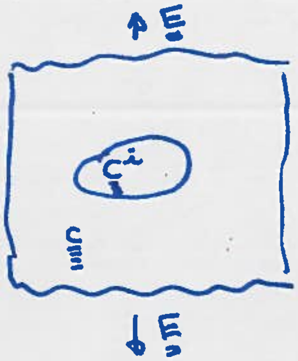
PROBLÈME INCLUSION ÉQUIVALENTE

Considérons le problème suivant:



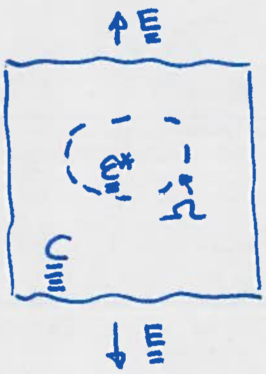
Matrice infinie dans laquelle on a une inclusion "i", soumise à $\underline{\underline{E}}$. La solution de ce problème est:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x}).$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}^i:\left(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x})\right) & \text{dans "i"} \\ \mathbb{C}:\left(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x})\right) & \text{dans la matrice} \end{cases}$$

Les solution de ce problème sont $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x})$ et $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$.

Considérons un autre problème:



Matrice infinie et uniforme soumise à $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ dans Ω.

Dans ce problème, on aura que:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x})$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x}) = \begin{cases} \varepsilon^* = \text{cte} & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{— } V-\Omega \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{el}(\underline{x}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\underline{x})$$, où $\underline{\underline{\varepsilon}}^{el}(\underline{x})$ est la déformation élastique

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \mathbb{C}:\left(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x})\right) & \text{dans } V-\Omega \\ \mathbb{C}:\left(\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{x}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^*\right) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On souhaite que les deux problèmes soient équivalents, au sens de l'homogénéisation, c'est à dire que les deux ~~collent~~ aient :

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{y}) \rangle = \langle \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y}) \rangle = \underline{\underline{E}} \Rightarrow \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt} \rangle = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \rangle = \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \rangle_{\Omega} + \langle \underline{\underline{\sigma}}(\underline{y}) \rangle_{V-\Omega}$$

$$= \langle \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y})) \rangle_{\Omega} + \langle \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y})) \rangle_{V-\Omega} \quad \text{(problème}$$

$$= \langle \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}) \rangle_{\Omega} + \langle \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y})) \rangle_{V-\Omega} \quad \text{(problème 2}$$

comme $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt} \rangle_{\Omega} + \langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt} \rangle_{V-\Omega} = \underline{\underline{0}}$, il ne suffit que de connaître un ou l'autre pour calculer $\underline{\underline{\Sigma}}$

Donc, on cherche $\underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$ ~~et~~ telle que :

$$\underbrace{\langle \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}) \rangle_{\Omega}}_{1} = \underbrace{\langle \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y}) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{*} \rangle_{\Omega}}_{2}.$$

Avec la solution d'Eshelby, on a que $\underline{\underline{\varepsilon}}^{pt}(\underline{y}) = cte = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$. Alors, on va chercher $\underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$ qui fasse en sorte que $\langle \underline{\underline{\varepsilon}}^{pt} \rangle_{\Omega}$ du 1 soit égale à $\langle \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*} \rangle_{\Omega}$. Comme les moyennes sont faits sur les mêmes zones, on pourra écrire :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}).$$

Le but du jeu est de trouver $\underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$ qui permette cette égalité.

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$$

$$\left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\right) : \underline{\underline{E}} = \left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i}\right) : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$$

$$\left[\left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i}\right) : \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}^{E} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\right]^{-1} : \left(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^{i} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}\right) : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$$

Avec ce choix de $\underline{\underline{\varepsilon}}^{*}$, les deux problèmes seront équivalents au niveau de l'homogénéisation.