

MEC6418 - NOTES DE COURS

Formulation de lois de comportement viscoélastiques linéaires

Par: Martin Lévesque
professeur du département de génie mécanique

Hiver 2011

▷ Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

Introduction

Introduction

▷ Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

- Lorsque sollicités, certains matériaux ont une réponse instantanée. C'est le cas des céramiques et des matériaux métalliques dans le domaine élastique. On parle alors de matériaux élastiques.
- Certains matériaux comme les polymères ou les tissus organiques ont des réponses différées. On peut parler de comportement viscoélastique.
 - Lorsque l'on applique une déformation et que l'on mesure l'évolution de la contrainte en fonction du temps, on parle de *relaxation*.
 - Lorsque l'on applique une contrainte et que l'on mesure l'évolution de la déformation, on parle de *fluage*.
 - Il est important de remarquer ici que les notions de chargement et de temps interviennent dans la définition d'un comportement viscoélastique.
 - ▷ On s'intéressera donc aux histoires de chargement et de réponses, au lieu que de s'intéresser à une valeur ponctuelle, fixée dans le temps, de la réponse et du chargement.

- Introduction
- Introduction
- ▷ Fluage
- Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation
- Généralisation
- Ress. – Amort.
- Maxwell
- Voigt
- Zener
- Conclusion

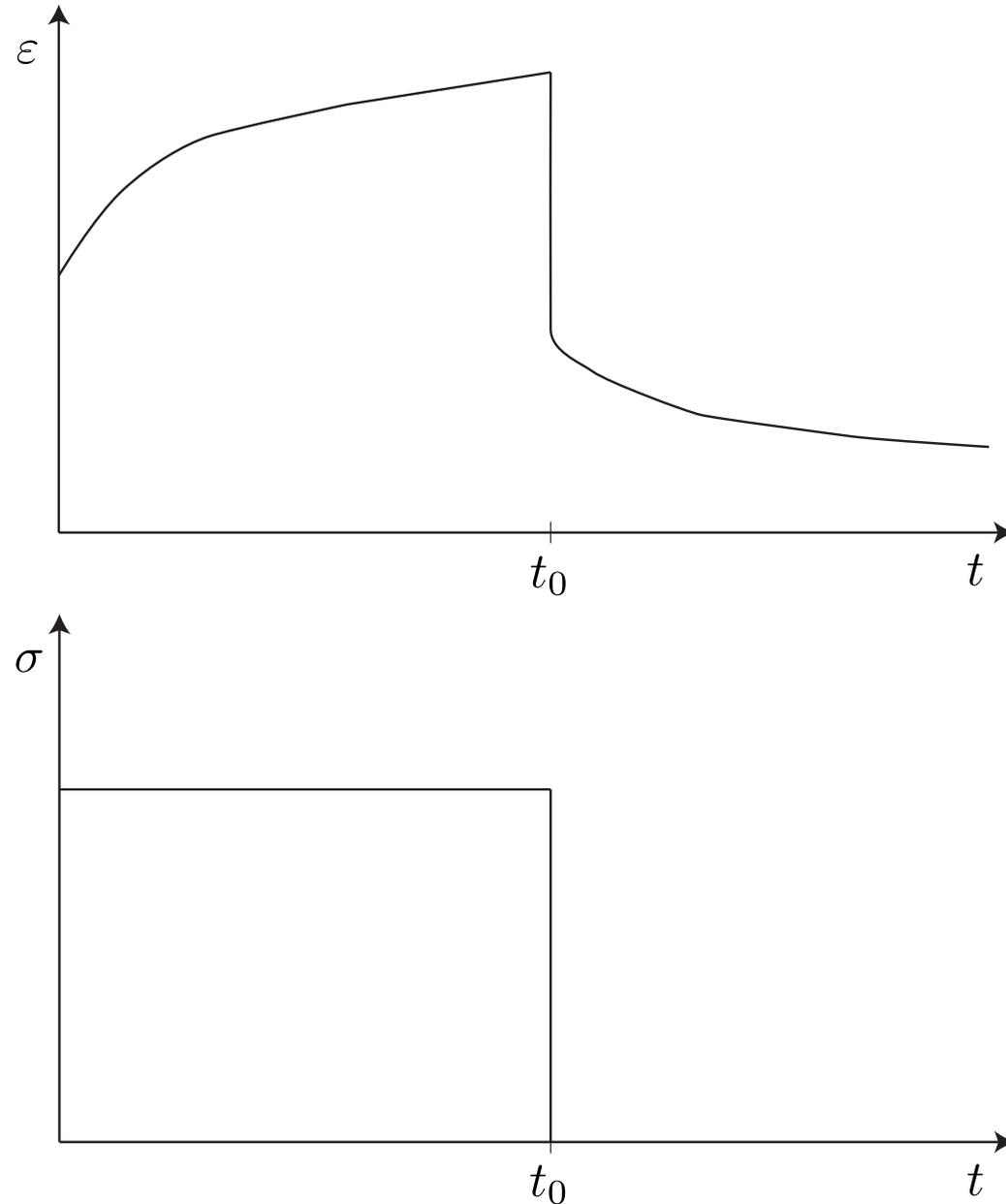


Figure 1: Schématisation d'un essai de fluage – recouvrance 1D

- Introduction
- Introduction
- Fluage
- ▷ Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation
- Généralisation
- Ress. – Amort.
- Maxwell
- Voigt
- Zener
- Conclusion

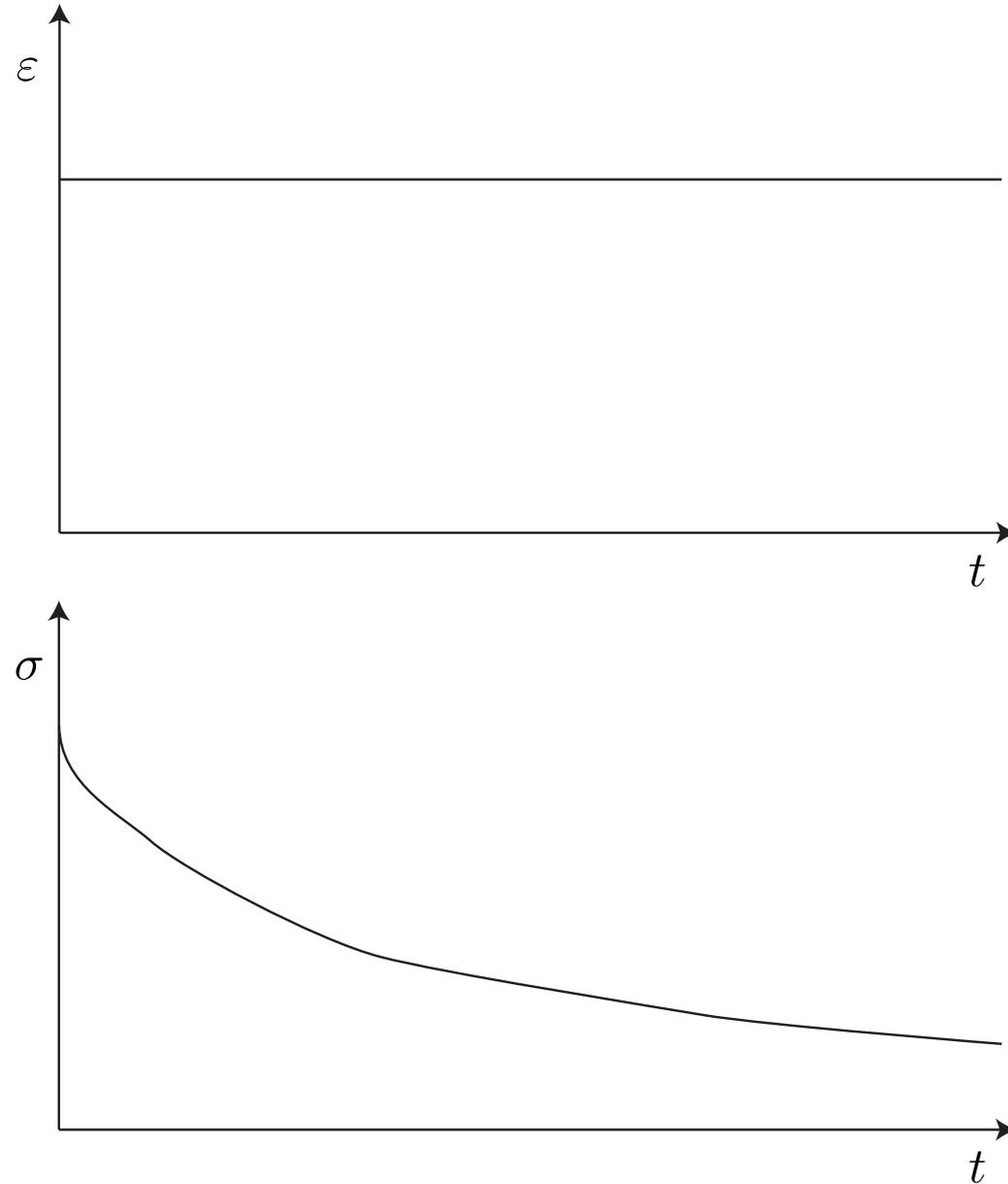


Figure 2: Schématisation d'un essai de relaxation 1D

→ Reprenons l'inégalité de Clausius-Duhem

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0$$

et ré-écrivons-la sous la forme:

$$\boldsymbol{\alpha} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\beta} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (1)$$

- $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sont appelées forces thermodynamiques et représentent la part non réversible de l'énergie dépensée par le matériau
- La première hypothèse en viscoélasticité linéaire est que les forces thermodynamiques sont reliées linéairement aux taux de déformation et variables internes, de sorte que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (2)$$

- On peut ici interpréter cela comme des forces visqueuses car elles dépendent linéairement du taux de déformation, comme un amortisseur.

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

 Hypothèses

▷ viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ Si l'on injecte ce résultat dans l'inégalité de Clausius-Duhem, on obtient:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{A} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\boldsymbol{\xi}} : \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad (3)$$

→ Ceci implique que \mathbf{A} et \mathbf{B} sont semi-définies positives, c'est-à-dire que toutes leurs valeurs propres sont supérieures ou égales à 0.

→ On fera l'hypothèse que ces matrices sont symétriques (la justification sort du cadre du cours).

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

 Hypothèses

▷ viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ La seconde hypothèse est que l'énergie libre est une expansion de Taylor des variables observables et cachées (**demo**):

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{L}_1 : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L}_2^T : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi} : \mathbf{L}_3 : \boldsymbol{\xi} \right) \quad (4)$$

où:

$$\mathbf{L}_1 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\xi}} \quad ; \quad \mathbf{L}_3 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi} \partial \boldsymbol{\xi}} \quad (5)$$

→ Cette relation peut aussi se mettre sous la forme:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \left[\boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\xi} \right] : \mathbf{L} : \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad (6)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ (\mathbf{L}_2)^T & \mathbf{L}_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

 Hypothèses

▷ viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

- Introduction
- Introduction
- Fluage
- Relaxation
 - Hypothèses
 - ▷ viso.
- Application
- Interprétation
- Généralisation
- Ress. – Amort.
- Maxwell
- Voigt
- Zener
- Conclusion

- En viscoélasticité linéaire, on suppose que l'énergie libre est minimale à l'état de référence, c'est à dire pour $\varepsilon = \xi = \mathbf{0}$.
- Ceci est équivalent à dire que le chargement va contribuer à augmenter l'énergie interne emmagasinée dans le matériau, tel un ressort que l'on étire.
- Ceci a comme conséquence que $\underline{\text{grad}}(\Psi) = \mathbf{0}$. C'est donc pour cela que les dérivées premières ne sont pas dans l'expansion de Taylor.
- Comme la fonction est à un minimum à l'état de référence et que le développement de Taylor est fait pour cet état, il faut que:

$$\mathbf{L} \geq 0 \quad (8)$$

Ceci implique que $\mathbf{L}_1 \geq 0$ et que $\mathbf{L}_3 \geq 0$.

- En effet, on pourrait trouver une base où \mathbf{L} est diagonale. Dans cette base, il est clair que les matrices diagonalisées \mathbf{L}_1 et \mathbf{L}_3 doivent être semi-définies positives.

- Voyons comment nous pouvons appliquer tout cela...
- Avec l'inégalité de Clausius-Duhem et les équations (1,2) on obtient que (**demo**):

$$\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

et si l'on développe, on a (en utilisant la définition de Ψ):

$$\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L}_3 : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_2^T : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (10)$$

- Cette équation est fondamentale car elle relie l'évolution des variables internes aux variables observables
- Ici, c'est une équation différentielle couplée
- On peut montrer qu'il est toujours possible de trouver une base dans laquelle \mathbf{B} et \mathbf{L}_3 sont simultanément diagonales, de telle sorte que:

$$B_{rr} \dot{\xi}_r + L_{3rr} \xi_r + L_{2ir} \varepsilon_i = 0 \quad (\text{pas de somme sur } r) \quad (11)$$

$$B_{rr}\dot{\xi}_r + L_{3rr}\xi_r + L_{2ir}\varepsilon_i = 0 \text{ (pas de somme sur } r \text{)}$$

- Dans cette équation il est supposé que toutes les matrices ont été exprimées dans cette nouvelle base qui permet de diagonaliser simultanément \mathbf{B} et \mathbf{L}_3 .
- Cette relation transforme un système d'équations différentielles couplées en r équations différentielles découplées, ce qui simplifie considérablement la résolution.
- On doit ici solutionner une équation différentielle 1D et pour chaque équation r la forme de la solution sera identique.
- Pour solutionner, nous allons introduire la transformée de Laplace, qui est un outil incontournable en viscoélasticité. La transformée de Laplace d'une fonction f est donnée par:

$$\mathcal{L}(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp[-st] f(t) dt \quad (12)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

$$\mathcal{L}(f) = \tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp[-st] f(t) dt$$

→ Une des propriétés de la transformée de Laplace est que

$$\mathcal{L}(\dot{f}) = s\tilde{f}(s) - f(0) \quad (13)$$

qui fait intervenir les conditions initiales.

→ Dans notre problème, à l'état initial, $\xi_r(0) = 0$.

→ Alors, si l'on applique la transformée de Laplace à l'équation (11), on obtient:

$$(sB_{rr} + L_{3_{rr}}) \tilde{\xi}_r = -L_{2_{ir}} \tilde{\varepsilon}_i \quad (14)$$

→ La transformée de Laplace de $\exp[-at]$ est:

$$\mathcal{L}(\exp[-at]) = \frac{1}{s+a} \quad (15)$$

→ En divisant par B_{rr} de chaque côté, on aura:

$$\tilde{\xi} = - \left(\frac{L_{2ir}}{B_{rr}} \frac{1}{s + \frac{L_{3rr}}{B_{rr}}} \right) \tilde{\varepsilon}_i \quad (16)$$

→ La transformée de Laplace a deux autres propriétés qui nous seront utiles. La première est celle de la convolution:

$$\tilde{f}(s)\tilde{g}(s) = \mathcal{L} \left(\int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right) \quad (17)$$

→ La seconde est celle de l'intégration:

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t f(\tau)d\tau \right) = \frac{\tilde{f}(s)}{s} \quad (18)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ Nous allons solutionner par étapes. De l'équation (16) on peut voir que:

$$\tilde{\xi} = -\mathcal{L} \left(\frac{L_{2ir}}{B_{rr}} \exp \left[-\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} t \right] \right) \tilde{\varepsilon}_i \quad (19)$$

→ On peut ré-écrire cette équation sous la forme:

$$\tilde{\xi} = -\frac{1}{s} \mathcal{L} \left(\frac{L_{2ir}}{B_{rr}} \exp \left[-\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} t \right] \right) (s\tilde{\varepsilon}_i) \quad (20)$$

→ En utilisant la propriété d'intégration, de dérivation et le fait que $\varepsilon_i(0) = 0$, on a:

$$\tilde{\xi} = -\mathcal{L} \left(\frac{L_{2ir}}{L_{3rr}} \left(1 - \exp \left[-\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} t \right] \right) \right) \mathcal{L} (\dot{\varepsilon}_i(t)) \quad (21)$$

→ Finalement, en utilisant la propriété de convolution, on obtient:

$$\xi_r(t) = - \int_0^t \frac{L_{2ir}}{L_{3rr}} \left(1 - \exp \left[-\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \right) \frac{d\varepsilon_i(t)}{d\tau} d\tau \quad (22)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

- A quoi tout cela nous sert-il ?
- On a obtenu avant que la loi de comportement s'écrit:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$$

qui est évaluée en considérant les variables internes comme constantes.

- On a donné une forme à Ψ en série de Taylor à l'équation (4). Alors, si l'on applique la loi de comportement, on aura:

$$\sigma_i(t) = L_{1_{ij}} \varepsilon_j(t) + L_{2_{ir}} \xi_r(t) \quad (23)$$

- Comme on connaît $\xi_r(t)$, on aura:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) = & \left(L_{1_{ij}} - \frac{L_{2_{ir}} L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \right) \varepsilon_j(t) \\ & + \int_0^t \frac{L_{2_{ir}} L_{2_{jr}}}{L_{3_{rr}}} \exp \left[-\frac{L_{3_{rr}}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \frac{d\varepsilon_j(\tau)}{d\tau} d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

$$\sigma_i(t) = \left(L_{1ij} - \frac{L_{2ir} L_{2jr}}{L_{3rr}} \right) \varepsilon_j(t) + \int_0^t \frac{L_{2ir} L_{2jr}}{L_{3rr}} \exp \left[-\frac{L_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \frac{d\varepsilon_j(t)}{d\tau} d\tau$$

→ Cette équation peut se mettre sous la forme:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{C}^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{C}^{(i)} \exp[-\omega_i(t - \tau)] : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} d\tau \quad (25)$$

où: (demo)

- Les $\mathbf{C}^{(i)} \geq 0$ et symétriques et peuvent représenter toutes les symétriques matérielles possibles (isotropie, isotropie transverse, anisotropie, etc.)
- Les $\omega_i > 0$

→ Prendre note que des valeurs propres répétées du système $(\lambda \mathbf{B} + \mathbf{L}_3)$ sont nécessaires pour représenter toutes les classes de symétries matérielles

→ Pour les déformations, on peut utiliser l'équation (23) qui nous donnera:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= \mathbf{L}_1^{-1} : [\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi}] \\
 &= \mathbf{L}_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi} \\
 &= \mathbf{A}_1 : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A}_2 : \boldsymbol{\chi}
 \end{aligned} \tag{26}$$

→ Si on remplace ε dans la loi d'évolution (10), on aura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0} &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + \mathbf{L}_3 : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_2^\top : [\mathbf{L}_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2 : \boldsymbol{\xi}] \\
 &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\xi}} + [\mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2^\top : \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2] : \boldsymbol{\xi} + \mathbf{L}_2^\top : \mathbf{L}_1^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \\
 &= \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{A}_3 : \boldsymbol{\chi} + \mathbf{A}_2^\top : \boldsymbol{\sigma}
 \end{aligned} \tag{27}$$

où ici les variables internes $\boldsymbol{\xi}$ ont été remplacées par $\boldsymbol{\chi}$ pour illustrer qu'elles dépendent de $\boldsymbol{\sigma}$. De plus, il est facile de montrer que $\mathbf{A}_1 \geq 0$ et $\mathbf{A}_3 \geq 0$.

→ On peut donc voir que l'on a une forme très similaire à la loi de comportement où on exprime $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de ε .

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ Si on solutionne pour χ on aura:

$$\chi_r(t) = - \int_0^t \frac{A_{2ir}}{A_{3rr}} \left(1 - \exp \left[-\frac{A_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \right) \frac{d\sigma_i(t)}{d\tau} d\tau \quad (28)$$

→ On aura donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(t) = & A_{1ij} \sigma_j(t) \\ & + \int_0^t \frac{A_{2ir} A_{2jr}}{A_{3rr}} \left(1 - \exp \left[-\frac{A_{3rr}}{B_{rr}} (t - \tau) \right] \right) \frac{d\sigma_j(t)}{d\tau} d\tau \quad (29) \end{aligned}$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ Au final, on aura la loi de comportement suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{S}^{(0)} : \boldsymbol{\sigma}(t) + \int_0^t \sum \mathbf{S}^{(i)} (1 - \exp[-\lambda_i(t - \tau)]) : \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\tau} d\tau \quad (30)$$

où:

- Les $\mathbf{S}^{(i)} \geq 0$ et symétriques et peuvent représenter toutes les symétriques matérielles possibles (isotropie, isotropie transverse, anisotropie, etc.)
- Les $\lambda_i > 0$

→ Nous avons donc obtenu une loi de comportement viscoélastique soit en fluage ou en relaxation.

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

▷ Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ Supposons que l'on réalise un essai de fluage et que l'on considère un matériau 1D. Alors, $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$, où $H(t)$ est la fonction échelon de Heaviside définie par:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

→ La dérivée de $H(t)$ est l'impulsion de Dirac $\delta(t)$. Alors, si on ne considère qu'une valeur de λ_i , on aura:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= S^{(0)} \sigma_0 H(t) + \int_0^t S^{(1)} (1 - \exp[-\lambda_1(t - \tau)]) \sigma_0 \delta(\tau) d\tau \\ &= S^{(0)} \sigma_0 + S^{(1)} (1 - \exp[-\lambda_1 t]) \sigma_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

▷ Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

→ Supposons que l'on réalise un essai de relaxation et que l'on considère un matériau 1D. Alors, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$. Alors, si on ne considère qu'une valeur de ω_i , on aura:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= C^{(0)} \varepsilon_0 H(t) + \int_0^t C^{(1)} (\exp[-\omega_1(t - \tau)]) \varepsilon_0 \delta(\tau) d\tau \\ &= C^{(0)} \varepsilon_0 + C^{(1)} \exp[-\omega_1 t] \varepsilon_0 \text{ pour } t \geq 0\end{aligned}\tag{33}$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

▷ Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

▷ Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

- La viscoélasticité linéaire est en fait le résultat que l'on obtient lorsque l'on développe en série de Taylor l'énergie libre
 - Elle sera donc valide dans un voisinage limité des variables observables et internes
 - Pour de grandes déformations, on améliorera l'approximation de l'énergie libre en introduisant une dépendance non linéaire au chargement (théorie de Schapery).
- On pourra prendre autant de variables internes que l'on voudra pour représenter le comportement souhaité. Ceci rajoutera des exponentielles dans la souplesse de fluage ou dans le module de relaxation.

- Si l'on considère un très grand nombre de variables internes, on pourra faire l'approximation qu'elles forment un spectre continu
- Avec la même démarche que précédemment, on peut solutionner l'évolution de ξ et on obtiendra:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \mathbf{S}(t - \tau) : \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad \text{avec} \quad (34)$$

$$\mathbf{S}(t) = \int_{0^+}^{\infty} (1 - \exp[-t\lambda]) d\check{\mathbf{S}}(\lambda) + \mathbf{S}''t + \mathbf{S}'$$

où:

- \mathbf{S}' et $\mathbf{S}'' \geq 0$
- $\check{\mathbf{S}}$ est un tenseur semi-défini positif de mesures σ -finies sur \mathbb{R}_+^* telles que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda}{1 + \lambda} d|S_{ij}(\lambda)| < +\infty \quad (35)$$

→ On aura aussi:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{C}(t - \tau) : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{d\tau} d\tau \quad \text{with} \quad (36)$$

$$\mathbf{C}(t) = \int_{0^+}^{\infty} \exp[-t\lambda] d\check{\mathbf{C}}(\lambda) + \mathbf{C}'$$

où:

- $\mathbf{C}' \geq 0$
- $\check{\mathbf{C}}$ est un tenseur semi-défini positif de mesures σ -finies sur \mathbb{R}_+^* telles que:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda} d|C_{ij}(\lambda)| < +\infty \quad (37)$$

→ On peut interpréter une mesure comme une distribution statistique cumulative

→ Ainsi, $u = \int d\check{u}(\tau)$, où u est la distribution cumulative

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

▷ Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

QUELQUES EXEMPLES

→ Supposons que l'on soit en 1D

→ Si l'on a $d\check{c}_1(\tau) = \sum a_i \delta(\tau_i)$, alors on aura:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_{0+}^{\infty} \exp[-t\lambda] \sum a_i \delta(\lambda_i) \\ &= \sum a_i \exp[-t\lambda_i] \end{aligned} \quad (38)$$

→ Si l'on prend des mesures continues, on aura:

$$\begin{aligned} d\check{s}_1(\lambda) &= \frac{a\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \rightsquigarrow s_1(t) = at^\alpha \\ d\check{s}_2(\lambda) &= \frac{a}{b^2} \exp\left[-\frac{\lambda}{b}\right] d\lambda \rightarrow s_2(t) = \frac{at}{1+bt} \\ d\check{s}_3(\lambda) &= \frac{a}{\lambda} \exp\left[-\frac{\lambda}{b}\right] d\lambda \rightarrow s_3(t) = a \log(1+bt) \end{aligned} \quad (39)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

▷ Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

PROPRIÉTÉ INTÉRESSANTE

→ Les fonctions que nous venons de créer sont appelées fonctions de Bernstein

→ Ces fonctions ont la propriétés suivante:

$$\begin{aligned} \text{Si } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont Bernstein et } \psi(0) = 0 \\ \text{alors } \varphi \circ \psi : t \rightarrow \varphi(\psi(t)) \text{ est aussi Bernstein} \end{aligned} \quad (40)$$

→ On pourra ainsi composer certain résultats pour en obtenir d'autres, comme par exemple:

$$s_4 = s_1(s_2(t)) = a \left(\frac{at}{1 + bt} \right)^\alpha \quad (41)$$

→ On pourra générer ainsi plein d'autres comportements

→ Cette généralisation est d'une grande richesse car elle permet de générer une variété de comportements qui ne serait pas possible avec un nombre fini, même très grand, de variables internes (contrairement à ce qui est relaté dans plusieurs livres sur le sujet)

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

▷ Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

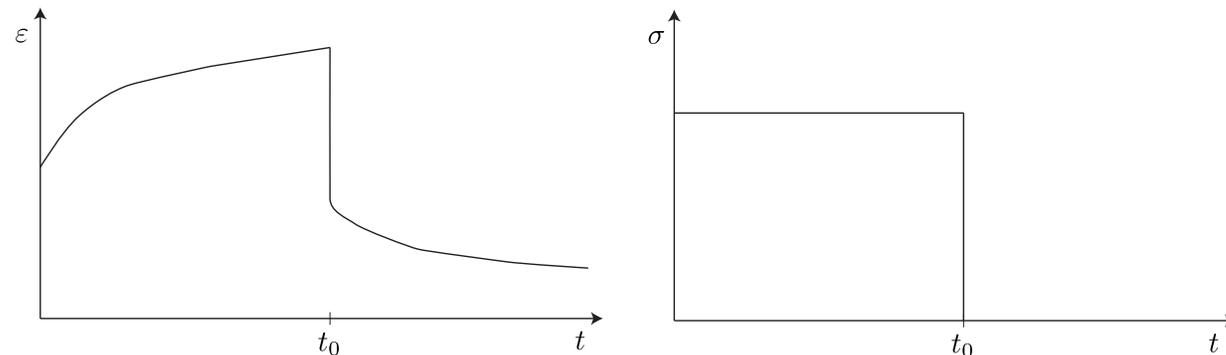
Voigt

Zener

Conclusion

- Introduction
- Introduction
- Fluage
- Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation
- Généralisation
- ▷ Ress. – Amort.
- Maxwell
- Voigt
- Zener
- Conclusion

- Certains auteurs et chercheurs tentent de modéliser le comportement de tels matériaux avec des modèles simples constitués de ressorts et d'amortisseurs.
- Ces modèles sont établis à partir d'observations de la réponse du matériau. Considérons l'essai de fluage – recouvrance.



- On peut voir qu'à l'application de la charge en $t = 0$ et à son relâchement en $t = t_0$, le matériau a une réponse instantanée.
- Il semble tout naturel, pour ce comportement, d'introduire un ressort pour obtenir la relation suivante:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} , \text{ où } E \text{ est la constante du ressort} \quad (42)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

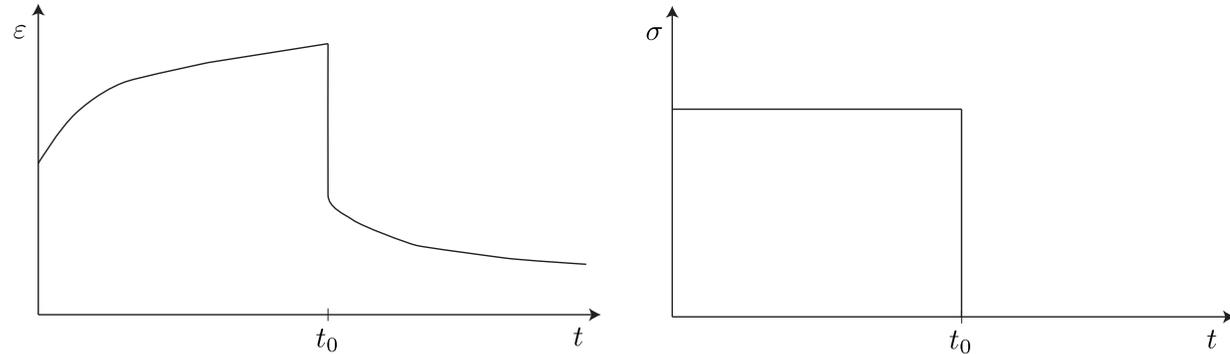
▷ Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion



- Afin de représenter la réponse différée, qui ressemble à une vibration amortie, on peut introduire un amortisseur.
- L'amortisseur a le comportement suivant:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (43)$$

où η est la constante de l'amortisseur et où le (\cdot) représente une dérivée par rapport au temps.

- Les différents comportements sont obtenus en agencant les ressorts et les amortisseurs en série et en parallèle.

- Par exemple, si l'on agence en série un ressort et un amortisseur, on obtient le modèle de Maxwell.

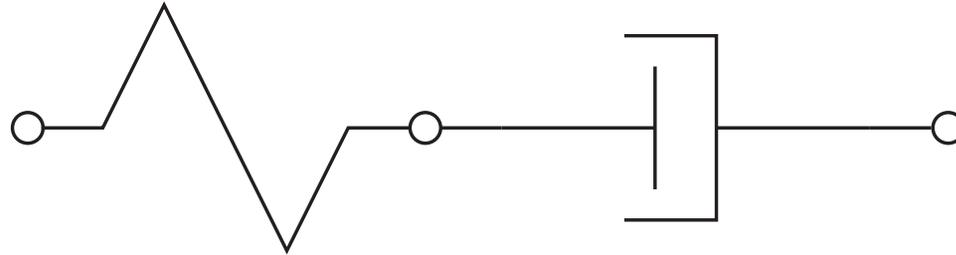


Figure 3: Illustration du modèle de Maxwell

- Dans ce modèle, on suppose que la contrainte est constante dans les deux éléments et que la déformation totale est la somme des déformations des composants puisqu'ils sont montés en série. On aura:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (44)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

▷ Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

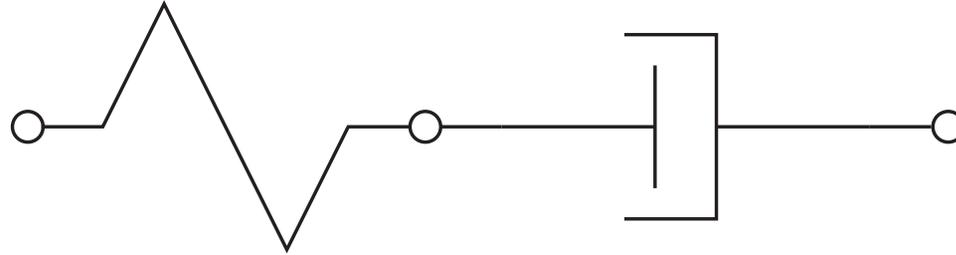
Ress. – Amort.

▷ Maxwell

Voigt

Zener

Conclusion

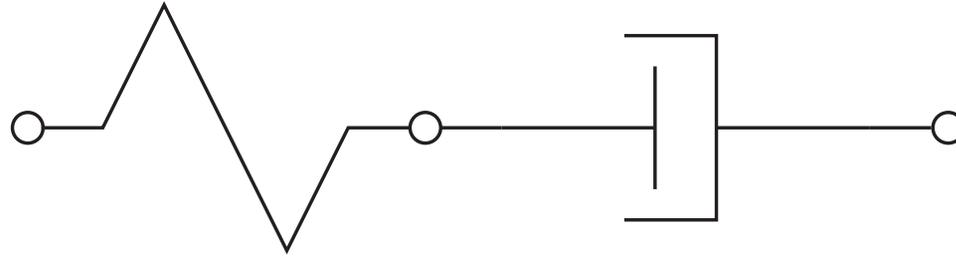


- Si l'on réalise un essai de fluage, en $t = 0$, $\sigma = \sigma_0$ et uniquement le ressort se déforme, alors $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E}$
- Par la suite, le taux de déformation dans l'amortisseur sera de $\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} = \text{cte.}$
- Alors, en fluage et selon le modèle de Maxwell, on aura (après intégration):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t \quad (45)$$

- Ce type de modèle est souvent utilisé pour représenter le comportement des métaux à haute température.

- Introduction
- Introduction
- Fluage
- Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation
- Généralisation
- Ress. – Amort.
- ▷ Maxwell
- Voigt
- Zener
- Conclusion



- Si l'on réalise un essai de relaxation, en $t = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ et uniquement le ressort se déforme, alors $\sigma(0) = E\varepsilon_0$
- Par la suite, le taux de déformation est nul sur tout le matériau. En utilisant l'équation (44) on obtient:

$$0 = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (46)$$

- Si on pose la solution de cette équation différentielle du type: $\sigma(t) = A \exp[Bt]$, on obtient:

$$\sigma(t) = A \exp\left[-\frac{E}{\eta}t\right] \quad (47)$$

- Comme $\sigma(0) = E\varepsilon_0$, alors $A = E\varepsilon_0$.

- Si l'on agence le ressort et l'amortisseur en parallèle, on obtient le modèle de Voigt.

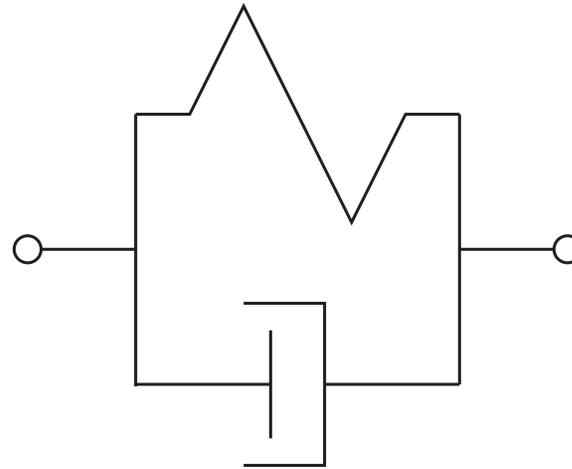


Figure 4: Illustration du modèle de Voigt

- Dans ce modèle, on suppose que les deux composants ont la même déformation et que la contrainte globale est la somme des contraintes agissant dans chaque branche. Alors:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t) \quad (48)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

▷ Voigt

Zener

Conclusion

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

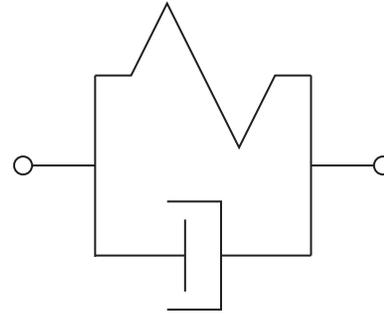
Ress. – Amort.

Maxwell

▷ Voigt

Zener

Conclusion



- Pour un essai de fluage, dès l'application de la charge, la déformation totale sera nulle. En effet, l'amortisseur conduirait à une contrainte infinie si la déformation présentait un saut.
- Pour obtenir la solution, on doit trouver la solution homogène (i.e. $\sigma = 0$) de l'équation (48). Par la suite, on trouve la solution particulière qui permet d'avoir $\sigma_0 = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$. Finalement, on impose que $\varepsilon(0) = 0$. Cela nous conduit au résultat final suivant:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp \left[-\frac{E}{\eta} t \right] \right) \quad (49)$$

- Il doit être noté que l'on ne peut pas représenter un essai de relaxation avec ce modèle.

- Il existe un modèle où l'on met en série un ressort avec un ressort et un amortisseur qui sont montés en parallèle. C'est le modèle de Zener.

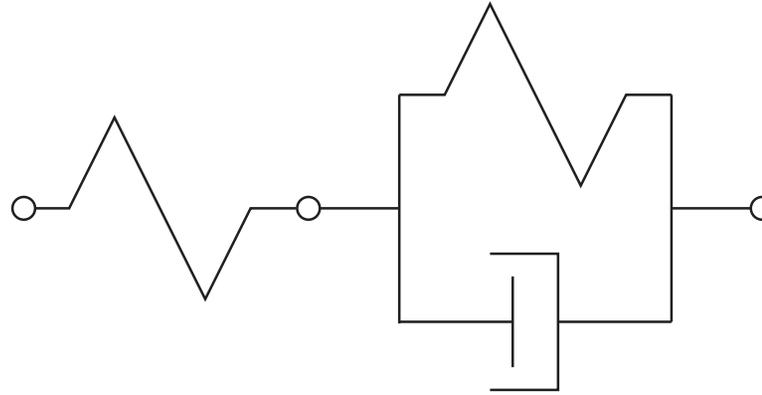


Figure 5: Illustration du modèle de Zener

- Pour un essai de fluage, il suffit de rajouter la déformation du ressort en série à celle du modèle de Voigt. On obtient:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp \left[-\frac{E}{\eta} t \right] \right) \quad (50)$$

où E_2 est la constante du ressort en série.

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

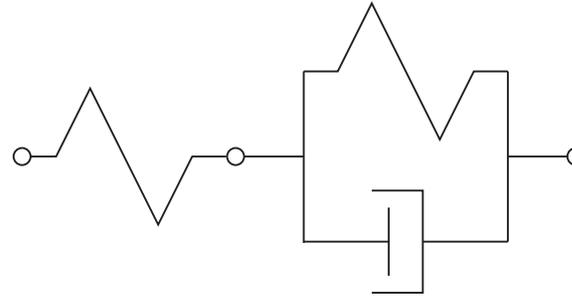
Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

▷ Zener

Conclusion



→ Pour la relaxation, il faut procéder par les étapes suivantes:

1. Remarquer que la déformation totale $\varepsilon_0 = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ où ε_1 est la déformation dans le module de Voigt et ε_2 celle dans le ressort.
2. Remarquer que la contrainte est égale dans les deux éléments: $\sigma(t) = \sigma_1(t) = \sigma_2(t)$.
3. Avec cette relation et les relations exprimant les contraintes pour chaque modèle, on obtient:

$$E_1 \varepsilon_1(t) + \eta \dot{\varepsilon}_1(t) = E_2 \varepsilon_2(t) \quad (51)$$

4. Avec que $\varepsilon_0 = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$, on obtient:

$$(E_1 + E_2) \varepsilon_1(t) + \eta \dot{\varepsilon}_1(t) = E_2 \varepsilon_0 \quad (52)$$

Introduction

Introduction

Fluage

Relaxation

Hypothèses viso.

Application

Interprétation

Généralisation

Ress. – Amort.

Maxwell

Voigt

▷ Zener

Conclusion

$$(E_1 + E_2) \varepsilon_1(t) + \eta \dot{\varepsilon}_1(t) = E_2 \varepsilon_0$$

→

5. Solutionner pour ε_1 (solution homogène et particulière) en sachant que $\varepsilon_1(0) = 0$ pour un chargement en relaxation. En effet, c'est le ressort qui va prendre toute la déformation ε_0 en $t = 0$ car le modèle de Voigt ne peut subir de déformation instantanée.
6. Finalement, calculer la contrainte par:

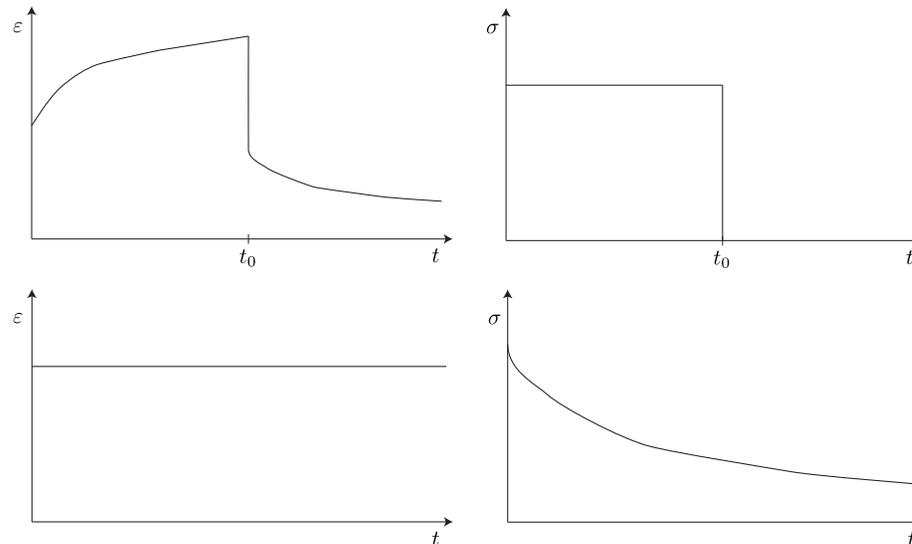
$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_2 \varepsilon_2(t) \\ &= E_2 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1(t)) \end{aligned} \quad (53)$$

→ Au final, on obtient la relation suivante:

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0 E_2}{E_1 + E_2} \left(E_1 + E_2 \exp \left[-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right] \right) \quad (54)$$

- Introduction
- Introduction
- Fluage
- Relaxation
- Hypothèses viso.
- Application
- Interprétation
- Généralisation
- Ress. – Amort.
- Maxwell
- Voigt
- Zener
- ▷ Conclusion

- Le modèle de Zener est un modèle intéressant car il est plus réaliste que les modèles de Maxwell et de Voigt.
- En fluage, il prédit une réponse instantanée du matériau $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_2}$ et une réponse stabilisée après un très long temps $\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2}$.
- En relaxation, il prédit aussi une réponse instantanée $\sigma(0) = \varepsilon_0 E_2$ et une réponse stabilisée $\sigma(\infty) = \varepsilon_0 \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$.



- On peut donc voir que la construction ressorts – amortisseurs conduit au même résultat que la formulation thermodynamique. Cette dernière, toutefois, repose sur des arguments beaucoup plus solides que l'approche ressorts – amortisseurs.