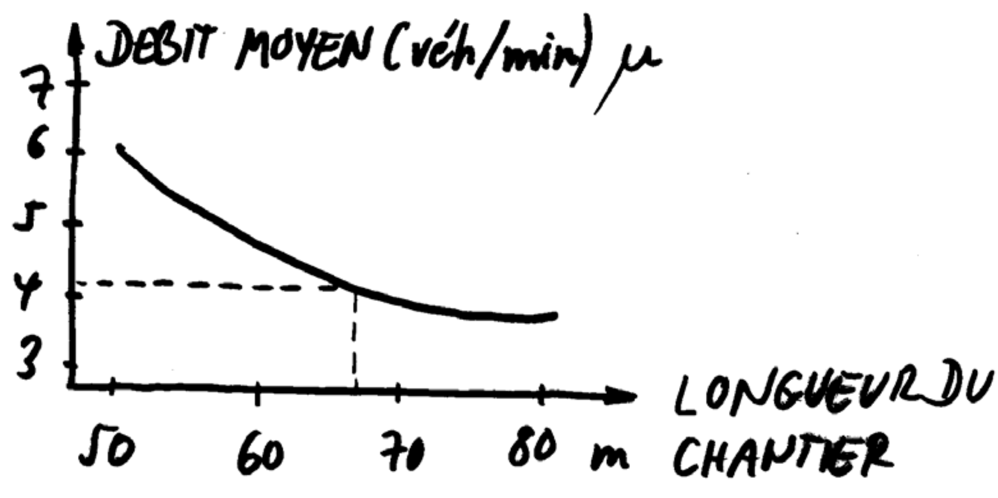
EXEMPLE



ON VEUT TRAVAILLER SUR DES TRONÇONS IMPORTANTS. LA CIRCULATION, PAR CONTRE, SERA D'AUTANT PLUS RALENTIE QUE LE PASSAGE RETRECI SERA PLUS LONG.

LES TEMPS DE PASSAGE DES VEHICULES DANS L'ETRANGLEMENT SUIVENT UNE LOI EXPONETIELLE.

LE DEBIT MOYEN PEUT ETRE REPRESENTE EN FONCTION DE LA LONGUEUR DU TRONÇON.



ON A OBSERVÉ, AVANT LES TRAVAUX, LES FRÉQUENCES D'ARRIVÉES SUR 200 MIN.

DÉBIT (v/min)	FRÉQUENCES OBSERV.	FRÉQUENCES THÉORI	$\frac{(F_t - F_o)^2}{F_t}$
0	6	5	0.2
1	15	18	0.5
2	40	34	1.06
3	42	42	0
4	37	39	0.1
5	30	28	0,14
6	10	18	3.56
7	9	9	0
8	5	4	
9	3	2	2.29
10	2	1	
11	1	0	
	$\bar{X} = 3,7$		Σ 7,85
	$s^2 = 4,23$		

(8 à 11 regroupés : 11 observées ; 7 théoriques)

$\chi^2_{7, 0.05} = 14.07$ IL N'Y A PAS LIEU DE REJETER L'HYPOTHÈSE DE LA LOI DE POISSON

TAUX D'ARRIVÉE $\lambda = 3.7$ POISSON.

SUPPOSONS QUE L'ON VEUILLE CHOISIR LA LONGUEUR DE MANIÈRE QUE LE TEMPS D'ATTENTE MOYEN SOIT DE 2 MINUTES.

TAUX DE SERVICE μ	LONGUEUR MOY DE LA FILE $\bar{n} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	TEMPS MOYEN D'ATTENTE $\bar{t} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$
3.75	74	19.7
3.8	37	9.7
3.9	18.5	4.7
4.0	12.3	3.1
4.2	7.4	1.8
4.4	5.3	1.2
4.6	4.1	0,9
4.8	3.4	0.7
5.0	2.8	0.6

$$\frac{3.7}{\mu(\mu-3{,}7)} = 2 \ ; \ \mu = 4.15$$

- LONGUEUR ENVIRON 67 m
- LA FILE D'ATTENTE COMPTERAIT EN MOYENNE 9.2 VEHICULES
- VALEUR EXTREME (PROB. DE DEPASSEMENT 0,05)

P = 0.95 DANS LA FONCTION DE REPARTITION

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}89$$

	LONGUEUR DE LA FILE	TEMPS
0.05	$0{,}95 = 1 - 0{,}89^{(n+1)}$	$0{,}95 = 1 - 0.89\,e^{-0.45t}$
	$n = 25$	$t = 6.4$
0,01	$n = 39$	$t = 10$

SUR 100 FILES CONSTATEES, ON AURAIT, EN MOYENNE, QUE 5 DE PLUS DE 25 VOITURES ET UNE DE PLUS DE 39.

EXEMPLE : M/M/1

DECRIRE LES CARACTERISTIQUES DU SYSTEME SUIVANT (SORTIE DE GARAGE). UNE SEULE VOIE AVEC UN GUICHET OÙ ON PERÇOIT LES FRAIS DE STATIONNEMENT. LE TEMPS DE SERVICE EST NEG. EXP. DISTRIBUE AVEC $\frac{1}{\mu} = \overline{T_S} = 15\,s$ ET LES ARRIVEES AU GUICHET AU TAUX $\lambda = 120\ v/h$.

$$\mu = 4 \text{ services/min} = 240 \text{ s/h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{120}{240} = 0.5$$

a) LA PROBABILITE DE RENCONTRER UN GUICHET INOCCUPE.

$$P_0 = 1 - \rho = 0.5$$

b) LA PROBABILITE DE n VEHICULES DANS LE SYSTEME PLACES DE STOCKAGE POUR 95% DE PROBABILITE QUE LA FILE DEVANT LE GUICHET N'INTERFERE PAS AVEC LA CIRCULATION DANS LE GARAGE.

	$P_{x=n}$	$P_{x\leq n}$	
P_0	0,5	0,5	
P_1	0,25	0,75	
P_2	0,125	0,875	
P_3	0,0625	0,9375	95% : 3 VEHICULES
P_4	0,03125	0,969	
P_5	0,01562	0,984	99% : 5 OU 6 VEHIC.

c) NOMBRE MOYEN DANS LE SYSTEME

$$E(n) = \frac{\rho}{1-\rho} = 1$$

d) NOMBRE MOYEN DANS LA FILE

$$E(q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = 0.5$$

e) NOMBRE MOYEN DANS UNE FILE NON ZERO

$$E(q \mid q>0) = 2$$

f) TEMPS D'ATTENTE MOYEN DANS LE SYSTEME

$$\bar{d} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 0.5 \text{ min}$$

g) TEMPS D'ATTENTE DANS LA FILE

$$\bar{w} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \bar{d} - \frac{1}{\mu} = 0{,}25 \text{ min}$$

h) PROBABILITE DE DEVOIR ATTENDRE PLUS QUE 2 MIN.

$$p(d > 2\text{min}) = e^{-(1-\rho)\mu t} = e^{-4} = 0{,}018$$

RESUMÉ DES FORMULES POUR LE SYSTEME

$M/M/1 : (N/FIFO)$

$$P_0 = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}}$$

$$P_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^n$$

$$\bar{q} = \frac{1 - N\rho^{N+1} + (N-1)\rho^N}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})} \cdot \rho^2$$

$$\bar{w} = \bar{q}/\lambda$$

$$\bar{d} = \bar{w} + \frac{1}{\mu}$$

SYSTEME A CANAUX MULTIPLES (M/M/K)

- ON PEUT, PAR EX., CONSIDERER UN PARC DE STATIONNEMENT (OU LE STATIONNEMENT LE LONG DU TROTTOIR) COMME UN SYSTEME AVEC DES CANAUX PARALLELES, OÙ LES k ESPACES DE STATIONNEMENT REPRESENTENT LES GUICHETS.

- ARRIVEES ET DEPARTS ALEATOIRES AVEC $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\mu}$ ET $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

- ρ/K EST DEFINI COMME FACTEUR D'UTILISATION POUR L'ENSEMBLE DU SYSTEME CE QUI REPRESENTE LA PROPORTION MOYENNE DE STATIONNEMENTS OCCUPES.

- ρ PEUT ETRE >1 DANS CE CAS, MAIS LES FORMULES NE S'APPLIQUENT QUE DANS LE CAS OÙ $\rho/K < 1$.

RESUME DES FORMULES POUR LE SYSTEME M/M/K

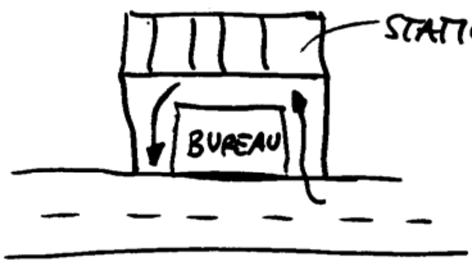
Table 7-9 Multiple-Station Queuing Relationships with Poisson Arrivals, Exponential Service Times, and Leading Traffic Unit in Queue Moving to First Available Station, for Steady-State Conditions

Queueing model†	Description of model
1 $p(n) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p(0)$ for $n = 0, 1, \ldots, k-1$	$p(n)$ = probability of having exactly n vehicles in system for $0 \le n < k$
2 $p(n) = \frac{1}{k!k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p(0)$, for $n \ge k$	$p(n)$ = probability of having exactly n vehicles in system for $n \ge k$
3 $p(0) = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}$	$p(0)$ = probability of having zero vehicles in system
4 $\bar{n} = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}p(0) + \frac{\lambda}{\mu}$	$\bar{n}$ = average no. of vehicles in system
5 $\bar{q} = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}p(0)$	$\bar{q}$ = average length of queue
6 $\bar{d} = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}p(0) + \frac{1}{\mu}$	$\bar{d}$ = average time spent in system
7 $\bar{w} = \frac{\mu(\lambda/\mu)^k}{(k-1)!(k\mu-\lambda)^2}p(0)$	$\bar{w}$ = average time spent waiting in queue
8 $p(d \le t) = 1 - e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{p(n \ge k)}{k} \times \frac{1 - e^{-\mu k t[1-(\lambda/\mu k)-(1/k)]}}{1-(\lambda/\mu k)-(1/k)}\right\}$	$p(d \le t)$ = probability of having spent time t or less in system
9 $p(n \ge k) = \sum_{n=k}^{\infty} p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{p(0)}{k!\left(1 - \frac{\lambda}{\mu k}\right)}$	$p(n \ge k)$ = probability of having to wait in queue

† k = number of service stations or service channels, each having a servicing rate μ
λ_k = mean arrival rate per station
$\lambda = k\lambda_k$
$\rho = \lambda/k\mu$ = traffic intensity
Source: Wohl and Martin (1967, p. 368).

10 $E(w \mid w>0) = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{1-\rho/K}$	Average waiting time for an arrival who waits
11 $P_{n>K} = P_0\,\frac{\rho^{K+1}}{k!\,K/(1-\rho/K)}$	Probability of waiting for an empty space.

EXEMPLE M/M/K



ARRIVEES $\lambda = 4\ v/h$

DUREE DE STAT. EXPON.

$\overline{T_S} = 0{,}5\ h$ $(\mu = 2)$

QUELLES SONT LES CARACTERISTIQUES ?

$k = 5$, $\lambda = 4\ v/h$; $\mu = 2\ v/h$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2$

$\rho/k = 0.4$

a) LA PROBABILITE DE TROUVER UNE PLACE LIBRE :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!\,(1-\rho/k)}} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!\ 0.6}}$$

$$P_0 = 0{,}1343$$

b) LA PROBABILITE QUE n VEHICULES STATIONNENT

$$P_n = \left(\frac{\rho}{n}\right) P_{n-1}$$

$$P_0 = 0{,}1343$$

$$P_1 = 2P_0 = 0{,}2686$$

$$P_2 = P_1 = 0{,}2686$$

$$P_3 = 2/3\,P_2 = 0{,}1791$$

$$P_4 = 2/4\,P_3 = 0.0896$$

$$P_5 = 2/5\,P_4 = 0{,}0358$$

c) LA PROBABILITE QU'UN VEHICULE DOIT ATTENDRE S'IL ARRIVE.

$$P_{n>K} = P_0 \frac{\rho^{K+1}}{K!\,K(1-\rho/K)} = 0{,}1343 \frac{2^6}{5!\,5\cdot 0{,}6} = 0.0239$$

d) LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES QUI ATTENDENT POUR AVOIR UNE PLACE VIDE (FILE)

$$\bar{q} = P_0 \frac{\rho^{K+1}}{K!\,K}\left[\frac{1}{(1-\rho/K)^2}\right] = 0.1343 \frac{2^6}{5!\,5\cdot 0{,}6^2} = 0.04 \text{ véh.}$$

e) LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES ATTENDANT SI LE STATIONNEMENT EST OCCUPE.

$$E(q\,|\,q>0) = \frac{1}{1-\rho/K} = 1{,}67 \text{ véhicules}$$

f) LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES STATIONNES ET EN ATTENTE

$$E(n) = \rho + E(q) = 2 + 0{,}0398 = 2.04 \text{ véh.}$$

g) TEMPS MOYEN UN VEHICULE PASSE EN STATIONNEMENT ET EN ATTENTE

$$\bar{d} = E(n)/\lambda = 2.04/4 = 0{,}51\ h$$

h) TEMPS MOYEN PASSE EN ATTENDANT UNE PLACE LIBRE

$$\bar{w} = \bar{d} - \frac{1}{\mu} = 0{,}51 - 0{,}5 = 0{,}01\ h$$

M/M/∞

SYSTEMES AVEC UN NOMBRE ∞ DE CANAUX

EXEMPLE : STATIONNEMENT AVEC DE NOMBREUSES PLACES

$$\lim_{k \to \infty} P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \rho^n/n! + \rho^k/k!(1-\rho/k)} = \frac{1}{e^\rho} = e^{-\rho}$$

LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES DANS LE SYSTEME :

$$E(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \rho P_0 \left(\underbrace{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots}_{e^\rho} \right) = \rho$$

- LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES DANS LE PARC EST :

$$E(n) = \rho \frac{\sum_{n=0}^{K-1} \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!}}{\sum_{n=0}^{K} \frac{\rho^n e^{-\rho}}{n!}}$$

CECI PEUT ETRE CALCULE A L'AIDE DES TABLEAUX DE POISSON.

EXEMPLE:

MEMES DONNEES QUE PRECEDEMMENT SAUF QUE LES CONDUCTEURS N'ATTENDENT PAS DE PLACE LIBRE.

$N=5$, $\lambda=4$, $\mu=2$, $\rho=2$, $\rho/K = 0.4$

LA PROBABILITE D'UNE PLACE LIBRE:

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}} = 0.1376$$

$$P_1 = 2/1\, P_0 = 0.2752$$
$$P_2 = 2/2\, P_1 = 0.2752$$
$$P_3 = 2/3\, P_2 = 0.1835$$
$$P_4 = 2/4\, P_3 = 0.0917$$
$$P_5 = 2/5\, P_4 = 0.0367$$

← Probabilité qu'un vehicule arrivant ne peut pas stationner

LE NOMBRE MOYEN DE VEHICULES STATIONNES

$$E(n) = 2 \cdot \frac{0.947}{0.983} = 1.93$$

SYSTEMES AVEC PERTES

PARTICULIEREMENT DANS LE CAS DU STATIONNEMENT IL SE TROUVE SOUVENT QUE LES VEHICULES, QUI NE PEUVENT PAS TROUVER DE PLACE, QUITTENT LA FILE.

$$P_n = 0 \qquad \text{pour } n > K$$

- LA PROBABILITE QUE n VEHICULES SOIENT STATIONNES:

$$P_n = \frac{\rho^n / n!}{\sum_{i=0}^{K} \rho^i / i!} \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots K$$

- LA PROBABILITE D'UN STATIONNEMENT LIBRE :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K} \rho^i / i!}$$

- LA PROBABILITE QU'UN VEHICULE ARRIVANT NE PEUT PAS STATIONNER (≡ K PLACES SONT OCCUPÉES)

$$P_K = \frac{\rho^K / K!}{\sum_{i=0}^{K} \rho^i / i!}$$

DISTRIBUTIONS NON EXPONENTIELLES DES TEMPS DE SERVICE ET D'ARRIVEE

SI LA DISTRIBUTION DES TEMPS DE SERVICE EST QUELCONQUE ON PEUT UTILISER LA FORMULE DE POLLACZAK-KHINTCHINE POUR CALCULER LE RETARD MOYEN DANS LA FILE UNIQUE.

$$\bar{W} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \bar{T_s} \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\bar{T_s}^2}\right)$$

$$K = \frac{\bar{T_s}^2}{\sigma_s^2}$$

$$\boxed{\bar{W} = \frac{\rho \bar{T_s}}{2(1-\rho)} \frac{K+1}{K}}$$

POUR SERVICE REGULIER $K = \infty$

$$\bar{W} = \frac{\rho \bar{T_s}}{2(1-\rho)}$$

CECI REPRESENTE LA MOITIE DU TEMPS D'ATTENTE DU CAS DE SERVICE EXPONENTIEL.

Single-Station Queueing Relationships with Poisson Arrivals and Constant Service Times for Steady-State Conditions

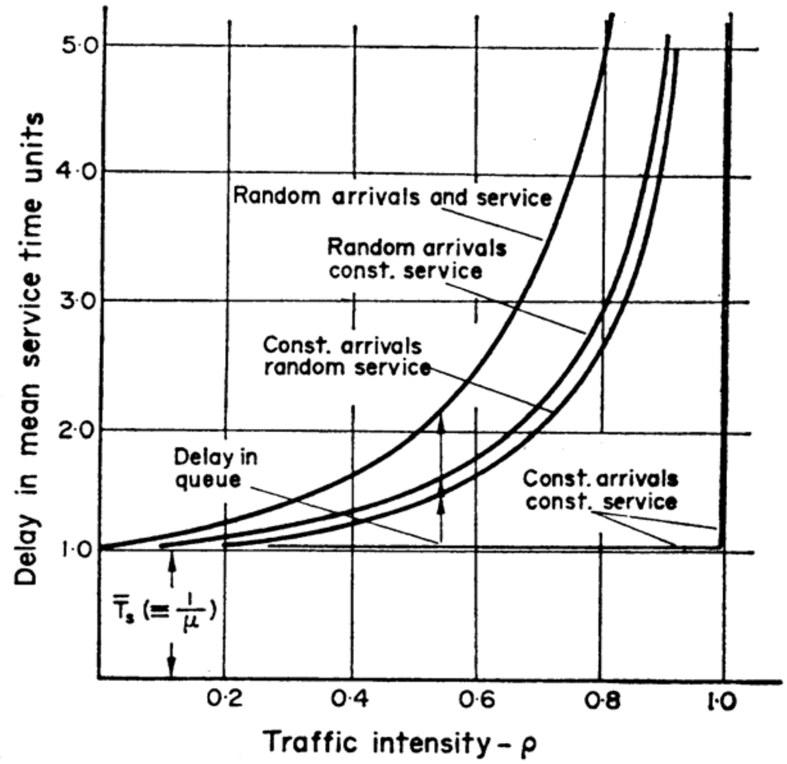
Queueing model†		Description of model
1	$\bar{q} = \dfrac{2\rho - \rho^2}{2(1-\rho)}$	$\bar{q}$ = average length of queue
2	$\bar{d} = \dfrac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)}$	$\bar{d}$ = average time spent in system
3	$\bar{w} = \dfrac{\rho}{2\mu(1-\rho)}$	$\bar{w}$ = average waiting time spent in queue

† λ = mean arrival rate
μ = constant service rate
ρ = traffic intensity = λ/μ
Source: Haight (1963, p. 60).

REMARQUES GENERALES

- LA RELATION ENTRE DEBIT ET RETARD DEPEND DES HYPOTHESES FAITES POUR LES ARRIVEES ET DEPARTS.
- LE RETARD TEND VERS ∞ LORSQUE LE DEGRE DE SATURATION SE RAPPROCHE DE 1.
- POUR $\rho \rightarrow 0$ LE RETARD TEND VERS LE TEMPS MOYEN DE SERVICE $\left(\frac{1}{\mu}\right)$
- REDUIRE LA VARIANCE DANS LES TEMPS D'ARRIVEE ET DE SERVICE CONTRIBUE A REDUIRE LES RETARDS SURTOUT POUR ρ PLUS GRAND.
- ON AMELIORE SENSIBLEMENT L'EFFICACITE DE L'OPERATION EN AJOUTANT DES CANAUX.

(VOIR FIGURE)



3.6. Delay flow characteristics of single-channel traffic element for certain limiting arrival and service distributions.

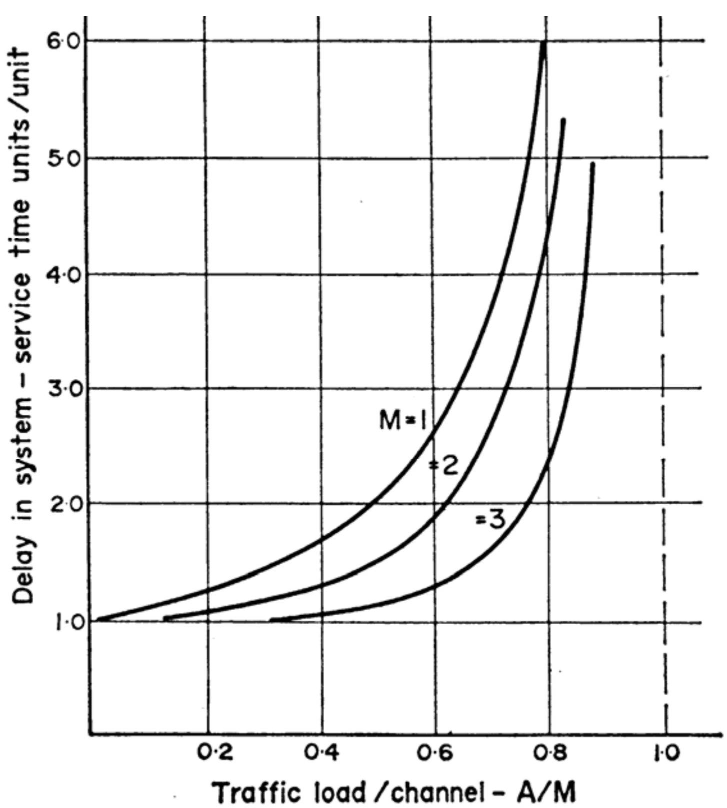


FIG. 3.7. Comparative performance of multi-channel queueing facili with same load per channel.

EXEMPLE : ARRET D'AUTOBUS

LES TEMPS DE CHARGEMENT ET DE DECHARGEMENT ONT ETE OBSERVES A UN ARRET D'AUTOBUS. (220 OBSERVATIONS). QUEL EST LE DEBIT DE SERVICE MAXIMAL DE L'ARRET ET QUELLE EST LA RELATION DEBIT - RETARD ?

$$S_{max} = \frac{3600}{\bar{T}_s} = \frac{3600}{29.7} = 121 \text{ bus/h}$$

POUR OBTENIR LE RETARD, ON UTILISE L'EQUATION POLLACZAK-KHINTCHINE.

$$\bar{w} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \bar{T}_s \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\bar{T}_s^2} \right)$$

AVEC $\bar{T}_s = 0{,}495$ min ET $\frac{\sigma_s^2}{\bar{T}_s^2} = \frac{267}{29.7^2} = 0{,}303$

PAR EX : $q = \lambda = 60$ bus/h

$$\rho = \frac{60}{121} = 0{,}5$$

$$\bar{w} = \frac{0.5}{2 \cdot 0.5} 0.495(1 + 0{,}303) = 0{,}32 \text{ min}$$

RETARD DANS LE SYSTEME :

$$\bar{d} = \bar{w} + \frac{1}{\mu} = 0{,}32 + 0{,}5 = 0{,}82 \text{ min}$$

ON AURAIT PU ADAPTER UNE DISTRIBUTION ERLANG $K = \frac{1}{0.3} = 3$ AUX DONNEES !

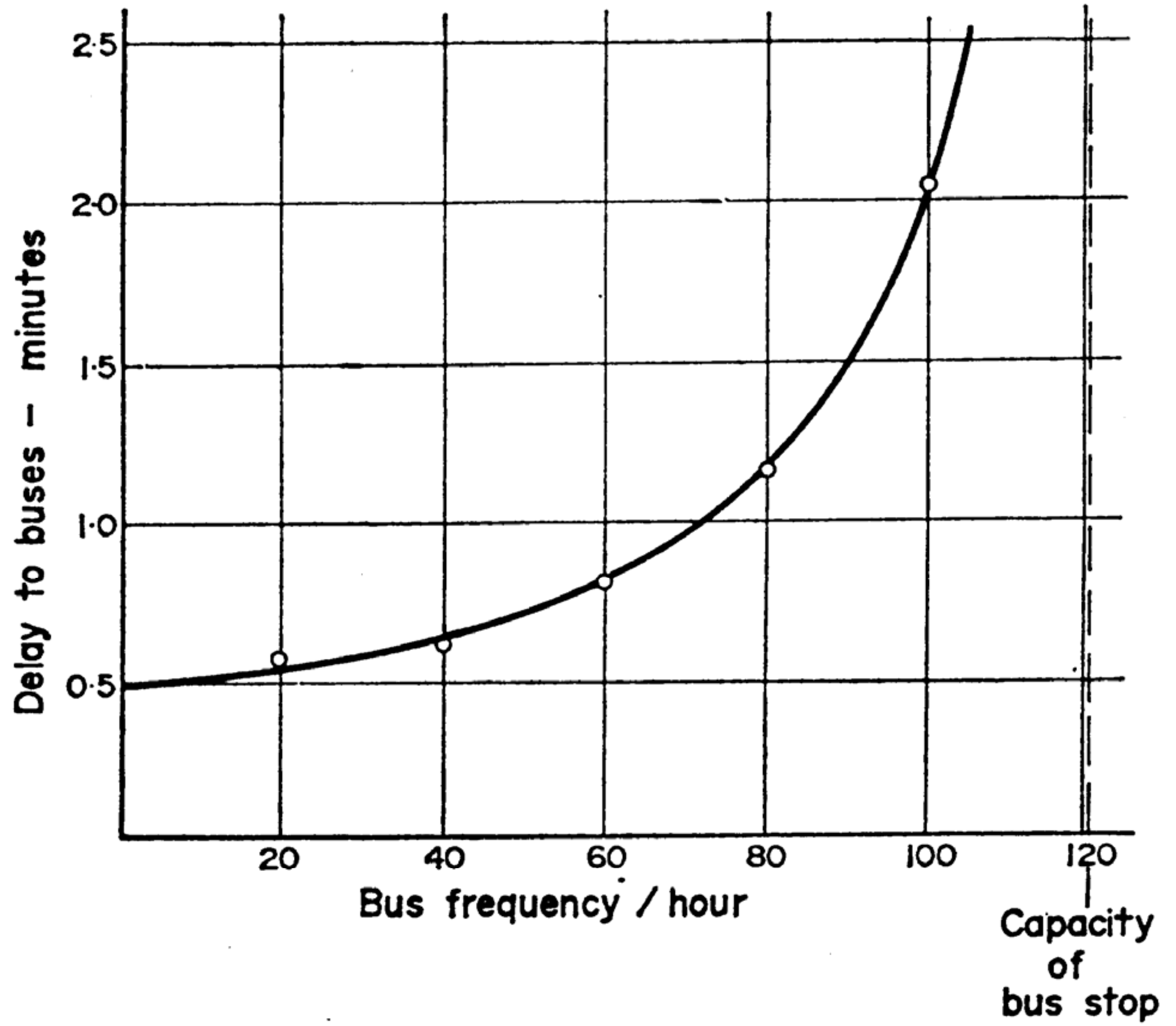


FIG. 3.4(e). Total delay (i.e. loading time plus waiting) suffered by buses at kerbside stop.

TABLE 3.2. FREQUENCY DISTRIBUTION OF LOADING/UNLOADING TIMES FOR A SAMPLE OF BUSES AT A CENTRAL SYDNEY BUS STOP

Loading/unloading times—t (sec)	frequency f	$f \times t$	$f \times t^2$
0–5·9	4	12	36
6–11·9	19	171	1539
12–17·9	32	480	7200
18–23·9	44	924	19,404
24–29·9	33	891	24,057
30–35·9	22	726	23,958
36–41·9	17	663	25,857
42–47·9	16	720	34,200
48–53·9	11	561	28,611
54–59·9	9	513	29,241
60–65·9	6	378	23,814
66–71·9	5	345	23,805
72–77·9	2	150	11,250
78	0	0	0
	220	6534	252,972

Therefore $\bar{T}_s = 29{\cdot}7$ sec and $\sigma_s^2 = 267$ sec^2.

TABLE 3.3.

Flow q/hr	Traffic load A $(=\rho)$	$\bar{W}_q$ (min)	$\bar{W}$ (min)
0	0	0	0·50
20	0·17	0·07	0·57
40	0·33	0·12	0·62
60	0·50	0·32	0·82
80	0·66	0·64	1·14
100	0·83	1·57	2·07