Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

# MEC6418 - NOTES DE COURS

## Homogénéisation analytique

Par: Martin Lévesque
professeur du département de génie mécanique

▷ Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Le but de la démarche d'homogénéisation est de **prédire** le comportement mécanique d'un matériau hétérogène en utilisant des informations reliées à la microstructure.

→ Dans ce qui suit, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\mathbf{C}$ font référence aux contraintes, déformations et propriétés mécaniques des matériaux constituant le matériau hétérogènes (fibre, matrice, grains, etc.)

→ $\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{E}$ et $\tilde{\mathbf{C}}$ font référence aux contraintes, déformations et propriétés mécaniques du matériau hétérogène considéré comme homogène pour fins de calculs.

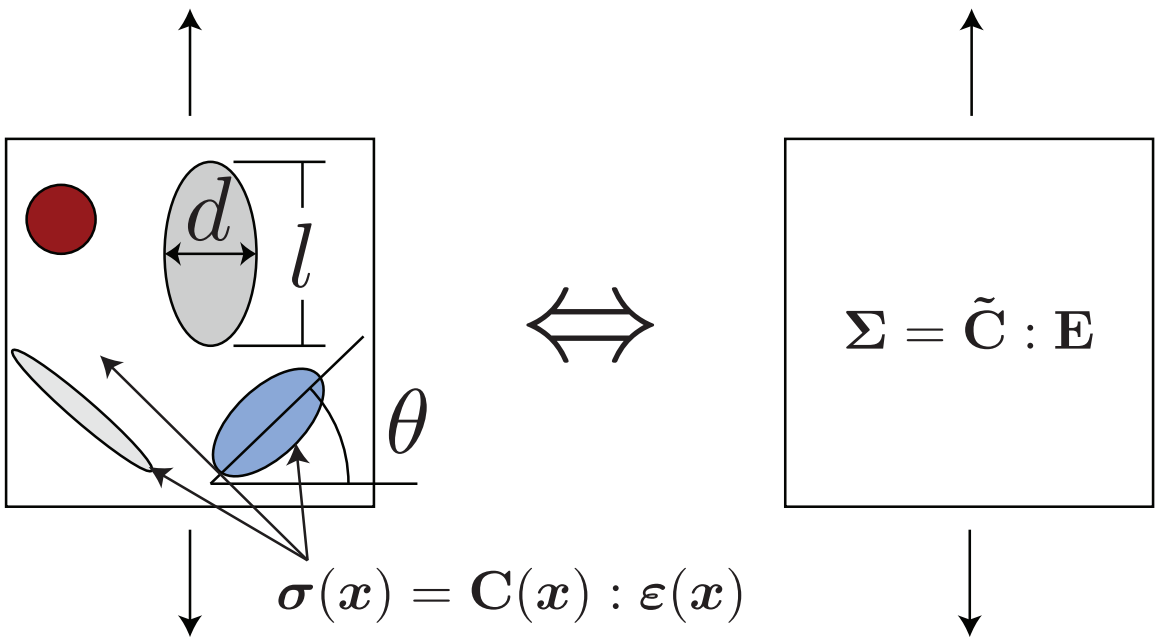


Figure 1: Schématisation de la démarche d'homogénéisation.

▷ Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ On va donc chercher des modèles mathématiques qui permettent d'exprimer

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}(\mathbf{C_i}, \boldsymbol{\theta_i}, l_i, d_i, \ldots) \tag{1}$$

où les $\mathbf{C_i}, \boldsymbol{\theta_i}, l_i$ et $d_i$ sont les propriétés mécaniques, orientation et facteurs de forme des différents *phases* constituant le matériau hétérogène.

→ Les premiers résultats d'homogénéisation datent de la fin des années 1800. Beaucoup de résultats fondamentaux ont été établis dans les années 1950 à 1970 pour les matériaux élastiques linéaires. La viscoélasticité linéaire (années 1970) et les comportements non linéaires (années 1960 jusqu'à maintenant) ont aussi été abordés.

- L'homogénéisation de matériaux non linéaires est encore une question ouverte et quelques équipes dans le monde se penchent sur le sujet.

Motivation
▷ Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ L'homogénéisation se fait en suivant trois grandes étapes:

1. Représentation
2. Localisation
3. Homogénéisation

Représentation

→ Cette étape est la plus importante. Elle consiste en la description mathématique du matériau hétérogène.

– On décrira le comportement, la forme, la fraction volumique de chacune des phases.

→ De plus, outre les cas des structures périodiques, comme les tissus, on devra introduire des statistiques pour se représenter un matériau composé de plusieurs phases distribuées.

→ Dans la majeure partie des cas, il ne sera pas possible de fournir une description complète et exacte du matériau. Il faudra donc introduire des hypothèses simplificatrices.

Motivation
▷ Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

## Localisation

→ Une fois la définition du problème d'homogénéisation à résoudre établie, on doit arriver à obtenir un lien entre les quantités à l'échelle microscopique ($\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$) et celles à l'échelle macroscopique ($\boldsymbol{\Sigma}$, $\mathbf{E}$).

→ Supposons qu'un corps soit soumis à une contrainte homogène $\boldsymbol{\Sigma}$ sur ses bords. Alors, le corps sera soumis à des tractions $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n}$ sur toute sa surface $\delta V$. Alors, on peut montrer que:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}V = \boldsymbol{\Sigma} \tag{2}$$

→ Si un corps est soumis à une déformation $\mathbf{E}$ homogène sur son contour, on aura le résultat suivant:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}V = \mathbf{E} \tag{3}$$

**(voir démonstrations au tableau)**

Motivation
▷ Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

## Localisation – suite

→ L'étape de localisation vise principalement à définir deux tenseurs:

- Le tenseur de localisation des déformations $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$
- Le tenseur de concentration des contraintes $\mathbf{B}(\boldsymbol{x})$

qui permettent de faire les liens suivants:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{B}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \tag{4}$$

→ Compte tenu de la complexité du problème, on n'arrivera jamais à définir de manière exacte les tenseurs $\mathbf{A}(\boldsymbol{x})$ et $\mathbf{B}(\boldsymbol{x})$.

→ Ce sont les hypothèses que l'on va introduire qui nous permettront de définir ces tenseurs. Chaque modèle d'homogénéisation vise à définir ces deux tenseurs.

Motivation
▷ Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

## Homogénéisation

→ L'étape d'homogénéisation a pour objectif d'établir le lien entre $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{E}$. Pour ce faire, nous allons introduire le concept de *phase*.

→ Une phase va être définie comme un élément du matériau hétérogène qui a un ensemble de caractéristiques unique. Par exemple, une phase pourrait être toutes les fibres faites d'un matériau $\lambda$ ayant une certaine orientation $\theta_1$ tandis qu'une autre phase pourrait être toutes les fibres fabriquées du même matériau $\lambda$ mais qui ont une orientation $\theta_2$.

→ Alors, si on reprend l'équation de moyenne volumique des contraintes ou des déformations, on aura:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma} &= \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \rangle = c_r \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \rangle_r \\ \mathbf{E} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \rangle = c_r \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \rangle_r \end{aligned} \tag{5}$$

où $c_r$ est la fraction volumique de la phase $r$ et où $< \cdot >_r$ indique que la moyenne volumique a été effectuée sur la phase $r$.

Motivation
▷ Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

## Homogénéisation

→ Avec les résultats de l'étape de localisation, on aura que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma} &= c_r \left\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_r \\
&= c_r \left\langle \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_r \quad \text{(lois de comportement locales)} \\
&= c_r \mathbf{C}_r : \left\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{E} \right\rangle_r \quad \text{(localisation)} \\
&= c_r \mathbf{C}_r : \left\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_r : \mathbf{E} \\
&= \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{E}
\end{aligned} \tag{6a}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= c_r \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_r \\
&= c_r \left\langle \mathbf{S}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_r \quad \text{(lois de comportement locales)} \\
&= c_r \mathbf{S}_r : \left\langle \mathbf{B}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \right\rangle_r \quad \text{(localisation)} \\
&= c_r \mathbf{S}_r : \left\langle \mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \right\rangle_r : \boldsymbol{\Sigma} \\
&= \tilde{\mathbf{S}} : \boldsymbol{\Sigma}
\end{aligned} \tag{6b}$$

où on a supposé des propriétés mécaniques uniformes par phase.

Motivation
▷ Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

## Homogénéisation

→ Les tenseurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont une propriété fort intéressante que l'on exploitera par la suite.

→ Imaginons que le matériau hétérogène est soumis à $\mathbf{E}$. On aura donc que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{E} \tag{7}$$

→ En utilisant le fait que $\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \rangle = \mathbf{E}$, on aura:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \rangle : \mathbf{E} \tag{8}$$

d'où l'on tirera que:

$$\langle \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \rangle = \mathbf{I} \tag{9}$$

→ On peut appliquer un raisonnement similaire pour $\mathbf{B}$ qui nous conduira à:

$$\langle \mathbf{B}(\boldsymbol{x}) \rangle = \mathbf{I} \tag{10}$$

Motivation
Bases
▷ Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Les premiers modèles d'homogénéisation sont ceux de Voigt (connu sous le nom de la lois des mélanges) et de Reuss.

→ Dans le modèle de Voigt, il est supposé que chaque phase voit la même déformation que $\mathbf{E}$. Dans le modèle de Reuss, il est supposé que chaque phase voit la même contrainte que $\boldsymbol{\sigma}$.

→ Ces deux modèles sont donc insensibles à la forme et à l'orientation des renforts.

→ De plus, il peut être montré que le modèle de Voigt fournit une borne supérieure tandis que le modèle de Reuss fournit une borne inférieure du comportement du matériau à étudier.

→ Pour illustrer, considérons un composite à deux phases, 0 et 1, isotropes. Après calculs, on aura que (**voir demonstration au tableau**):

$$\tilde{\mathbf{C}}^V = 3\left(k_1 + c_0\left(k_0 - k_1\right)\right)\mathbf{J} + 2\left(\mu_1 + c_0\left(\mu_0 - \mu_1\right)\right)\mathbf{K} \quad (11a)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}^R = \frac{3k_0k_1}{k_0 + c_0\left(k_1 - k_0\right)}\mathbf{J} + \frac{2\mu_0\mu_1}{\mu_0 + c_0\left(\mu_1 - \mu_0\right)}\mathbf{K} \quad (11b)$$

Motivation
Bases
▷ Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Introduisons le contraste $\xi = k_0/k_1$ et calculons le rapport $\alpha^V/\alpha^R$, où $\alpha$ est le coefficient qui multiplie $\mathbf{J}$ pour un tenseur isotrope. Après calculs, on aura **(voir démonstration)**:

$$\frac{\alpha^V}{\alpha^R} = 1 - 2\left(c_0 - c_0^2\right) + \frac{\left(c_0 - c_0^2\right)}{\xi} + \xi\left(c_0 - c_0^2\right) \tag{12}$$

→ Dans un composite réel, un aura $\xi \sim 100$. Si les deux phases ont la même fraction volumique (i.e. $c_0 = 0.5$), on aura $\alpha^V/\alpha^R = 25.5$, ce qui est un encadrement qui n'est pas très serré.

→ Cela montre que ces modèles, malgré qu'ils soient largement utilisés dans la pratique, et enseignés dans les cours de baccalauréat, proposent des encadrements très peu utiles.

→ D'autres modèles plus précis existent.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

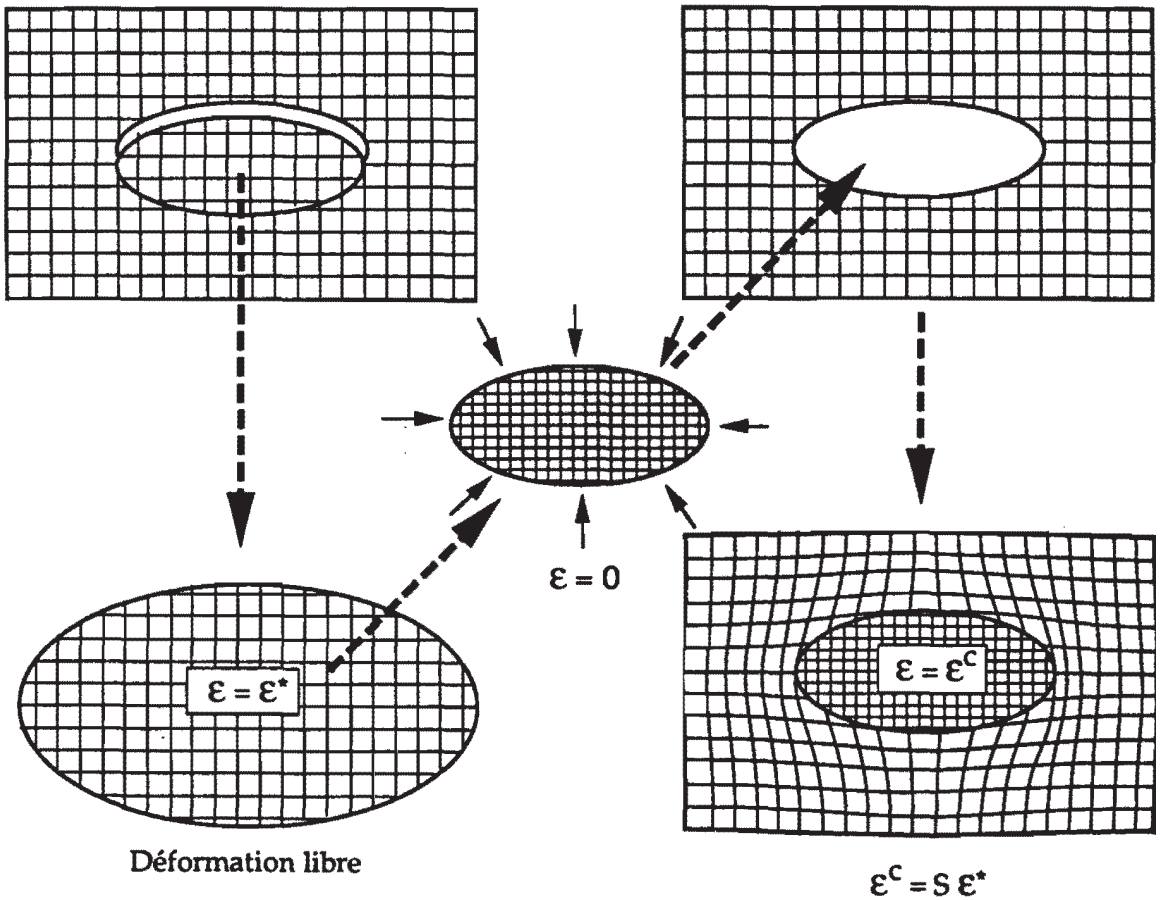


Figure 2: Problème d'Eshelby (selon N. Bourgeois, 1994). Matériau homogène et infini dans lequel une zone ellipsoïdale, appelée *inclusion*, est soumise à une déformation libre de contrainte $\varepsilon^\star$ (peut être assimilée à une déformation thermique). La matière autour de l'inclusion contraint cette dernière et la déformation résultante, $\varepsilon^c$ est donnée par: $\varepsilon^c = \mathbf{S}^\mathbf{E} : \varepsilon^\star$, où $\mathbf{S}^\mathbf{E}$ est appelé tenseur d'Eshelby.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Le principe de base de la méthode d'Eshelby (1957) est relativement accessible. La solution est plus complexe par contre.

→ La déformation libre dans tout le matériau sera donnée par:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\star(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\star H^{3D}(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ est une constante, $\boldsymbol{x}$ est le vecteur position et $H^{3D}(\boldsymbol{x})$ serait l'équivalent d'une fonction d'Heviside 3D qui vaudrait 1 dans le domaine de l'inclusion et 0 partout ailleurs.

→ Imaginons que l'inclusion soit soumise à la fois à une contrainte mécanique ainsi qu'à une variation de température. La déformation totale s'exprimera par:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\star(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{el}}(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{el}}(\boldsymbol{x})$ est la déformation d'origine mécanique.

→ Avec cette relation et celle de la déformation libre, on aura que la contrainte dans le matériau sera donnée par:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^\star(\boldsymbol{x})\right] \tag{15}$$

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Par définition, la déformation est donnée par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{16}$$

→ Comme $\mathbf{C}$ présente les symétries mineures, on pourra écrire que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{C} : \left[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^\star(\boldsymbol{x})\right] \\ &= \mathbf{C} : \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\varepsilon}^\star(\boldsymbol{x})\right] \end{aligned} \tag{17}$$

→ En utilisant le fait que $\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ pour qu'il y ait équilibre des contraintes, on aura **(voir démonstration)**:

$$C_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} + C_{ijkl}\varepsilon^\star_{kl} n_j \delta_S = 0 \tag{18}$$

où $n_j$ est la normale sortante de l'inclusion et $\delta_S$ est une impulsion de Dirac sur la surface de l'inclusion.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Comme on a un milieu infini, les conditions aux rives à l'infini seront des forces et déplacements nuls (on rappelle ici que le chargement n'est d'autre qu'une déformation libre dans une zone de dimension finie).

→ Supposons que l'inclusion était soumise à une pression $p$ sur sa surface. La contrainte serait exprimée par $pH^{3D}(\boldsymbol{x})$. Si on calcule la divergence de cette contrainte, on obtiendra $pn_j\delta_S$

→ Alors, le problème de l'équation (18) est analogue à celui où on aurait un milieu infini sur lequel serait appliqué une distribution de force donnée par $C_{ijkl}\varepsilon^{\star}_{kl}n_j$.

→ Les fonctions de Green permettent de résoudre ce genre de problème. Une fonction de Green relie le déplacement $u$ à un point $\boldsymbol{x}$ provoqué par une force $F$ en un point $\boldsymbol{x'}$. Par exemple, $G_{pk}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})$ donnera la composante au point $\boldsymbol{x}$ dans la direction $x_p$ provoqué par une force au point $\boldsymbol{x'}$ dans la direction $x_k$.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Dans notre cas, les forces sont imposées sur la surface de l'inclusion et on s'intéresse à calculer le champ de déplacement dans celle-ci. On aura donc:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \int_S G_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) C_{jklm} \varepsilon^\star_{lm} n_k(\boldsymbol{x'}) \mathrm{d}S' \tag{19}$$

Si on applique le théorème de la divergence (connu aussi sous le théorème de Green...), on aura:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = C_{jklm} \varepsilon^\star_{lm} \int_V \frac{\partial G_{ij}}{\partial x'_k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \mathrm{d}V' \tag{20}$$

où $V$ est le volume de l'inclusion. Comme $G_{ij}$ ne dépend que de $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}$, alors, on aura:

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x'_k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) = -\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}) \tag{21}$$

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ On va donc tirer:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -C_{jklm}\varepsilon^{\star}_{lm}\int_V \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\mathrm{d}V' \tag{22}$$

→ En appliquant la définition de la déformation, on aura:

$$\varepsilon_{in}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}C_{jklm}\left[\int_V \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_k \partial x_n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\mathrm{d}V' + \int_V \frac{\partial G_{nj}}{\partial x_k \partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\mathrm{d}V'\right]\varepsilon^{\star}_{lm} \tag{23}$$

→ Les fonctions de Green sont relativement complexes, mais se simplifient lorsque l'inclusion est isotrope et le milieu infini. Eshelby a solutionné ce problème, en montrant que la déformation dans l'inclusion est uniforme et se calcule par:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\star} \tag{24}$$

où $\mathbf{S}^{\mathbf{E}}$ est le tenseur d'Eshelby.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Le tenseur d'Eshelby dépend uniquement des propriétés de la matrice. Pour une matrice isotrope et une inclusion sphérique, il est aussi aussi isotrope et est donné par:

$$\mathbf{S}^{\mathbf{E}} = \frac{3k_0}{3k_0 + 4\mu_0}\mathbf{J} + \frac{6\left(k_0 + 2\mu_0\right)}{5\left(3k_0 + 4\mu_0\right)}\mathbf{K} \tag{25}$$

→ D'autres expressions analytiques existent pour des inclusions de rapport de forme différents.

→ Pour des matrices qui ne sont pas isotropes, des méthodes numériques doivent être développées.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Dans le cas général, le tenseur d'Eshelby est donné en calculant l'intégrale de surface suivante (obtenue à partir du théorème de la divergence, de l'équation (23) et d'un changement de variable d'une surface elliptique à une surface sphérique (Gavazzi et Lagoudas, 1990):

$$S^E_{ijkl} = \frac{C^0_{mnkl}}{8\pi} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\zeta_3 \int_0^{2\pi} \left[ G_{imjn}\left(\bar{\xi}\right) + G_{jmin}\left(\bar{\xi}\right) \right] \mathrm{d}\omega \tag{26}$$

où:

$$G_{ijkl}\left(\bar{\xi}\right) = \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l \frac{N_{ij}\left(\bar{\xi}\right)}{D\left(\bar{\xi}\right)} \quad ; \quad \zeta_1 = \sqrt{1-\zeta_3^2}\cos\omega$$

$$\zeta_2 = \sqrt{1-\zeta_3^2}\sin\omega \quad ; \quad \bar{\xi}_i = \frac{\zeta_i}{a_i} \quad ; \quad K_{ik} = C^0_{ijkl}\bar{\xi}_j\bar{\xi}_l \tag{27}$$

$$N_{ij}\left(\bar{\xi}\right) = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}K_{km}K_{ln}$$

$$D\left(\bar{\xi}\right) = \epsilon_{mnl}K_{m1}K_{n2}K_{l3} = \det(K)$$

où ... (suite transparent suivant)

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ ... où $a_i$ sont les axes principaux de l'ellipsoïde (on rappelle que l'équation d'un ellipsoïde est donnée par: $\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_3}\right)^2 = R$) et où $\epsilon_{ijk}$ est le tenseur de permutation exprimé par:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, i = k, j = k \\ 1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)\} \end{cases} \quad (28)$$

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ L'intégrale (26) ne peut être calculée analytiquement que dans certains cas particuliers. La majeure partie du temps, elle doit être calculée numériquement.

→ Gavazzi et Lagoudas (1990) ont proposé une méthode d'intégration de Gauss pour calculer cette intégrale de sorte que:

$$S^E_{ijkl} = \frac{C^0_{mnkl}}{8\pi} \times \sum_{p=1}^{P} \sum_{q=1}^{Q} \left[ G_{imjn}\left(\omega_q, \zeta_{3_p}\right) + G_{jmin}\left(\omega_q, \zeta_{3_p}\right) \right] W_{pq} \quad (29)$$

où $P$ est le nombre de points de Gauss pour la variable $\zeta_3$ et $Q$ est le nombre de points de Gauss pour la variable $\omega$. $W_{pq}$ sont les pondérations de Gauss.

→ En fonction des propriétés de la matrice et de la forme de l'inclusion, les auteurs ont utilisé $P = 2$ et $Q$ aussi grand que $1000$. Plus les inclusions sont élancées et pour des matrices anisotropes, plus le nombre de points de Gauss nécessaire est grand.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Les valeurs de $\omega_p$, $\zeta_{3_p}$ et $W_{pq}$ peuvent être obtenues selon divers algorithmes (voir Numerical Recipes in Fortran de Press et al. – disponible gratuitement sur le web).

→ Pour une intégrale à deux dimensions, les $W_{pq} = w_p w_q$, où $w_p$ et $w_q$ sont les poids pour une fonction uni-dimensionnelle intégrée par rapport à $\omega$ ou $\zeta_3$.

→ Ces notions seront appliquées en exercice.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ La solution d'Eshelby peut être appliquée au cas de l'inhomogénéité, qui est en fait une inclusion de propriété mécanique différente dans un milieu infini soumis à un chargement non nul.

→ Imaginons que la déformation macroscopique $\mathbf{E}$ est imposée. Si le matériau était homogène, la contrainte résultante serait $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$.

→ Comme le matériau n'est pas homogène (inclusion de propriété mécanique différente), la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ sera donnée par:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x}) \tag{30}$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x})$ est une contrainte de perturbation par rapport à la contrainte macroscopique.

→ Ici, comme pour l'inclusion précédente, on aura doit avoir que $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$ pour l'équilibre et $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x}) = 0$ à l'infini pour rencontrer les conditions aux rives. On remarque que cela ressemble beaucoup au problème d'inclusion.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Dans chaque phase, la contrainte sera donnée par:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{C}^i : \left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x})\right) & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \mathbf{C} : \left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x})\right) & \boldsymbol{x} \in V - \Omega \end{cases} \tag{31}$$

où $\mathbf{C}^i$ est la rigidité de l'inclusion, $\mathbf{C}$ est la rigidité du milieu infini, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x})$ est la déformation de perturbation induite par la présence de l'inclusion, $\Omega$ le volume de l'inclusion et $V$ le volume total du matériau moins celui de l'inclusion.

→ Considérons maintenant le cas d'un milieu uniforme, ayant une inclusion soumise à une déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ soumis à une déformation macroscopique $\mathbf{E}$. On peut résoudre ce problème par superposition: (inclusion uniforme sans déformation libre soumise à $\mathbf{E}$) + (inclusion uniforme soumise à $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ sans chargement à l'infini). Pour le premier problème, la déformation sera égale à $\mathbf{E}$. Pour le second problème, on aura que $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}^{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^\star$. On rappelle que $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la déformation totale et que la déformation mécanique $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{el}}$ (i.e. celle utilisée pour calculer les contraintes) est donnée par $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{el}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^\star$.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
▷ Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Alors, pour ce problème d'inclusion homogène soumise à une déformation à l'infini, on aura:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathbf{C} : \left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\star}\right) & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \mathbf{C} : \left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}}(\boldsymbol{x})\right) & \boldsymbol{x} \in V - \Omega \end{cases} \tag{32}$$

où on peut voir que $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}} = \mathbf{S}^{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\star} = \mathrm{cte}$ dans l'inclusion avec ce qui a été écrit au transparent précédent.

→ Si on veut que les contraintes soient égales dans le problème d'inclusion de propriétés différentes et celle soumise à une déformation libre et déformation à l'infini, on aura:

$$\mathbf{C}^{i} : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}}) = \mathbf{C} : (\mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\star}) \quad \text{dans } \Omega \tag{33}$$

→ Si on a que $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{pt}} = \mathbf{S}^{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\star}$, il faut que **(demo)**:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\star} = \left[\left(\mathbf{C} - \mathbf{C}^{i}\right) : \mathbf{S}^{\mathbf{E}} - \mathbf{C}\right]^{-1} : \left(\mathbf{C}^{i} - \mathbf{C}\right) : \mathbf{E} \tag{34}$$

pour que les deux problèmes conduisent aux mêmes contraintes. On voit donc que l'on peut solutionner le problème d'un renfort dans un milieu infini avec la solution d'Eshelby.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
▷ Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Le premier schéma d'homogénéisation présenté est celui de la solution diluée. Il suppose des renforts ellipsoïdaux distribués dans une matrice infinie en concentration très faible. On se retrouve donc dans les conditions du problème d'Eshelby.

→ Pour une déformation imposée $\mathbf{E}$, la déformation dans un renfort particulier $r$ sera donnée par:

$$\begin{aligned}\varepsilon^r &= \mathbf{E} + \mathbf{S}^{\mathbf{E}} : \varepsilon^{\star r} \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} : \left[(\mathbf{C} - \mathbf{C}^r) : \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} - \mathbf{C}\right]^{-1} : (\mathbf{C}^r - \mathbf{C}) : \mathbf{E} \\ &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} : \left[(\mathbf{C} - \mathbf{C}^r) : \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} - \mathbf{C}\right]^{-1} : (\mathbf{C}^r - \mathbf{C})\right] : \mathbf{E} \\ &= \mathbf{A}^r : \mathbf{E}\end{aligned} \tag{35}$$

→ Après quelques simplifications, $\mathbf{A}^r$ devient: **(demo)**:

$$\mathbf{A}^r = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} : \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{C}^r - \mathbf{C})\right]^{-1} \tag{36}$$

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
▷ Diluée
AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Avec les relations d'homogénéisation, on avait obtenu que les propriétés effectives étaient définies par:

$$\tilde{\mathbf{C}} = c_r \mathbf{C}^r : \langle \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \rangle_r \tag{37}$$

→ Ici, comme la déformation est constante dans l'inclusion, $\mathbf{A}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{ct} = \mathbf{A}^r$. De cette manière, on aura que:

$$c_0 \mathbf{A}^0 + \sum_{r=1}^{R} c_r \mathbf{A}^r = \mathbf{I} \tag{38}$$

ce qui nous conduira à:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &= c_0 \mathbf{C}^0 : \mathbf{A}^0 + \sum_{r=1}^{R} c_r \mathbf{C}^r : \mathbf{A}^r \\ &= \mathbf{C}^0 + \sum_{r=1}^{R} c_r \left( \mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0 \right) : \mathbf{A}^r \end{aligned} \tag{39}$$

→ **Voir exemple d'application au tableau.**

# Schéma auto-cohérent

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
▷ AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Le schéma auto-cohérent suppose que chaque inclusion est noyée dans le composite homogénéisé. On aura les mêmes équations qu'en solution diluée, mais où:

$$\mathbf{A}^r = \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} : \tilde{\mathbf{C}}^{-1} : \left(\mathbf{C}^r - \tilde{\mathbf{C}}\right)\right]^{-1} \tag{40}$$

où le tenseur d'Eshelby est évalué pour la matrice de propriété $\tilde{\mathbf{C}}$.

→ On aura donc un problème implicite car les tenseurs $\mathbf{A}^r$ vont dépendre du tenseur $\tilde{\mathbf{C}}$, qui lui va dépendre des tenseurs $\mathbf{A}^r$.

→ Dans la majeure partie des cas, les propriétés effectives sont obtenues à l'aide d'un schéma numérique pour résoudre l'équation implicite.

→ Considérons le cas d'un composite à renforts sphériques où la matrice a des modules $k_0$ et $\mu_0$, les renforts des modules $k_1$ et $\mu_1$ en fraction volumique $c_1$.

→ Suite autre transparent...

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
▷ AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ Le tenseur $\mathbf{A}^1$ sera donné par:

$$\begin{aligned}\alpha^{A^1} &= \left[1 + \tilde{\alpha}^{S^E}\frac{1}{3\tilde{k}}(3k_1 - 3\tilde{k})\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{3\tilde{k} + \tilde{\alpha}^{S^E}(3k_1 - 3\tilde{k})}{3\tilde{k}}\right]^{-1} \\ &= \frac{\tilde{k}}{\tilde{k} + \tilde{\alpha}^{S^E}(k_1 - \tilde{k})} \text{ (partie sphérique)}\end{aligned} \tag{41a}$$

$$\begin{aligned}\beta^{A^1} &= \left[1 + \tilde{\beta}^{S^E}\frac{1}{2\tilde{\mu}}(2\mu_1 - 2\tilde{\mu})\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{2\tilde{\mu} + \tilde{\beta}^{S^E}(2\mu_1 - 2\tilde{\mu})}{2\tilde{\mu}}\right]^{-1} \\ &= \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu} + \tilde{\beta}^{S^E}(\mu_1 - \tilde{\mu})} \text{ (partie déviatorique)}\end{aligned} \tag{41b}$$

où.... suite autre transparent.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
▷ AC
MT
Performances
Viscoélasticité

→ ... où $\tilde{\alpha}^{S^E}$ et $\tilde{\beta}^{S^E}$ sont les parties sphériques et déviatoriques du tenseur d'Eshelby où les propriétés de la matrice $(k_0, \mu_0)$ ont été remplacées par les propriétés effectives $(\tilde{k}, \tilde{\mu})$.

→ En appliquant l'équation d'homogénéisation, on aura que les modules de compressibilité et de cisaillement de $\tilde{\mathbf{C}}$ seront donnés par:

$$\tilde{k} = k_0 + c_1 \frac{\tilde{k}(k_1 - k_0)}{\tilde{k} + \tilde{\alpha}^{S^E}(k_1 - \tilde{k})} \tag{42a}$$

$$\tilde{\mu} = \mu_0 + c_1 \frac{\tilde{\mu}(\mu_1 - \mu_0)}{\tilde{\mu} + \tilde{\beta}^{S^E}(\mu_1 - \tilde{\mu})} \tag{42b}$$

→ On peut voir que l'on a un système du type $f(x) = x$, où $x$ est l'inconnue. Ce genre de problème peut se solutionner numériquement avec la méthode du point fixe. Cette méthode itérative donne la prochaine itération avec la relation:

$$x^{n+1} = f(x^n) \tag{43}$$

Les itérations s'arrêtent lorsque $x^{n+1} - f(x^n) \approx 0$. Cette technique peut facilement se généraliser aux vecteurs.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
▷ MT
Performances
Viscoélasticité

→ Dans le schéma auto-cohérent, on avait supposé que l'inclusion était noyée dans le composite effectif. Certain auteurs interprètent le modèle auto-cohérent comme un modèle applicable au cas des polycristaux où il n'y a pas vraiment de phase 'matrice', mais un agencement de grains collés les uns sur les autres.

→ Dans le modèle de Mori-Tanaka, on suppose que chaque inclusion est noyée dans la matrice du composite. Lorsqu'une contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ est appliquée sur le composite, une contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma}^0$ se développe dans le composite, ce qui entraîne une déformation moyenne $\boldsymbol{\varepsilon}^0$.

→ La contrainte moyenne dans la matrice sera influencée par les autres renforts, leur fraction volumique, etc. Donc, certain auteurs affirment de le modèle de Mori-Tanaka est bien adapté aux composites où il y a une phase importante (la matrice) dans laquelle sont noyés des renforts.

→ Le modèle de Mori-Tanaka sera donc très similaire au modèle auto-cohérent et à la solution diluée. Ici, le milieu infini sera assimilé à la matrice dans le composite.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
▷ MT
Performances
Viscoélasticité

→ Comme pour la solution diluée, où cette fois-ci la déformation macroscopique $\mathbf{E}$ est en fait la déformation dans la matrice $\boldsymbol{\varepsilon}^0$, la déformation dans une inclusion $r$ sera donnée par:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^r &= \left[\mathbf{I} + \mathbf{S}^{\mathbf{E}r} : \mathbf{C}^{-1} : (\mathbf{C}^r - \mathbf{C})\right]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ &= \mathbf{T}^r : \boldsymbol{\varepsilon}^0\end{aligned} \tag{44}$$

→ Avec les relations de moyenne volumique des déformations, on aura que:

$$\mathbf{E} = \sum_{r=0}^{R} c_r \mathbf{T}^r : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \tag{45}$$

→ Comme $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ est une constante, on pourra obtenir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^0 &= \left(\sum_{r=0}^{R} c_r \mathbf{T}^r\right)^{-1} : \mathbf{E} \\ &= \mathbf{A}^0 : \mathbf{E}\end{aligned} \tag{46}$$

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
▷ MT
Performances
Viscoélasticité

→ Avec l'équation (44), on aura que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^r &= \mathbf{T}^r : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ &= \mathbf{T}^r : \mathbf{A}^0 : \mathbf{E} \\ &= \mathbf{T}^r : \left(\sum_{r=0}^{R} c_r \mathbf{T}^r\right)^{-1} : \mathbf{E} \\ &= \mathbf{A}^r : \mathbf{E} \text{ pour } r > 1\end{aligned} \tag{47}$$

→ Cela nous permettra de calculer le module effectif avec l'équation classique:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^0 + \sum_{r=1}^{R} c_r \left(\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0\right) : \mathbf{A}^r \tag{48}$$

**(voir exemple au tableau pour un matériau bi-phasique)**.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
▷ Performances
Viscoélasticité

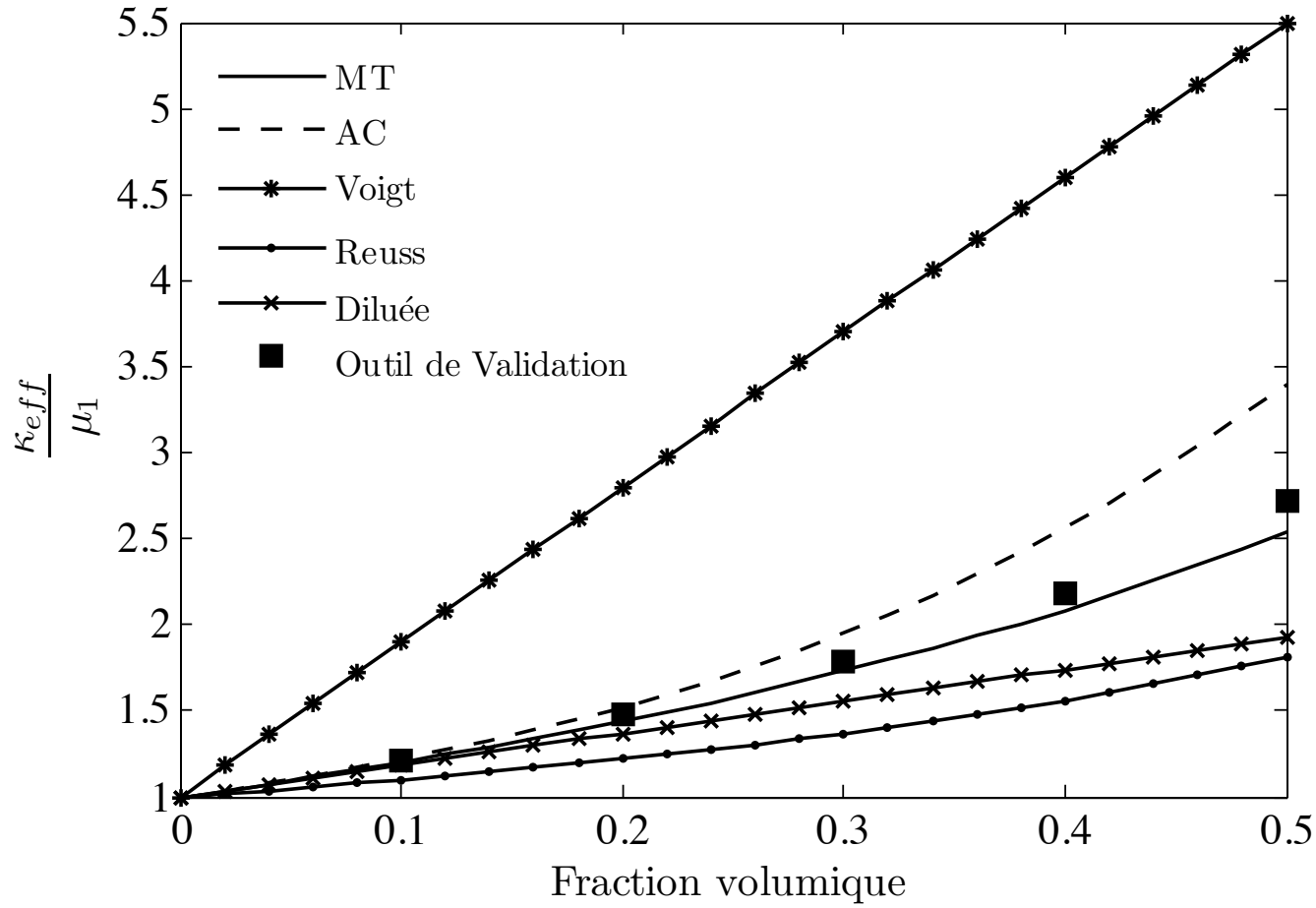


Figure 3: Rapport $\tilde{\kappa}/\mu_1$ en fonction de la fraction volumique pour $\kappa_1 = \mu_1 = 1$ et $\kappa_2 = \mu_2 = 10$ pour un composite constitué de sphères aléatoirement distribuées. L'indice "1" fait référence à la matrice et l'indice "2" aux sphères. Les points "Outil de Validation" représentent la solution exacte obtenue par une méthode numérique.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
▷ Performances
Viscoélasticité

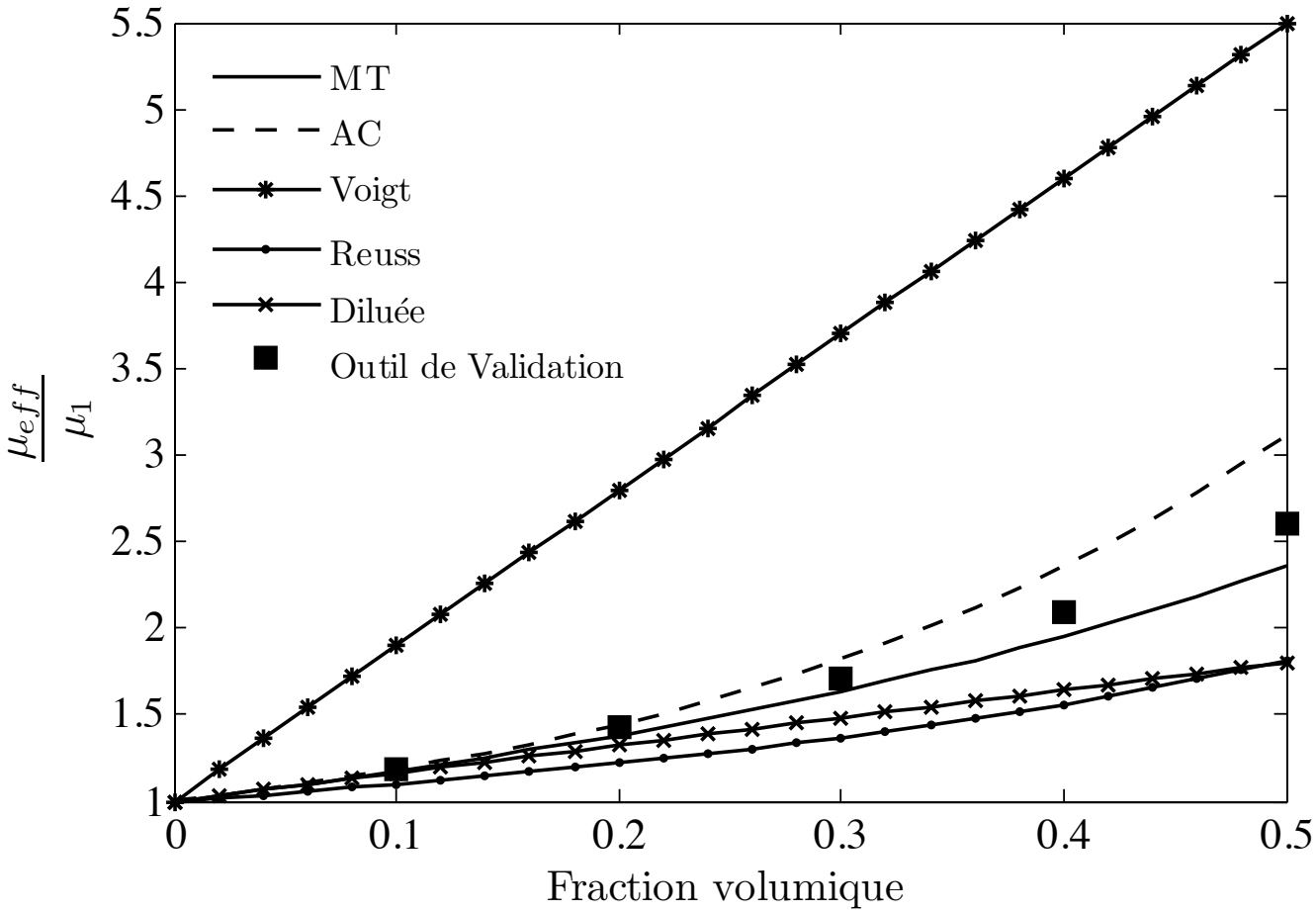


Figure 4: Rapport $\tilde{\mu}/\mu_1$ en fonction de la fraction volumique pour $\kappa_1 = \mu_1 = 1$ et $\kappa_2 = \mu_2 = 10$ pour un composite constitué de sphères aléatoirement distribuées. L'indice "1" fait référence à la matrice et l'indice "2" aux sphères. Les points "Outil de Validation" représentent la solution exacte obtenue par une méthode numérique.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
▷ Performances
Viscoélasticité

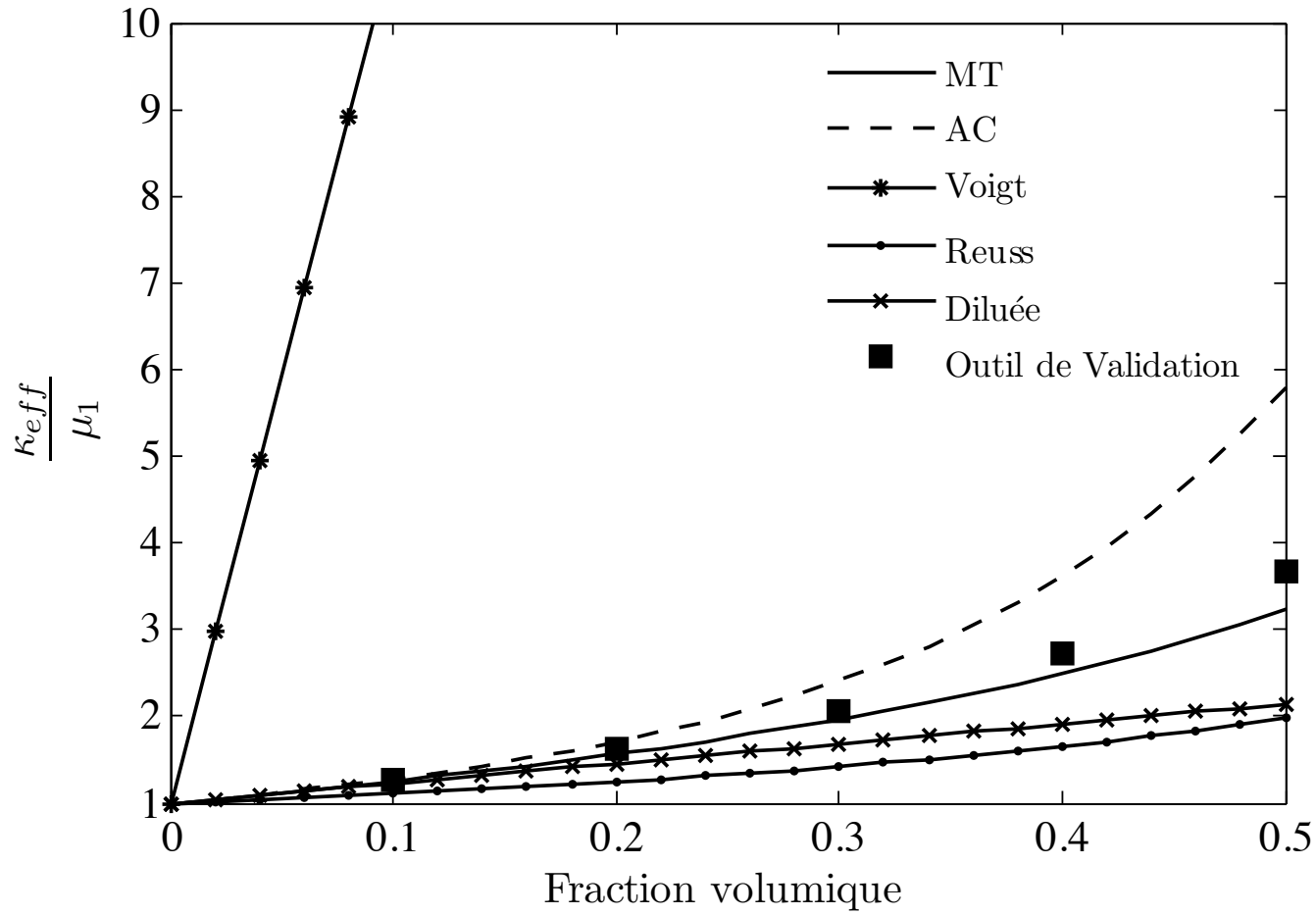


Figure 5: Rapport $\tilde{\kappa}/\mu_1$ en fonction de la fraction volumique pour $\kappa_1 = \mu_1 = 1$ et $\kappa_2 = \mu_2 = 100$ pour un composite constitué de sphères aléatoirement distribuées. L'indice "1" fait référence à la matrice et l'indice "2" aux sphères. Les points "Outil de Validation" représentent la solution exacte obtenue par une méthode numérique.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
▷ Performances
Viscoélasticité

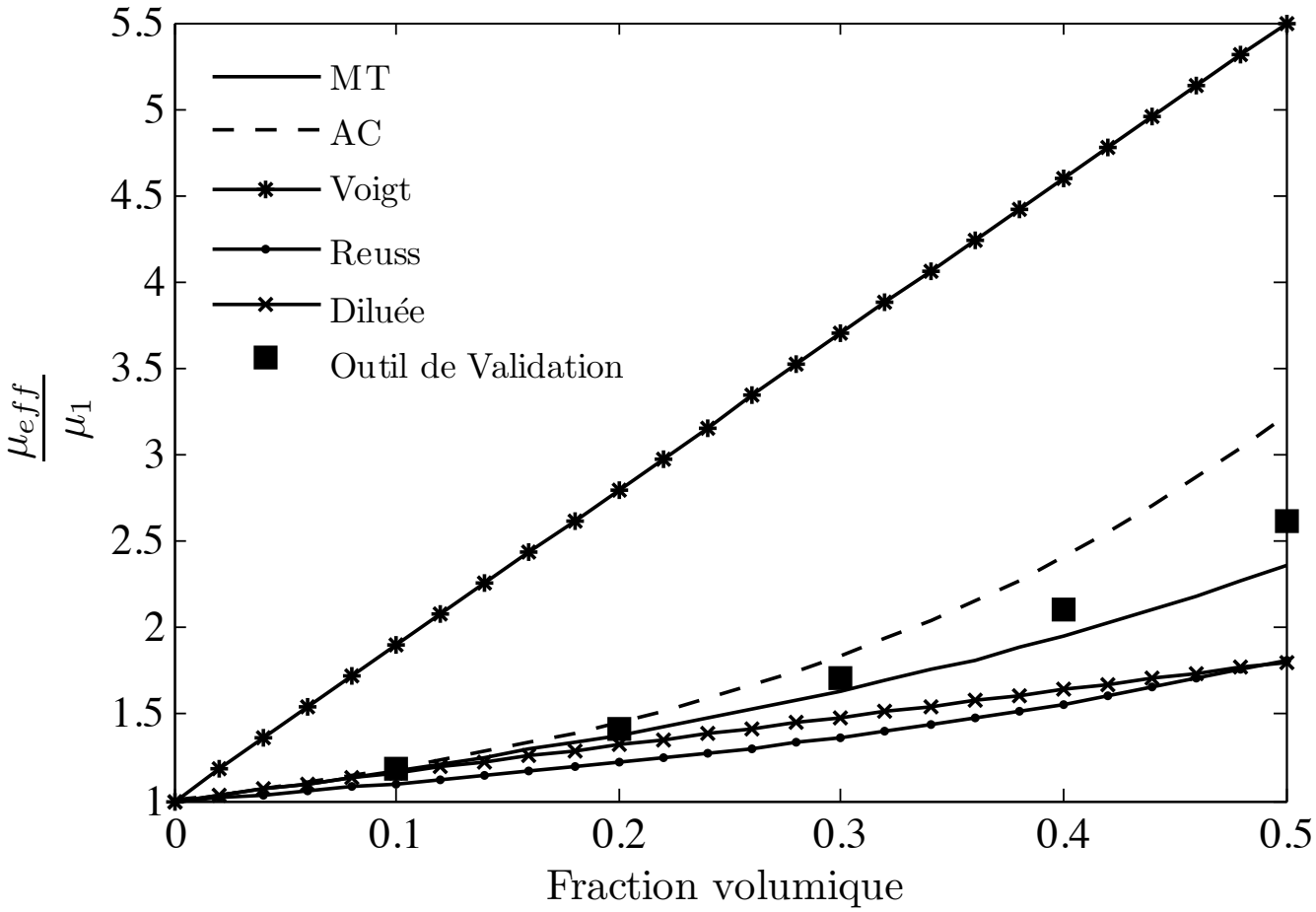


Figure 6: Rapport $\tilde{\mu}/\mu_1$ en fonction de la fraction volumique pour $\kappa_1 = \mu_1 = 1$ et $\kappa_2 = \mu_2 = 100$ pour un composite constitué de sphères aléatoirement distribuées. L'indice "1" fait référence à la matrice et l'indice "2" aux sphères. Les points "Outil de Validation" représentent la solution exacte obtenue par une méthode numérique.

Motivation
Bases
Voigt / Reuss
Eshelby
Diluée
AC
MT
Performances
▷ Viscoélasticité

## Homogénéisation

→ Si une des phases à homogénéiser est viscoélastique, l'homogénéisation se fait en appliquant le principe de correspondance viscoélastique.

→ Si on note par $f^*$ la transformée de Laplace-Carson de $f$, alors on aura avec les relations classiques:

$$\tilde{\mathbf{C}}^* = \left(\mathbf{C}^0\right)^* + \sum_{r=1}^{R} c_r \left(\mathbf{C}^r - \mathbf{C}^0\right)^* : (\mathbf{A}^r)^* \tag{49}$$

où $(\mathbf{A}^r)^*$ est obtenu en remplaçant les modules élastiques par les modules dans l'espace de Laplace-Carson

→ L'obtention des propriétés dans l'espace de Laplace-Carson est généralement facile à obtenir. C'est l'inversion (i.e., le retour dans le domaine temporel) qui est compliquée. Cela peut se faire avec la méthode des collocations vue dans le chapitre sur la viscoélasticité.