Algorithme d'interconversion viscoélastique

Dans ce document, nous allons présenter l'algorithme d'interconversion viscoélastique entre les modules de relaxation et les modules de fluage. Dans un premier temps, nous allons présenter l'algorithme permettant de passer de $\mathbf{C}(t)$ à $\mathbf{S}(t)$. Dans un second temps, nous allons présenter l'algorithme permettant de passer de $\mathbf{S}(t)$ à $\mathbf{C}(t)$.

Introduisons les trois variables N, M et D. N est le nombre de paramètres viscoélastiques en relaxation, i.e., le nombre de ω_n. M est le nombre de paramètres viscoélastiques en fluage, i.e., le nombre de λ_m. D est la dimension du problème :

$$D = \begin{cases} 1 & \text{pour un matériau 1D} \\ 3 & \text{pour un matériau 2D} \\ 6 & \text{pour un matériau 3D} \end{cases} \tag{1}$$

1 $\mathbf{C}(t) \to \mathbf{S}(t)$

1) A partir de $\mathbf{C}^0$, des $\mathbf{C}^n$ et des ω_n, calculez les matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$.

2) Calculez les matrices $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_3$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{L}_1^{-1} \tag{2a}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2 \tag{2b}$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{L}_3 - \mathbf{L}_2^\top : \mathbf{L}_1^{-1} : \mathbf{L}_2 \tag{2c}$$

3) Calculez la matrice $\mathbf{P}$ qui permet de diagonaliser la matrice $\mathbf{A}_3$. Pour cela, utilisez la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}_3$. Il faudra écrire $\mathbf{A}_3$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{P} : \mathbf{D} : \mathbf{P}^\top \tag{3}$$

où $\mathbf{D}$ est la matrice $\mathbf{A}_3$ diagonalisée. Si vous utilisez MATLAB, vous pouvez utiliser la commande suivante :

$$[\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}] = \texttt{svd}(\mathbf{A}_3) \tag{4}$$

Vous aurez ainsi :

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \tag{5}$$

4) Calculez les matrices $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}_3^*$ et $\mathbf{A}_2^*$:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{P}^\top : \mathbf{B} : \mathbf{P} \tag{6a}$$

$$\mathbf{A}_3^* = \mathbf{P}^\top : \mathbf{A}_3 : \mathbf{P} = \mathbf{D} \tag{6b}$$

$$\mathbf{A}_2^* = \mathbf{A}_2 : \mathbf{P} \tag{6c}$$

5) A partir des matrices $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{A}_3^*$ et $\mathbf{A}_2^*$, calculez la matrice $\mathbf{S}^0$, les matrices $\mathbf{S}^m$ et les temps de retard λ_m :

$$\mathbf{S}^0 = \mathbf{A}_1 \tag{7a}$$

$$\lambda_m = A^*_{3mm} \qquad \text{pour} \quad m = 1 \to M = DN \tag{7b}$$

$$S^m_{ij} = \frac{A^*_{2im} A^*_{2jm}}{\lambda_m} \qquad \text{pour} \quad m = 1 \to M = DN \tag{7c}$$

Vous aurez donc M (où $M = DN$) paramètres viscoélastiques en fluage, i.e., M matrices $\mathbf{S}^m$ et M temps de retard λ_m. Par exemple, pour un matériau viscoélastique 3D ($D = 6$) avec 3 modules de relaxation ($N = 3$), vous obtiendrez 18 modules de fluage ($M = DN = 6 \times 3 = 18$).

D'après l'Équation (7c), chaque matrice $\mathbf{S}^m$ peut être calculée rapidement en prenant la $m^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{A}_2^*$ et en la multipliant par sa transposée (un vecteur colonne $[D \times 1]$ multiplié par un vecteur ligne $[1 \times D]$. Vous obtiendrez ainsi une matrice $[D \times D]$ que vous diviserez ensuite par λ_m.

2 $\mathbf{S}(t) \to \mathbf{C}(t)$

1) A partir de $\mathbf{S}^0$, des $\mathbf{S}^m$ et des λ_m, calculez les matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}_3$.

2) Calculez les matrices $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{L}_3$:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} \tag{8a}$$

$$\mathbf{L}_2 = \mathbf{A}_1^{-1} : \mathbf{A}_2 \tag{8b}$$

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_2^\top : \mathbf{A}_1^{-1} : \mathbf{A}_2 \tag{8c}$$

3) Calculez la matrice $\mathbf{P}$ qui permet de diagonaliser la matrice $\mathbf{L}_3$. Pour cela, utilisez la décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{L}_3$. Il faudra écrire $\mathbf{L}_3$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{L}_3 = \mathbf{P} : \mathbf{D} : \mathbf{P}^\top \tag{9}$$

où $\mathbf{D}$ est la matrice $\mathbf{L}_3$ diagonalisée. Si vous utilisez MATLAB, vous pouvez utiliser la commande suivante :

$$[\mathbf{U}, \mathbf{D}, \mathbf{V}] = \texttt{svd}(\mathbf{L}_3) \tag{10}$$

Vous aurez ainsi :

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} \tag{11}$$

4) Calculez les matrices $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{L}_3^*$ et $\mathbf{L}_2^*$:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{P}^\top : \mathbf{B} : \mathbf{P} \tag{12a}$$

$$\mathbf{L}_3^* = \mathbf{P}^\top : \mathbf{L}_3 : \mathbf{P} = \mathbf{D} \tag{12b}$$

$$\mathbf{L}_2^* = \mathbf{L}_2 : \mathbf{P} \tag{12c}$$

5) A partir des matrices $\mathbf{B}^*$, $\mathbf{L}_3^*$ et $\mathbf{L}_2^*$, calculez la matrice $\mathbf{C}^0$, les matrices $\mathbf{C}^n$ et les temps de relaxation ω_n :

$$\omega_n = L_{3nn}^* \qquad \text{pour} \quad n = 1 \to N = DM \tag{13a}$$

$$C_{ij}^n = \frac{L_{2in}^* L_{2jn}^*}{\omega_n} \qquad \text{pour} \quad n = 1 \to N = DM \tag{13b}$$

$$\mathbf{C}^0 = \mathbf{L}_1 - \sum_{n=1}^{N} \mathbf{C}^n \quad \text{avec} \quad N = DM \tag{13c}$$

Vous aurez donc N (où $N = DM$) paramètres viscoélastiques en relaxation, i.e., N matrices $\mathbf{C}^n$ et N temps de relaxation ω_n. Par exemple, pour un matériau viscoélastique 1D ($D = 1$) avec 2 modules de fluage ($M = 2$), vous obtiendrez 2 modules de relaxation ($N = DM = 1 \times 2 = 2$).

D'après l'Équation (13b), chaque matrice $\mathbf{C}^n$ peut être calculée rapidement en prenant la $n^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{L}_2^*$ et en la multipliant par sa transposée (un vecteur colonne $[D \times 1]$ multiplié par un vecteur ligne $[1 \times D]$. Vous obtiendrez ainsi une matrice $[D \times D]$ que vous diviserez ensuite par ω_n.

Elias Ghossein